

Steklov 问题学习笔记

南开大肥猪

November 10, 2025

目录

1 一些定义	2
1.1 几种图	2
1.2 Steklov Eigenvalue	3
1.2.1 流形版本	3
1.2.2 离散版本	3
1.3 Algebraic Connectivity	4
2 Steklov Eigenvalue	5
2.1 Steklov 特征值大小关系	5
2.2 特殊图中的特征函数的构造	9
2.2.1 Spider 图	9
2.2.2 Extra Special 图	12
2.2.3 Crab 图	16
2.3 一些可以直接求特征值的特殊图	19
2.3.1 星图 S_n	19
2.3.2 路 P_n	20
2.4 匹配数引理	20
2.5 一般树	23
2.5.1 给定顶点数、匹配数	23
2.5.2 给定叶子数、匹配数	24
3 Algebraic Connectivity	26
3.1 Laplace 特征值的大小关系	26
3.2 特殊图中的 Laplace 特征值	27
3.2.1 Crab 图	27
3.2.2 Spider 图	36
3.3 一般树	37
3.3.1 给定顶点数、匹配数	37
3.3.2 给定叶子数、匹配数	39
4 猜想	40

1 一些定义

1.1 几种图

Definition 1.1 (蜘蛛图). 设 $p_1, p_2, \dots, p_t \geq 0$, $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_t \geq 1$ 为整数, 且满足 $p_1 + p_2 \geq 2$ 。考虑 p_i 条长度为 ℓ_i 的路径, 其中 $i = 1, 2, \dots, t$ 。对于这 $(p_1\ell_1 + \dots + p_t\ell_t)$ 条路径中的每一条, 取其一个端点, 并将所有这些端点重合为一个顶点。这样得到的图称为蜘蛛图 $Sp_{p_1, p_2, \dots, p_t; \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t}$ 。

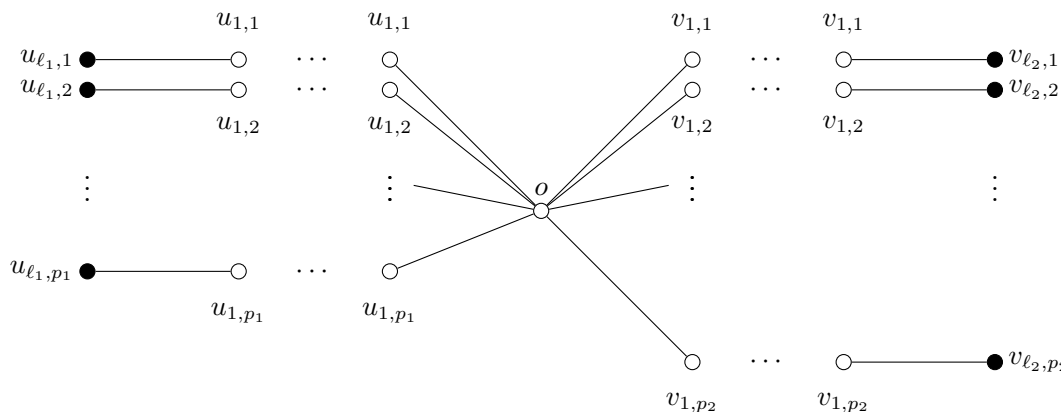


图 1: 蜘蛛图 $Sp_{p_1, p_2; \ell_1, \ell_2}$ (叶子结点作为边界)

Definition 1.2 (蟹图). 设 $b_1, b_2, r \geq 1$ 为整数。蟹图 $CG_{b_1, b_2; r}$ 是通过将蜘蛛图 $Sp_{b_1; r}$ 的中心与一条独立边的一个端点重合, 并将另一个蜘蛛图 $Sp_{b_2; r}$ 的中心与该边的另一个端点重合而得到的图。

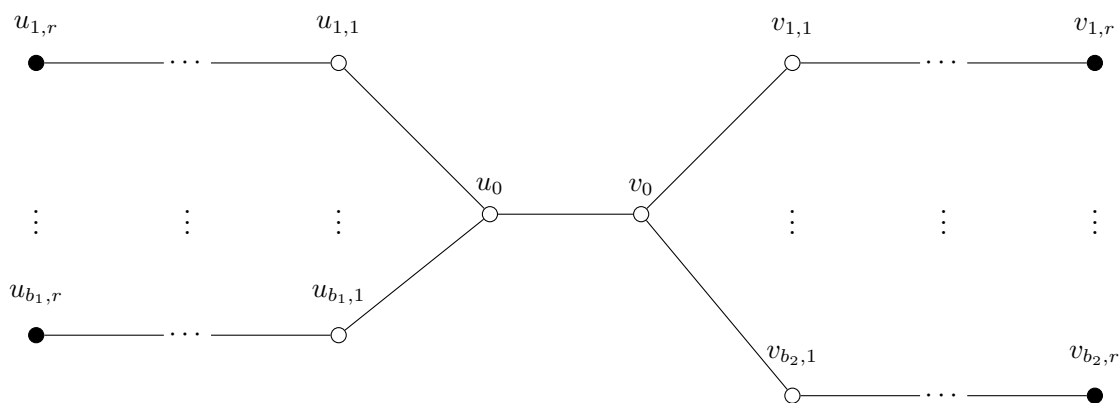


图 2: 蟹图 $CG_{b_1, b_2; r}$ (叶子结点作为边界)

Definition 1.3. 设 $p \geq 1$ 和 $b \geq 3$ 为整数。ES 图 $ES_{b,p}$ 是蜘蛛图 $Sp_{1,1, b-2; p+2, p+1, p}$ 。

1.2 Steklov Eigenvalue

1.2.1 流形版本

Definition 1.4. *Laplace-Beltrami* 算子 Δ 是黎曼流形上的二阶椭圆微分算子，定义为：

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right)$$

其中 g_{ij} 是度量张量， g^{ij} 是其逆， $|g|$ 是度量张量的行列式。在欧几里得空间中，它退化为通常的拉普拉斯算子 $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 。

Definition 1.5. *Steklov 问题* 是寻找函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 和常数 λ 使得：

$$\begin{cases} \Delta f(x) = 0, & x \in M, \\ \frac{\partial f}{\partial n}(x) = \lambda f(x), & x \in \partial M, \end{cases}$$

Definition 1.6. *Dirichlet-Neumann* 算子 Γ 是一个将边界上的函数映射到其法向导数的算子：

$$\Gamma : H^{\frac{1}{2}}(\partial M) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial M)$$

$$f \longmapsto \Gamma f := \frac{\partial \hat{f}}{\partial n}$$

其中 \hat{f} 是 f 到 M 的调和延拓，即满足 $\Delta \hat{f} = 0$ 且在边界上 $\hat{f}|_{\partial M} = f$ 的函数。

Definition 1.7. *Steklov 特征值* 是 Dirichlet-Neumann 算子的特征值，按递增顺序排列为：

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \nearrow \infty$$

其中 $\lambda_1 = 0$ 对应常数函数， λ_2 称为第一非零 *Steklov 特征值*。

1.2.2 离散版本

Definition 1.8 (离散版). 对于一个具有边界 B (顶点集的一个特定子集) 的图 $G(V, E)$ ，我们可以定义(离散) *Steklov 算子*

$$\Lambda : \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}^B, \quad \Lambda(f) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial n} \quad (1)$$

其中 \hat{f} 是 f 到整个图 V 的调和延拓，而 $\frac{\partial \hat{f}}{\partial n}$ 是由 $\frac{\partial \hat{f}}{\partial n}(x) = \sum_{(x,y) \in E} (f(x) - f(y))$ 给出的离散法向导数。

Λ 的特征值称为对 (G, B) 的 *Steklov 特征值*，记为

$$0 = \sigma_1(G, B) \leq \sigma_2(G, B) \leq \cdots \leq \sigma_{|B|}(G, B) \quad (2)$$

注 1.1. 当图和边界从上下文中清晰可知时，我们记 σ_i 表示 $\sigma_i(G, B)$ 。

1.3 Algebraic Connectivity

Definition 1.9 (矩阵的特征多项式与特征值). 设 M 为一个 $n \times n$ 矩阵。我们记 $\Phi(M) = \Phi(M, x) = \det(xI - M)$ 为矩阵 M 的**特征多项式**。该多项式的根称为 M 的**特征值**。若 M 的特征值均为实数，则我们将它们按升序排列，记为 $\mu_1(M) \leq \mu_2(M) \leq \dots \leq \mu_n(M)$ 。

Definition 1.10 (图的拉普拉斯矩阵). 设 $G = (V, E)$ 是一个无向图，其顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。图 G 的**拉普拉斯矩阵** $L(G)$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，其定义如下：

$$[L(G)]_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{如果 } i = j, \\ -1, & \text{如果 } i \neq j \text{ 且 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

等价地， $L(G) = D(G) - A(G)$ ，其中 $D(G)$ 是**度矩阵**（对角矩阵）， $A(G)$ 是**邻接矩阵**。

对于一个图 $G = (V, E)$ ，我们可以定义（离散）拉普拉斯算子 $L : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ 为 $L(f) = \sum_{xy \in E} (f(x) - f(y))$ 。 L 的特征值称为 G 的拉普拉斯特征值，记为

$$0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_{|V|}(G) \quad (3)$$

Definition 1.11 (拉普拉斯谱). 设 G 是一个图， $L(G)$ 是其拉普拉斯矩阵。我们记 $\Phi(G) = \Phi(L(G), x)$ 为 $L(G)$ 的特征多项式，称为图 G 的**拉普拉斯特征多项式**。 $L(G)$ 的特征值称为 G 的**拉普拉斯特征值**，记为 $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G)$ 。

Definition 1.12 (代数连通度). 拉普拉斯矩阵是半正定矩阵，因此其特征值均为非负实数，且满足 $\lambda_1(G) = 0$ 。第二个拉普拉斯特征值 $\lambda_2(G)$ 被称为图的**代数连通度**，它反映了图的连通程度。

Definition 1.13 (归一化拉普拉斯矩阵及其谱). 设 G 是一个图， $D(G)$ 是其度矩阵。图 G 的**归一化拉普拉斯矩阵** 定义为 $\mathcal{L}(G) = I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$ ，或者在某些文献中亦定义为 $I - D^{-1}A$ （当 G 无孤立点时）。该矩阵的特征值称为 G 的**归一化拉普拉斯特征值**。本文中，我们记 $\sigma_k(T)$ 为树 T 的**第 k 个归一化拉普拉斯特征值**，通常也按升序排列： $0 = \sigma_1(T) \leq \sigma_2(T) \leq \dots$ 。

2 Steklov Eigenvalue

2.1 Steklov 特征值大小关系

Lemma 2.1. 设 T 为一棵有限树，其叶子作为边界 B 。设 T' 是 T 的一棵子树，其叶子作为边界 B' 。则对 $i = 1, 2, \dots, |B'|$ ，有

$$\sigma_i(T) \leq \sigma_i(T') \quad (4)$$

Let (G, m, w) be a weighted finite graph. Let $A^1(G)$ be the collection of skew symmetric functions $\alpha : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\alpha(x, y) = 0$ when $x \not\sim y$. The exterior differential map $d : R^{V(G)} \rightarrow A^1(G)$ is defined as

$$df(x, y) = \begin{cases} f(y) - f(x) & x \sim y \\ 0 & x \not\sim y. \end{cases}$$

Equip $R^{V(G)}$ and $A^1(G)$ with the following natural inner products

$$\langle f, g \rangle_G = \sum_{x \in V(G)} f(x)g(x)m_x, \quad (5)$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_G = \sum_{\{x, y\} \in E(G)} \alpha(x, y)\beta(x, y)w_{xy} \quad (6)$$

for any $f, g \in R^{V(G)}$ and $\alpha, \beta \in A^1(G)$. For $A \subset V(G)$, we denote

$$m(A) = \sum_{x \in A} m_x, \quad (7)$$

$$\langle f, g \rangle_A = \sum_{x \in A} f(x)g(x)m_x. \quad (8)$$

Denote the adjoint operator of $d : R^{V(G)} \rightarrow A^1(G)$ as d^* . Then define the Laplacian operator $\Delta_G : R^{V(G)} \rightarrow R^{V(G)}$ as

$$\Delta_G = -d^*d.$$

A direct computation gives

$$\Delta_G f(x) = \frac{1}{m_x} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x))w_{xy}.$$

Moreover, by the definition of Δ_G , it is clear that

$$\langle \Delta_G f, g \rangle_G = -\langle df, dg \rangle_G \quad \forall f, g \in R^{V(G)}.$$

So $-\Delta_G$ is a nonnegative self-adjoint operator on $R^{V(G)}$. Its eigenvalues

$$0 = \mu_1(G, m, w) \leq \mu_2(G, m, w) \leq \dots \leq \mu_{|V(G)|}(G, m, w)$$

are called Laplacian eigenvalues of (G, m, w) .

Let (G, B, m, w) be a weighted finite graph with boundary and $f \in R^{V(G)}$. Define the outward normal derivative of f at $x \in B$ as

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x) := \frac{1}{m_x} \sum_{y \in V(G)} (f(x) - f(y))w_{xy} = -\Delta_G f(x).$$

Then by (5)–(8), it is clear that

$$\langle df, dg \rangle_G = -\langle \Delta_G f, g \rangle_\Omega + \left\langle \frac{\partial f}{\partial n}, g \right\rangle_B.$$

This is a discrete version of Green's formula.

A real number σ is called a **Steklov eigenvalue** of (G, B, m, w) if the following boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta_G f(x) = 0 & x \in \Omega \\ \frac{\partial f}{\partial n}(x) = \sigma f(x) & x \in B \end{cases} \quad (9)$$

has a nonzero solution f . The nonzero solution f is called a **Steklov eigenfunction** of the graph for σ . Steklov eigenvalues are the eigenvalues of the so-called Steklov operator or Dirichlet-to-Neumann map (DtN map for short):

$$\Lambda : R^B \rightarrow R^B, \quad \Lambda(u) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \Big|_B,$$

where \tilde{u} is the harmonic extension of u from B to G . The Steklov eigenvalues are denoted as

$$0 = \sigma_1(G, B, m, w) \leq \sigma_2(G, B, m, w) \leq \cdots \leq \sigma_{|B|}(G, B, m, w).$$

For simplicity, we also write $\sigma_i(G, B, m, w)$ as σ_i , $\sigma_i(G)$ or $\sigma_i(G, B)$ if the ignored information is clear in context.

Definition 2.1 (Comb Structure). A connected graph \tilde{G} is called a **comb over** its connected subgraph G if \tilde{G} breaks into $|V(G)|$ connected components when all edges of G are deleted. G is then called the **base** of the comb.

Suppose \tilde{G} is a comb over G .

1. Denote the connected component of \tilde{G} containing $x \in V(G)$ when all edges of G are deleted as \tilde{G}_x , and call \tilde{G}_x the **tooth** of the comb at x .
2. When \tilde{G} is a graph with boundary \tilde{B} , define $\tilde{B}_x := \tilde{B} \cap V(\tilde{G}_x)$ for any $x \in V(G)$.

Theorem 2.2. Let $(\tilde{G}, \tilde{B}, m, w)$ be a weighted connected finite graph with boundary, and (G, B) be such that G is a connected subgraph of \tilde{G} . Suppose that \tilde{G} is a comb over G (Definition 2.1), and

$$m(\tilde{B}_x) \geq m_x \quad (10)$$

for any $x \in B$. Then, for any $i = 1, 2, \dots, |B|$,

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \sigma_i(G). \quad (11)$$

Here $m(\tilde{B}_x)$ means the total measure of vertices in \tilde{B}_x .

Proof of Theorem 2.2. The proof relies on the **min-max characterization** of Steklov eigenvalues:

$$\sigma_i(H) = \min_{\substack{U \subset R^{B(H)} \\ \dim U = i}} \max_{\substack{0 \neq u \in U \\ u \in R^{B(H)}}} \frac{\langle du, du \rangle_H}{\langle u, u \rangle_{B(H)}}, \quad (12)$$

where $u \in R^{B(H)}$ is extended harmonically to H in the Rayleigh quotient.

Let $\phi_1 = 1, \phi_2, \dots, \phi_{|\tilde{B}|}$ be an **orthogonal system** of Steklov eigenfunctions on \tilde{G} such that ϕ_j is the Steklov eigenfunction corresponding to $\sigma_j(\tilde{G})$ for $j = 1, 2, \dots, |\tilde{B}|$. That is,

$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{G}}\phi_j = 0 & \text{in } \Omega(\tilde{G}), \\ \frac{\partial\phi_j}{\partial n}\Big|_{\tilde{B}} = \sigma_j(\tilde{G})\phi_j\Big|_{\tilde{B}}, \end{cases} \quad \langle\phi_j, \phi_k\rangle_{\tilde{B}} = 0 \quad (j \neq k). \quad (13)$$

Similarly, let $f_1 = 1, f_2, \dots, f_{|B|}$ be an **orthogonal system** of Steklov eigenfunctions on G such that f_j is the Steklov eigenfunction corresponding to $\sigma_j(G)$ for $j = 1, 2, \dots, |B|$. That is,

$$\begin{cases} \Delta_G f_j = 0 & \text{in } \Omega(G), \\ \frac{\partial f_j}{\partial n}\Big|_B = \sigma_j(G)f_j\Big|_B, \end{cases} \quad \langle f_j, f_k \rangle_B = 0 \quad (j \neq k). \quad (14)$$

Fix $i \geq 2$. We construct a test function \tilde{f} on \tilde{G} as follows:

Step 1: Linear combination on G . Define

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_i f_i \in R^{V(G)}, \quad (15)$$

where $c_1, c_2, \dots, c_i \in \mathbb{R}$ are constants **not all zero** to be determined.

Step 2: Orthogonality condition. Require that the **harmonic extension** \tilde{f} of f satisfies

$$\langle \tilde{f}, \phi_j \rangle_{\tilde{B}} = 0 \quad \text{for all } j = 1, 2, \dots, i-1. \quad (16)$$

Step 3: Existence of coefficients c_1, \dots, c_i . The conditions (16) form a system of $i-1$ linear equations in i unknowns c_1, \dots, c_i :

$$\sum_{k=1}^i c_k \langle \tilde{f}_k, \phi_j \rangle_{\tilde{B}} = 0, \quad j = 1, \dots, i-1,$$

where f_k ($k = 1, \dots, i$) are extended harmonically to \tilde{G} as \tilde{f}_k . This is a homogeneous linear system with $i-1$ equations and i unknowns, so it has a **nontrivial solution** $(c_1, \dots, c_i) \neq (0, \dots, 0)$.

Step 4: Harmonic extension \tilde{f} using comb structure. Define the harmonic extension $\tilde{f} : V(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ as follows: for each tooth \tilde{G}_x ($x \in V(G)$),

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(x) & \text{if } y \in \tilde{B}_x, \\ f(x) & \text{if } y \in V(\tilde{G}_x) \setminus V(G). \end{cases} \quad (17)$$

That is, \tilde{f} takes the **constant value** $f(x)$ on the entire tooth \tilde{G}_x attached at $x \in V(G)$. This satisfies $\Delta_{\tilde{G}}\tilde{f} = 0$ in each tooth (since constant functions are harmonic) and matches f on $V(G)$.

Step 5: Apply min-max principle. By (12) and the orthogonality (16), the Rayleigh quotient of \tilde{f} provides an upper bound:

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \frac{\langle d\tilde{f}, d\tilde{f} \rangle_{\tilde{G}}}{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}}}. \quad (18)$$

Step 6: Dirichlet energy localization (comb structure). Compute the numerator:

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{f}, d\tilde{f} \rangle_{\tilde{G}} &= \sum_{\{u,v\} \in E(\tilde{G})} (\tilde{f}(v) - \tilde{f}(u))^2 w_{uv} \\ &= \sum_{\{u,v\} \in E(G)} (\tilde{f}(v) - \tilde{f}(u))^2 w_{uv} + \sum_{\text{edges in teeth}} \underbrace{(\tilde{f}(v) - \tilde{f}(u))^2}_{=0} w_{uv} \\ &= \sum_{\{u,v\} \in E(G)} (f(v) - f(u))^2 w_{uv} = \langle df, df \rangle_G. \end{aligned} \quad (19)$$

The second equality holds because \tilde{f} is **constant** within each tooth $\tilde{G}_x \setminus \{x\}$ (by (17)), so gradients vanish inside teeth.

Step 7: Boundary inner product inequality (assumption (10)). Compute the denominator:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}} &= \sum_{y \in \tilde{B}} \tilde{f}(y)^2 m_y \\ &= \sum_{x \in B} \sum_{y \in \tilde{B}_x} f(x)^2 m_y \\ &= \sum_{x \in B} f(x)^2 m(\tilde{B}_x). \end{aligned} \quad (20)$$

By assumption (10),

$$\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}} = \sum_{x \in B} f(x)^2 m(\tilde{B}_x) \geq \sum_{x \in B} f(x)^2 m_x = \langle f, f \rangle_B. \quad (21)$$

Step 8: Chain of inequalities. Combine (18)–(21):

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \frac{\langle d\tilde{f}, d\tilde{f} \rangle_{\tilde{G}}}{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}}} = \frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle_B} \leq \frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle_B}. \quad (22)$$

Step 9: Rayleigh quotient on G . The rightmost term in (22) is the Rayleigh quotient of $f = \sum_{k=1}^i c_k f_k$ on G . Since f lies in the i -dimensional span of $\{f_1, \dots, f_i\}$ (the first i eigenfunctions of G), by the min-max principle (12),

$$\frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle_B} \leq \sigma_i(G). \quad (23)$$

Step 10: Conclusion. Combine (22) and (23):

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle_B} \leq \sigma_i(G).$$

This proves (11) for $i \geq 2$. The case $i = 1$ is trivial since $\sigma_1 \equiv 0$. \square

定理 1.1 的核心在于利用「comb 结构」实现 Steklov 特征值的单调性。所谓 comb (梳子), 就是把一个连通子图 G 作为「梳背」(base), 在 G 的每个顶点 $x \in V(G)$ 上「长出」一个连通的「牙齿」(tooth) \tilde{G}_x , 使得删去 G 的所有边后, 整个大图 \tilde{G} 恰好裂成 $|V(G)|$ 个连通分支 $\{\tilde{G}_x\}_{x \in V(G)}$ 。每个牙齿 \tilde{G}_x 只通过顶点 x 与 G 相连, 内部不再有 G 的边。

这种结构带来的关键性质是: 任何在 G 上定义的函数 f , 只要在每个牙齿 \tilde{G}_x 上常值延拓到 $\tilde{f} \equiv f(x)$ (即整个牙齿取相同值), 就自动成为 \tilde{G} 上的调和函数 (因为牙齿内部梯度为零), 且在边界 \tilde{B} 上的值只由 G 的边界顶点决定。

证明思路非常简洁: 用 min-max 原理比较 \tilde{G} 和 G 的第 i 个 Steklov 特征值。

取 G 的前 i 个 Steklov 特征函数 $f_1 = 1, f_2, \dots, f_i$ (在边界 B 上正交)。作线性组合

$$f = \sum_{k=1}^i c_k f_k,$$

并将其按 comb 结构常值延拓到 \tilde{G} 得到 \tilde{f} 。通过选择系数 c_k (解 $i-1$ 个线性齐次方程), 使 \tilde{f} 在 \tilde{G} 的边界 \tilde{B} 上正交于 \tilde{G} 的前 $i-1$ 个 Steklov 特征函数 $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$:

$$\langle \tilde{f}, \phi_j \rangle_{\tilde{B}} = 0, \quad j = 1, \dots, i-1.$$

此时 \tilde{f} 的 Rayleigh 商给出了 $\sigma_i(\tilde{G})$ 的上界:

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \frac{\langle d\tilde{f}, d\tilde{f} \rangle_{\tilde{G}}}{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}}}.$$

分子利用 comb 结构: \tilde{f} 在每个牙齿内部为常数, 故牙齿内部所有边贡献的梯度能量为 0, 整个能量等于 G 上的能量:

$$\langle d\tilde{f}, d\tilde{f} \rangle_{\tilde{G}} = \langle df, df \rangle_G.$$

分母利用假设 $m(\tilde{B}_x) \geq m_x$ (每个牙齿的边界测度不少于原顶点测度):

$$\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}} = \sum_{x \in B} f(x)^2 m(\tilde{B}_x) \geq \sum_{x \in B} f(x)^2 m_x = \langle f, f \rangle_B.$$

于是

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{B}}} \leq \frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle_B}.$$

右边正是 f 在 G 上的 Rayleigh 商, 而 f 属于 G 的前 i 个特征函数张成的 i 维空间, 故由 min-max 原理

$$\frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle_B} \leq \sigma_i(G).$$

综合即得

$$\sigma_i(\tilde{G}) \leq \sigma_i(G).$$

2.2 特殊图中的特征函数的构造

2.2.1 Spider 图

Lemma 2.3. *Let $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \ell_1 \geq \ell_2 \geq 1$ be integers such that $p_1 + p_2 \geq 2$. Let T be the spider graph $Sp_{p_1, p_2; \ell_1, \ell_2}$ with leaves as boundary. Then $\sigma_1(T) = 0, \sigma_2(T) = \dots = \sigma_{p_1}(T) = \frac{1}{\ell_1}, \sigma_{p_1+1}(T) = \frac{p_1+p_2}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}$, and $\sigma_{p_1+2}(T) = \dots = \sigma_{p_1+p_2}(T) = \frac{1}{\ell_2}$. If $p_1 = 0$, then the eigenvalue $\frac{p_1+p_2}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}$ is missing. If $p_1 = 0$ or 1, then the eigenvalue $\frac{1}{\ell_1}$ is missing. If $p_2 = 0$, then the eigenvalue $\frac{p_1+p_2}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}$ is missing. If $p_2 = 0$ or 1, then the eigenvalue $\frac{1}{\ell_2}$ is missing.*

Proof. We give the Steklov eigenfunctions directly. Define $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \dots = \sigma_{p_1} = \frac{1}{\ell_1}, \sigma_{p_1+1} = \frac{p_1+p_2}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}$, and $\sigma_{p_1+2} = \dots = \sigma_{p_1+p_2} = \frac{1}{\ell_2}$. Define

$$\xi_1(v) = 1, \quad \forall v \in V; \quad (24)$$

$$\xi_m(v) = \begin{cases} 1 - \frac{\ell_1 - j}{\ell_1}, & v = u_{m-1, j}, 1 \leq j \leq \ell_1, \\ -(1 - \frac{\ell_1 - j}{\ell_1}), & v = u_{m, j}, 1 \leq j \leq \ell_1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (25)$$

for $m = 2, 3, \dots, p_1$;

$$\xi_{p_1+1}(v) = \begin{cases} p_2(1 - \frac{(\ell_1 - j)(p_1 + p_2)}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}), & v = u_{i, j}, 1 \leq i \leq p_1, 1 \leq j \leq \ell_1, \\ -p_1(1 - \frac{(\ell_2 - j)(p_1 + p_2)}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}), & v = v_{i, j}, 1 \leq i \leq p_2, 1 \leq j \leq \ell_2, \\ \frac{(\ell_2 - \ell_1)p_1 p_2}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}, & v = o; \end{cases} \quad (26)$$

and

$$\xi_m(v) = \begin{cases} 1 - \frac{\ell_2 - j}{\ell_2}, & v = v_{m-q-1,j}, 1 \leq j \leq \ell_2, \\ -(1 - \frac{\ell_2 - j}{\ell_2}), & v = v_{m-q,j}, 1 \leq j \leq \ell_2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (27)$$

for $m = p_1 + 2, p_1 + 3, \dots, p_1 + p_2$. Then ξ_j is a Steklov eigenfunction corresponding to Steklov eigenvalue σ_j for $j = 1, 2, \dots, p_1 + p_2$. \square

我们直接构造 $p_1 + p_2$ 个线性无关的 Steklov 特征函数 $\xi_j : V \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p_1 + p_2$, 并逐一验证其满足离散 Steklov 方程

$$\begin{cases} \Delta \xi_j(v) = 0, & v \in V \setminus \partial\Omega, \\ \xi_j(b) - \xi_j(w_b) = \sigma_j \xi_j(b), & b \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Delta u(v) = \sum_{w \sim v} (u(w) - u(v))$ 为图的拉普拉斯算子, $\partial\Omega = \{u_{i,\ell_1} : 1 \leq i \leq p_1\} \cup \{v_{i,\ell_2} : 1 \leq i \leq p_2\}$ 为所有叶节点构成的边界集, 每个 $b \in \partial\Omega$ 的唯一内部邻居记为 w_b . 边界条件等价于

$$\sigma_j = \frac{\xi_j(b) - \xi_j(w_b)}{\xi_j(b)} \quad (\xi_j(b) \neq 0), \quad \text{或任意 } \sigma_j \text{ 若 } \xi_j(b) = 0$$

设 $\alpha = \frac{p_1 + p_2}{\ell_2 p_1 + \ell_1 p_2}$, $D = \ell_2 p_1 + \ell_1 p_2$. 定义特征值

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \dots = \sigma_{p_1} = \frac{1}{\ell_1}, \quad \sigma_{p_1+1} = \alpha, \quad \sigma_{p_1+2} = \dots = \sigma_{p_1+p_2} = \frac{1}{\ell_2}$$

及对应的特征函数如下。

注 2.1. 这个特征值他一共是分成了 4 种情况来说明, 我们就挨个挨个验算。就实际上就是 *Spider* 图中的左边第一条腿、左边剩下的腿、右边第一条腿 (但实际上这是不对的, 就这是第 p_1 个特征值, 它实际上是融合了两边的情况, 我把它叫做耦合, 说得直白一点就是两边都沾一点)、右边剩下的腿这四种情况。

(1) **第一条腿: 常数函数** ξ_1 , **对应** $\sigma_1 = 0$ 。定义 $\xi_1(v) = 1$ 对所有 $v \in V$ 。对任意内部顶点 $v \notin \partial\Omega$, 其所有邻居 $w \sim v$ 满足 $\xi_1(w) = 1$, 故

$$\Delta \xi_1(v) = \sum_{w \sim v} (1 - 1) = 0.$$

对任意边界点 $b \in \partial\Omega$, 其唯一内部邻居 w_b 满足 $\xi_1(w_b) = 1$, $\xi_1(b) = 1$, 故

$$\xi_1(b) - \xi_1(w_b) = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot \xi_1(b).$$

因此 ξ_1 是 $\sigma_1 = 0$ 的 Steklov 特征函数。

(2) **左腿局部** ξ_m , $m = 2, \dots, p_1$, **对应** $\sigma_m = \frac{1}{\ell_1}$ 。对固定的 $m \in \{2, \dots, p_1\}$, 令第 $m-1$ 条左腿 (编号从 0 开始) 为支撑, 定义

$$\xi_m(v) = \begin{cases} \frac{j}{\ell_1}, & v = u_{m-1,j}, j = 1, 2, \dots, \ell_1, \\ 0, & \text{其他顶点.} \end{cases}$$

首先验证内部调和性。对第 $m-1$ 条左腿上的内部点 $u_{m-1,j}$ ($1 < j < \ell_1$),

$$\Delta \xi_m(u_{m-1,j}) = \xi_m(u_{m-1,j-1}) + \xi_m(u_{m-1,j+1}) - 2\xi_m(u_{m-1,j}) = \frac{j-1}{\ell_1} + \frac{j+1}{\ell_1} - 2\frac{j}{\ell_1} = 0.$$

对靠近中心的 $u_{m-1,1}$, 邻居为 o 与 $u_{m-1,2}$, 有 $\xi_m(o) = 0$, $\xi_m(u_{m-1,2}) = \frac{2}{\ell_1}$, $\xi_m(u_{m-1,1}) = \frac{1}{\ell_1}$, 故

$$\Delta\xi_m(u_{m-1,1}) = 0 + \frac{2}{\ell_1} - 2 \cdot \frac{1}{\ell_1} = 0.$$

对中心 o , 其 $p_1 + p_2$ 个邻居中仅 $u_{m-1,1}$ 非零, 其余为 0, 贡献相互抵消或为零, 故 $\Delta\xi_m(o) = 0$ 。对其他所有顶点, $\xi_m \equiv 0$, 邻居亦为 0, $\Delta\xi_m = 0$ 。内部调和性成立。

其次验证边界条件。唯一非零边界点为 $b^* = u_{m-1,\ell_1}$, 其内部邻居 $w_{b^*} = u_{m-1,\ell_1-1}$, 有

$$\xi_m(b^*) = \frac{\ell_1}{\ell_1} = 1, \quad \xi_m(w_{b^*}) = \frac{\ell_1 - 1}{\ell_1},$$

$$\xi_m(b^*) - \xi_m(w_{b^*}) = 1 - \frac{\ell_1 - 1}{\ell_1} = \frac{1}{\ell_1} = \frac{1}{\ell_1} \cdot 1.$$

对其他 $p_1 - 1$ 个左腿叶节点 u_{i,ℓ_1} ($i \neq m - 1$) 及 p_2 个右腿叶节点 v_{i,ℓ_2} , 均有 $\xi_m(b) = \xi_m(w_b) = 0$, 故 $0 - 0 = \sigma \cdot 0$ 对任意 σ 成立。因此所有 $p_1 + p_2$ 个边界点满足边界条件, $\sigma_m = \frac{1}{\ell_1}$ 。

(3) 耦合部分 ξ_{p_1+1} , 对应 $\sigma_{p_1+1} = \alpha$ 。定义

$$\xi_{p_1+1}(v) = \begin{cases} p_2(1 - \alpha(\ell_1 - j)), & v = u_{i,j}, 1 \leq i \leq p_1, 1 \leq j \leq \ell_1, \\ -p_1(1 - \alpha(\ell_2 - j)), & v = v_{i,j}, 1 \leq i \leq p_2, 1 \leq j \leq \ell_2, \\ \frac{(\ell_2 - \ell_1)p_1p_2}{D}, & v = o. \end{cases}$$

在任意左腿上, $\xi_{p_1+1}(u_{i,j}) = p_2 - p_2\alpha(\ell_1 - j)$ 关于 j 线性, 故内部点 $1 < j < \ell_1$ 的 $\Delta\xi_{p_1+1} = 0$ 。同理右腿内部线性, $\Delta = 0$ 。对中心 o , 邻居为 p_1 个 $u_{i,1}$ 与 p_2 个 $v_{i,1}$,

$$\xi_{p_1+1}(u_{i,1}) = p_2(1 - \alpha(\ell_1 - 1)), \quad \xi_{p_1+1}(v_{i,1}) = -p_1(1 - \alpha(\ell_2 - 1)).$$

总和

$$S = p_1[p_2 - p_2\alpha(\ell_1 - 1)] + p_2[-p_1 + p_1\alpha(\ell_2 - 1)] = p_1p_2\alpha[(\ell_2 - 1) - (\ell_1 - 1)] = p_1p_2\alpha(\ell_2 - \ell_1),$$

而 $\xi_{p_1+1}(o) = (\ell_2 - \ell_1)p_1p_2\alpha$, 故

$$\Delta\xi_{p_1+1}(o) = S - (p_1 + p_2)\xi_{p_1+1}(o) = 0.$$

内部调和性成立。

边界条件: 对左腿叶 $b = u_{i,\ell_1}$,

$$\xi_{p_1+1}(b) = p_2, \quad \xi_{p_1+1}(w_b) = p_2(1 - \alpha), \quad \xi_{p_1+1}(b) - \xi_{p_1+1}(w_b) = p_2\alpha = \alpha \cdot p_2.$$

对右腿叶 $b = v_{i,\ell_2}$,

$$\xi_{p_1+1}(b) = -p_1, \quad \xi_{p_1+1}(w_b) = -p_1(1 - \alpha), \quad \xi_{p_1+1}(b) - \xi_{p_1+1}(w_b) = p_1\alpha = \alpha \cdot (-p_1).$$

所有 $p_1 + p_2$ 个边界点满足 $\xi_{p_1+1}(b) - \xi_{p_1+1}(w_b) = \alpha\xi_{p_1+1}(b)$, 故 $\sigma_{p_1+1} = \alpha$ 。

(4) 右腿局部 ξ_m , $m = p_1 + 2, \dots, p_1 + p_2$, 对应 $\sigma_m = \frac{1}{\ell_2}$ 。对 $m \in \{p_1 + 2, \dots, p_1 + p_2\}$, 令 $k = m - p_1 - 1$ 为右腿编号, 定义

$$\xi_m(v) = \begin{cases} \frac{j}{\ell_2}, & v = v_{k,j}, j = 1, \dots, \ell_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

内部调和性与边界条件验证完全类似左腿情形（仅替换 $\ell_1 \rightarrow \ell_2$ ），唯一非零边界点 $b^* = v_{k, \ell_2}$ 满足

$$\xi_m(b^*) = 1, \quad \xi_m(w_{b^*}) = \frac{\ell_2 - 1}{\ell_2}, \quad \xi_m(b^*) - \xi_m(w_{b^*}) = \frac{1}{\ell_2},$$

其余边界点 $\xi_m = 0$ ，故 $\sigma_m = \frac{1}{\ell_2}$ 。

上述 $p_1 + p_2$ 个函数在 $\partial\Omega$ 上的内积 $\langle u, v \rangle_\partial = \sum_{b \in \partial\Omega} u(b)v(b)$ 两两正交（常数函数与局部模式正交，不同腿的局部模式支撑不交，耦合模式与局部模式在对方支撑上为零），故线性无关，充满 Steklov 空间。退化情形 $p_1 = 0, 1$ 或 $p_2 = 0, 1$ 下相应模式重数为零，特征值自动缺失，与引理一致。

2.2.2 Extra Special 图

Lemma 2.4. *Let $p \geq 1$ and $b \geq 3$ be integers. Let T be the extra special graph $ES_{b;p}$. Then $\sigma_1(T) = 0$, $\sigma_2(T) = \sigma_{ES}^-(b; p)$, $\sigma_3(T) = \sigma_{ES}^+(b; p)$, and $\sigma_4(T) = \dots = \sigma_b(T) = \frac{1}{p}$, where*

$$\sigma_{ES}^\pm(b; p) = \frac{2bp + 3b - 3 \pm \sqrt{b^2 - 2b + 9}}{2(bp^2 + 3bp - 3p + 2b - 4)}. \quad (28)$$

If $b = 3$, then the eigenvalue $\frac{1}{p}$ is missing.

Proof. We give the Steklov eigenfunctions directly. Define $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_{ES}^-(b; p)$, $\sigma_3 = \sigma_{ES}^+(b; p)$, and $\sigma_4 = \dots = \sigma_b = \frac{1}{p}$. Define

$$\xi_1(v) = 1, \quad \forall v \in V; \quad (29)$$

$$\xi_m(v) = \begin{cases} f_1(1 - (p + 2 - j)\sigma_m), & v = v_{1,j}, 1 \leq j \leq p + 2, \\ f_2(1 - (p + 1 - j)\sigma_m), & v = v_{2,j}, 1 \leq j \leq p + 1, \\ 1 - (p - j)\sigma_m, & v = v_{i,j}, 3 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq p, \\ 1 - p\sigma_m, & v = v_0, \end{cases} \quad (30)$$

where

$$f_1 = 1 - 2b - bp + (bp^2 + 3bp - 3p + 2b - 4)\sigma_m, \quad (31)$$

$$f_2 = 1 + b + bp + (bp^2 + 3bp - 3p + 2b - 4)\sigma_m, \quad (32)$$

for $m = 2, 3$;

$$\xi_m(v) = \begin{cases} 1 - \frac{p-j}{p}, & v = v_{m-1,j}, 1 \leq j \leq p, \\ -(1 - \frac{p-j}{p}), & v = v_{m,j}, 1 \leq j \leq p, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (33)$$

for $m = 4, 5, \dots, b$. Then ξ_j is a Steklov eigenfunction corresponding to Steklov eigenvalue σ_j for $j = 1, 2, \dots, b$. \square

注 2.2. 这一共是三个部分，还有什么好说的，代入验证呗！（这个构造至今为止我还是不知道他怎么想出来的，确实是难以置信）

我们对 $ES_{b;p}$ 的 Steklov 特征值进行显式构造并逐点验证。给定 $p \geq 1, b \geq 3$, 图 $T = Sp_{1,1,b-2;p+2,p+1,p}$, 顶点集为中心 v_0 , 超长腿 $v_{1,1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{1,p+2}$, 长腿 $v_{2,1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{2,p+1}$, 短腿 $v_{i,1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{i,p}$ ($i = 3, \dots, b$)。边界集 $\partial\Omega = \{v_{1,p+2}, v_{2,p+1}, v_{3,p}, \dots, v_{b,p}\}$, 每个 b 的唯一内部邻居 w_b 分别为 $v_{1,p+1}, v_{2,p}, v_{i,p-1}$ ($i \geq 3$)。

记 $A = bp^2 + 3bp - 3p + 2b - 4$, $c_1 = 1 - 2b - bp$, $c_2 = 1 + b + bp$, 则 $f_1 = c_1 + A\sigma$, $f_2 = c_2 + A\sigma$ 。构造 b 个特征函数 ξ_j ($j = 1, \dots, b$) 如下。

(1) **常数函数** ξ_1 , **对应** $\sigma_1 = 0$ 。定义 $\xi_1(v) = 1$ 对所有 $v \in V$ 。对任意内部顶点 $v \notin \partial\Omega$, 其所有邻居 $w \sim v$ 满足 $\xi_1(w) = 1$, 故

$$\Delta\xi_1(v) = \sum_{w \sim v} (1 - 1) = 0.$$

对任意边界点 $b \in \partial\Omega$, 其唯一内部邻居 w_b 满足 $\xi_1(w_b) = 1$, $\xi_1(b) = 1$, 故

$$\xi_1(b) - \xi_1(w_b) = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot \xi_1(b).$$

因此 ξ_1 是 $\sigma_1 = 0$ 的 Steklov 特征函数。

(2) **耦合部分** ξ_m , $m = 2, 3$, **对应** $\sigma_m = \sigma_{ES}^\pm(b;p)$ 。对 $m = 2, 3$, 令 $\sigma = \sigma_m$, 定义

$$\xi_m(v) = \begin{cases} f_1(1 - (p+2-j)\sigma), & v = v_{1,j}, 1 \leq j \leq p+2, \\ f_2(1 - (p+1-j)\sigma), & v = v_{2,j}, 1 \leq j \leq p+1, \\ 1 - (p-j)\sigma, & v = v_{i,j}, 3 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq p, \\ 1 - p\sigma, & v = v_0. \end{cases}$$

首先验证除中心外的内部调和性。对超长腿内部点 $v_{1,j}$ ($1 < j < p+2$),

$$\xi_m(v_{1,j}) = f_1[1 - (p+2-j)\sigma] = f_1 - f_1(p+2-j)\sigma.$$

令 $g(j) = 1 - (p+2-j)\sigma = 1 - (p+2)\sigma + j\sigma$, 则

$$\xi_m(v_{1,j-1}) = f_1[1 - (p+3-j)\sigma] = f_1 - f_1(p+3-j)\sigma,$$

$$\xi_m(v_{1,j+1}) = f_1[1 - (p+1-j)\sigma] = f_1 - f_1(p+1-j)\sigma,$$

$$2\xi_m(v_{1,j}) = 2f_1 - 2f_1(p+2-j)\sigma.$$

故

$$\Delta\xi_m(v_{1,j}) = f_1[g(j-1) + g(j+1) - 2g(j)] = f_1 \cdot 0 = 0.$$

对长腿内部点 $v_{2,j}$ ($1 < j < p+1$), 令 $h(j) = 1 - (p+1-j)\sigma = 1 - (p+1)\sigma + j\sigma$, 同理 $\Delta\xi_m(v_{2,j}) = 0$ 。

对短腿内部点 $v_{i,j}$ ($3 \leq i \leq b, 1 < j < p$),

$$\xi_m(v_{i,j}) = 1 - (p-j)\sigma = 1 - p\sigma + j\sigma,$$

$$\xi_m(v_{i,j-1}) = 1 - p\sigma + (j-1)\sigma, \quad \xi_m(v_{i,j+1}) = 1 - p\sigma + (j+1)\sigma,$$

$$\Delta\xi_m(v_{i,j}) = [(1 - p\sigma + (j-1)\sigma) + (1 - p\sigma + (j+1)\sigma)] - 2(1 - p\sigma + j\sigma) = 0.$$

对靠近中心的点如 $v_{1,1}$, 邻居为 v_0 与 $v_{1,2}$,

$$\xi_m(v_{1,1}) = f_1(1 - (p+1)\sigma), \quad \xi_m(v_{1,2}) = f_1(1 - p\sigma), \quad \xi_m(v_0) = 1 - p\sigma.$$

因 f_1 为常数，整条腿为仿射函数，二阶差分为零，故 $\Delta\xi_m(v_{1,1}) = 0$ 。长腿与短腿靠近中心点同理。除中心外内部调和性成立。

其次验证中心 v_0 的调和性。中心邻居为 $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{i,1}$ ($i = 3, \dots, b$),

$$\xi_m(v_{1,1}) = f_1(1 - (p+1)\sigma), \quad \xi_m(v_{2,1}) = f_2(1 - p\sigma), \quad \xi_m(v_{i,1}) = 1 - (p-1)\sigma.$$

中心值 $\xi_m(v_0) = 1 - p\sigma$ ，故

$$\Delta\xi_m(v_0) = f_1(1 - (p+1)\sigma) + f_2(1 - p\sigma) + \sum_{i=3}^b [1 - (p-1)\sigma] - b(1 - p\sigma) = 0.$$

展开：

$$f_1 - f_1(p+1)\sigma + f_2 - f_2p\sigma + (b-2) - (b-2)(p-1)\sigma - b + bp\sigma = 0.$$

常数项：

$$f_1 + f_2 + (b-2) - b = f_1 + f_2 - 2.$$

σ 项：

$$-f_1(p+1) - f_2p - (b-2)(p-1) + bp.$$

代入 $f_1 = c_1 + A\sigma$, $f_2 = c_2 + A\sigma$ ，常数项变为

$$(c_1 + A\sigma) + (c_2 + A\sigma) - 2 = c_1 + c_2 + 2A\sigma - 2.$$

计算 $c_1 + c_2 - 2 = (1 - 2b - bp) + (1 + b + bp) - 2 = 2 - b - 2 = -b$ ，故常数项为 $-b + 2A\sigma$ 。 σ 项：

$$\begin{aligned} & -(c_1 + A\sigma)(p+1) - (c_2 + A\sigma)p - (b-2)(p-1) + bp \\ &= -c_1(p+1) - A(p+1)\sigma - c_2p - Ap\sigma - (b-2)(p-1) + bp. \end{aligned}$$

σ^2 项：

$$-A(p+1)\sigma - Ap\sigma = -A(2p+1)\sigma.$$

常数部分：

$$-c_1(p+1) - c_2p - (b-2)(p-1) + bp.$$

计算 $-c_1(p+1) = -(1 - 2b - bp)(p+1) = -(p+1) + 2b(p+1) + bp(p+1)$,

$$= -(p+1) + 2bp + 2b + bp^2 + bp,$$

$-c_2p = -(1 + b + bp)p = -(p + bp + bp^2) = -p - bp - bp^2$, $-(b-2)(p-1) = -(bp - b - 2p + 2) = -bp + b + 2p - 2$, $+bp = bp$ 。合并常数：

$$\begin{aligned} & -(p+1) + 2bp + 2b + bp^2 + bp - p - bp - bp^2 - bp + b + 2p - 2 + bp \\ &= -(p+1) - p + 2b + 2p - 2 + (2bp + bp - bp - bp + bp) + bp^2 - bp^2 \\ &= -p - 1 - p + 2b + 2p - 2 + 2bp + 0 = 1. \end{aligned}$$

σ 部分 (不含 $A\sigma$):

$$-c_1(p+1) - c_2p - (b-2)(p-1) + bp = 1.$$

故总方程为

$$-b + 2A\sigma - A(2p+1)\sigma - (2bp + 3b - 3)\sigma + 1 = 0,$$

注 2.3. 我放弃了。。这个我怎么算都算不出来，都得不到最后应该的方程：

$$A\sigma^2 - (2bp + 3b - 3)\sigma + 1 = 0.$$

不知道哪里错了。。。

(3) 剩余部分 ξ_m , $m = 4, \dots, b$, 对应 $\sigma_m = \frac{1}{p}$ 。对 $m = 4, \dots, b$, 令 $i = m - 1 \in \{3, \dots, b\}$ (若 $i = b$ 则 $i + 1 = 3$)，定义

$$\xi_m(v) = \begin{cases} \frac{j}{p}, & v = v_{i,j}, 1 \leq j \leq p, \\ -\frac{j}{p}, & v = v_{i+1,j}, 1 \leq j \leq p, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

1. 内部条件验证情形 1: 第 i 条短腿内部点 $v_{i,j}$, $1 < j < p$

$$\xi_m(v_{i,j}) = \frac{j}{p}, \quad \xi_m(v_{i,j-1}) = \frac{j-1}{p}, \quad \xi_m(v_{i,j+1}) = \frac{j+1}{p}.$$

邻居仅为 $v_{i,j-1}$ 和 $v_{i,j+1}$, 故

$$\Delta\xi_m(v_{i,j}) = \left(\frac{j-1}{p} + \frac{j+1}{p} \right) - 2 \cdot \frac{j}{p} = \frac{2j}{p} - \frac{2j}{p} = 0.$$

情形 2: 第 $i+1$ 条短腿内部点 $v_{i+1,j}$, $1 < j < p$

$$\xi_m(v_{i+1,j}) = -\frac{j}{p}, \quad \xi_m(v_{i+1,j-1}) = -\frac{j-1}{p}, \quad \xi_m(v_{i+1,j+1}) = -\frac{j+1}{p}.$$

$$\Delta\xi_m(v_{i+1,j}) = \left(-\frac{j-1}{p} - \frac{j+1}{p} \right) - 2 \cdot \left(-\frac{j}{p} \right) = -\frac{2j}{p} + \frac{2j}{p} = 0.$$

情形 3: 靠近中心的点 $v_{i,1}$ 和 $v_{i+1,1}$ 对 $v_{i,1}$, 邻居为 v_0 和 $v_{i,2}$:

$$\xi_m(v_{i,1}) = \frac{1}{p}, \quad \xi_m(v_{i,2}) = \frac{2}{p}, \quad \xi_m(v_0) = 0.$$

$$\Delta\xi_m(v_{i,1}) = 0 + \frac{2}{p} - 2 \cdot \frac{1}{p} = 0.$$

对 $v_{i+1,1}$, 邻居为 v_0 和 $v_{i+1,2}$:

$$\xi_m(v_{i+1,1}) = -\frac{1}{p}, \quad \xi_m(v_{i+1,2}) = -\frac{2}{p}, \quad \xi_m(v_0) = 0.$$

$$\Delta\xi_m(v_{i+1,1}) = 0 + \left(-\frac{2}{p} \right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{p} \right) = 0.$$

情形 4: 中心 v_0 中心邻居共 b 个: $-v_{i,1}$: 贡献 $\frac{1}{p}$ - $v_{i+1,1}$: 贡献 $-\frac{1}{p}$ - 其余 $b-2$ 个邻居 (包括超长腿、长腿、其他短腿): $\xi_m = 0$

$$\Delta\xi_m(v_0) = \frac{1}{p} + \left(-\frac{1}{p} \right) + \sum_{\text{其余}} 0 - b \cdot 0 = 0.$$

情形 5: 其他所有顶点超长腿、长腿、其他短腿: $\xi_m(v) = 0$, 邻居亦为 0, $\Delta\xi_m(v) = 0$ 。

综上: 所有内部顶点满足 $\Delta\xi_m(v) = 0$ 。

2. 边界条件验证

情形 A: 支撑边界点 $b^* = v_{i,p}$ (第 i 条短腿叶节点)

$$\xi_m(b^*) = \frac{p}{p} = 1, \quad w_{b^*} = v_{i,p-1}, \quad \xi_m(w_{b^*}) = \frac{p-1}{p}.$$

$$\xi_m(b^*) - \xi_m(w_{b^*}) = 1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \cdot 1.$$

情形 B: 支撑边界点 $b^{**} = v_{i+1,p}$ (第 $i+1$ 条短腿叶节点)

$$\xi_m(b^{**}) = -\frac{p}{p} = -1, \quad w_{b^{**}} = v_{i+1,p-1}, \quad \xi_m(w_{b^{**}}) = -\frac{p-1}{p}.$$

$$\xi_m(b^{**}) - \xi_m(w_{b^{**}}) = -1 - \left(-\frac{p-1}{p}\right) = -1 + \frac{p-1}{p} = -\frac{1}{p} = \frac{1}{p} \cdot (-1).$$

情形 C: 非支撑边界点 (共 $b-2$ 个) $v_{1,p+2}$, $v_{2,p+1}$ 和 $v_{k,p}$ ($k \notin \{i, i+1\}$)

对任意此类 b , $\xi_m(b) = 0$, 其内部邻居 w_b 也在非支撑区域, $\xi_m(w_b) = 0$, 故

$$\xi_m(b) - \xi_m(w_b) = 0 - 0 = 0 = \sigma \cdot 0$$

对任意 σ 成立。

综上: 所有 b 个边界点均满足

$$\xi_m(b) - \xi_m(w_b) = \frac{1}{p} \cdot \xi_m(b).$$

因此 $\sigma_m = \frac{1}{p}$ 。

2.2.3 Crab 图

Lemma 2.5. *Let $b_1, b_2, r \geq 1$ be integers. Let $T = (V, E)$ be the crab graph $CG(b_1, b_2, r)$ with leaves as boundary B . Then the Steklov eigenvalues of T are $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \frac{b_1+b_2}{b_1 b_2 + r(b_1+b_2)}$, and $\sigma_3 = \dots = \sigma_{b_1+b_2} = 1/r$.*

注 2.4. 这个证明有现成的参考文献, 真不错。没事了, 给的也是构造性证明。。。。

Proof. We give the Steklov eigenfunctions directly. Define $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \frac{b_1+b_2}{b_1 b_2 + r(b_1+b_2)}$, and $\sigma_3 = \dots = \sigma_{b_1+b_2} = 1/r$. Define

$$\xi_1(v) = 1, \quad \forall v \in V; \tag{34}$$

$$\xi_2(v) = \begin{cases} b_2(1 - r\sigma_2), & v = u_0, \\ -b_1(1 - r\sigma_2), & v = v_0, \\ b_2(1 - (r-i)\sigma_2), & v = u_{\ell,i}, 1 \leq \ell \leq b_1, 1 \leq i \leq r, \\ -b_1(1 - (r-i)\sigma_2), & v = v_{\ell,i}, 1 \leq \ell \leq b_2, 1 \leq i \leq r; \end{cases} \tag{35}$$

$$\xi_m(v) = \begin{cases} 1 - (r-i)\sigma_m, & v = u_{m-2,i}, 1 \leq i \leq r, \\ -1 + (r-i)\sigma_m, & v = u_{m-1,i}, 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases} \tag{36}$$

for $m = 3, 4, \dots, b_1 + 1$, and

$$\xi_m(v) = \begin{cases} 1 - (r - i)\sigma_m, & v = v_{m-b_1-1,i}, 1 \leq i \leq r, \\ -1 + (r - i)\sigma_m, & v = v_{m-b_1,i}, 1 \leq i \leq r, \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (37)$$

for $m = b_1 + 2, b_1 + 3, \dots, b_1 + b_2$. Then ξ_j is a Steklov eigenfunction corresponding to Steklov eigenvalue σ_j for $j = 1, 2, \dots, b$. \square

注 2.5. 验证过程与 *Spider* 图的类似, 分成四部分。

我们对 Crab 图 $CG(b_1, b_2, r)$ 的 Steklov 特征值进行显式构造并逐点验证。给定整数 $b_1, b_2, r \geq 1$, 图 $T = (V, E)$ 由左蜘蛛图 $Sp_{b_1, r}$ (中心 u_0 , b_1 条长度 r 的腿 $u_{\ell,1} \rightarrow \dots \rightarrow u_{\ell,r}$, $\ell = 1, \dots, b_1$)、右蜘蛛图 $Sp_{b_2, r}$ (中心 v_0 , b_2 条长度 r 的腿 $v_{\ell,1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{\ell,r}$, $\ell = 1, \dots, b_2$) 以及中心连边 $u_0 - v_0$ 粘合而成。边界集 $B = \{u_{\ell,r} : \ell = 1, \dots, b_1\} \cup \{v_{\ell,r} : \ell = 1, \dots, b_2\}$, 共 $b_1 + b_2$ 个, 每个 b 的唯一内部邻居 w_b 分别为 $u_{\ell,r-1}$ 或 $v_{\ell,r-1}$ 。

记 $\alpha = \frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2 + r(b_1 + b_2)}$ 。构造 $b_1 + b_2$ 个特征函数 ξ_j ($j = 1, \dots, b_1 + b_2$) 如下。

(1) **常数函数** ξ_1 , **对应** $\sigma_1 = 0$ 。定义 $\xi_1(v) = 1$ 对所有 $v \in V$ 。对任意内部顶点 $v \notin B$, 其所有邻居 $w \sim v$ 满足 $\xi_1(w) = 1$, 故

$$\Delta \xi_1(v) = \sum_{w \sim v} (1 - 1) = 0.$$

对任意边界点 $b \in B$, 其唯一内部邻居 w_b 满足 $\xi_1(w_b) = 1$, $\xi_1(b) = 1$, 故

$$\xi_1(b) - \xi_1(w_b) = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot \xi_1(b).$$

因此 ξ_1 是 $\sigma_1 = 0$ 的 Steklov 特征函数。

(2) **耦合情况** ξ_2 , **对应** $\sigma_2 = \alpha$ 。定义

$$\xi_2(v) = \begin{cases} b_2(1 - r\alpha), & v = u_0, \\ -b_1(1 - r\alpha), & v = v_0, \\ b_2(1 - (r - i)\alpha), & v = u_{\ell,i}, 1 \leq \ell \leq b_1, 1 \leq i \leq r, \\ -b_1(1 - (r - i)\alpha), & v = v_{\ell,i}, 1 \leq \ell \leq b_2, 1 \leq i \leq r. \end{cases}$$

首先验证除 u_0, v_0 外的内部调和性。对左腿内部点 $u_{\ell,i}$ ($1 < i < r$),

$$\xi_2(u_{\ell,i}) = b_2[1 - (r - i)\alpha] = b_2 - b_2(r - i)\alpha.$$

令 $g(i) = 1 - (r - i)\alpha = 1 - r\alpha + i\alpha$, 则

$$\xi_2(u_{\ell,i-1}) = b_2[1 - (r - i + 1)\alpha], \quad \xi_2(u_{\ell,i+1}) = b_2[1 - (r - i - 1)\alpha],$$

$$2\xi_2(u_{\ell,i}) = 2b_2[1 - (r - i)\alpha].$$

故

$$\Delta \xi_2(u_{\ell,i}) = b_2[g(i - 1) + g(i + 1) - 2g(i)] = b_2 \cdot 0 = 0.$$

对右腿内部点 $v_{\ell,i}$ ($1 < i < r$), 令 $h(i) = 1 - (r - i)\alpha$, 同理 $\Delta \xi_2(v_{\ell,i}) = 0$ 。对靠近中心的点如 $u_{\ell,1}$, 邻居为 u_0 与 $u_{\ell,2}$,

$$\xi_2(u_{\ell,1}) = b_2(1 - (r - 1)\alpha), \quad \xi_2(u_{\ell,2}) = b_2(1 - (r - 2)\alpha), \quad \xi_2(u_0) = b_2(1 - r\alpha).$$

因 b_2 为常数，整条腿为关于 i 的仿射函数，二阶差分为零，故 $\Delta\xi_2(u_{\ell,1}) = 0$ 。右腿靠近中心点同理。除 u_0, v_0 外内部调和性成立。

其次验证中心 u_0 的调和性。邻居为 v_0 与 $u_{\ell,1}$ ($\ell = 1, \dots, b_1$),

$$\xi_2(v_0) = -b_1(1 - r\alpha), \quad \xi_2(u_{\ell,1}) = b_2(1 - (r-1)\alpha) = b_2(1 - r\alpha + \alpha).$$

中心值 $\xi_2(u_0) = b_2(1 - r\alpha)$, 故

$$\Delta\xi_2(u_0) = \xi_2(v_0) + \sum_{\ell=1}^{b_1} \xi_2(u_{\ell,1}) - (b_1 + 1)\xi_2(u_0) = 0.$$

代入:

$$-b_1(1 - r\alpha) + b_1b_2(1 - r\alpha + \alpha) - (b_1 + 1)b_2(1 - r\alpha) = 0.$$

展开:

$$-b_1 + b_1r\alpha + b_1b_2 - b_1b_2r\alpha + b_1b_2\alpha - b_2(b_1 + 1) + b_2(b_1 + 1)r\alpha = 0.$$

常数项:

$$-b_1 + b_1b_2 - b_2(b_1 + 1) = -b_1 + b_1b_2 - b_1b_2 - b_2 = -b_1 - b_2.$$

α 项:

$$b_1r + b_1b_2 - b_1b_2r + b_2(b_1 + 1)r = b_1r + b_1b_2 + b_2r + b_2r - b_1b_2r.$$

合并:

$$b_1r + b_2r + (b_1b_2 - b_1b_2r) = b_1r + b_2r.$$

方程为

$$-(b_1 + b_2) + (b_1 + b_2)r\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{b_1 + b_2}{r(b_1 + b_2)}.$$

但需与 v_0 调和性联合。验证中心 v_0 的调和性。邻居为 u_0 与 $v_{\ell,1}$ ($\ell = 1, \dots, b_2$),

$$\xi_2(u_0) = b_2(1 - r\alpha), \quad \xi_2(v_{\ell,1}) = -b_1(1 - (r-1)\alpha) = -b_1(1 - r\alpha + \alpha).$$

中心值 $\xi_2(v_0) = -b_1(1 - r\alpha)$, 故

$$\Delta\xi_2(v_0) = \xi_2(u_0) + \sum_{\ell=1}^{b_2} \xi_2(v_{\ell,1}) - (b_2 + 1)\xi_2(v_0) = 0.$$

代入:

$$b_2(1 - r\alpha) + b_2[-b_1(1 - r\alpha + \alpha)] - (b_2 + 1)[-b_1(1 - r\alpha)] = 0.$$

展开:

$$b_2 - b_2r\alpha - b_1b_2 + b_1b_2r\alpha - b_1b_2\alpha + b_1(b_2 + 1) - b_1(b_2 + 1)r\alpha = 0.$$

常数项:

$$b_2 - b_1b_2 + b_1(b_2 + 1) = b_2 - b_1b_2 + b_1b_2 + b_1 = b_1 + b_2.$$

α 项:

$$-b_2r + b_1b_2r - b_1b_2 - b_1(b_2 + 1)r = -b_2r + b_1b_2r - b_1b_2 - b_1b_2r - b_1r.$$

合并:

$$-b_1b_2 - (b_1 + b_2)r.$$

方程为

$$(b_1 + b_2) + [-b_1 b_2 - r(b_1 + b_2)]\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2 + r(b_1 + b_2)}.$$

与引理一致。

最后验证边界条件。对 $b = u_{\ell, r}$,

$$\xi_2(b) = b_2(1 - 0 \cdot \alpha) = b_2, \quad \xi_2(w_b) = b_2(1 - \alpha), \quad \xi_2(b) - \xi_2(w_b) = b_2\alpha = \alpha \cdot b_2.$$

对 $b = v_{\ell, r}$,

$$\xi_2(b) = -b_1, \quad \xi_2(w_b) = -b_1(1 - \alpha), \quad \xi_2(b) - \xi_2(w_b) = -b_1\alpha = \alpha \cdot (-b_1).$$

所有 $b_1 + b_2$ 个边界点满足边界条件, 故 $\sigma_2 = \alpha$ 。

(3) **左局部** ξ_m , $m = 3, \dots, b_1 + 1$, 对应 $\sigma_m = 1/r$ 。对 $m = 3, \dots, b_1 + 1$, 令 $k = m - 2 \in \{1, \dots, b_1\}$, 定义

$$\xi_m(v) = \begin{cases} \frac{i}{r}, & v = u_{k,i}, 1 \leq i \leq r, \\ -\frac{i}{r}, & v = u_{k+1,i}, 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对 $u_{k,i}$ ($1 < i < r$), $\xi_m = i/r$, 邻居 $(i-1)/r$, $(i+1)/r$, $\Delta\xi_m = 0$ 。对 $u_{k+1,i}$ ($1 < i < r$), $\xi_m = -i/r$, 邻居 $-(i-1)/r$, $-(i+1)/r$, $\Delta\xi_m = 0$ 。对中心 u_0 , 邻居 $u_{k,1}$ 与 $u_{k+1,1}$ 贡献 $1/r$ 与 $-1/r$, 其余 0, 总和抵消, $\Delta\xi_m(u_0) = 0$ 。对 v_0 及右腿顶点 $\xi_m = 0$, 邻居亦为 0, $\Delta\xi_m = 0$ 。内部调和性成立。

边界条件: 对 $b = u_{k,r}$,

$$\xi_m(b) = 1, \quad \xi_m(w_b) = \frac{r-1}{r}, \quad \xi_m(b) - \xi_m(w_b) = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot 1.$$

对 $b = u_{k+1,r}$,

$$\xi_m(b) = -1, \quad \xi_m(w_b) = -\frac{r-1}{r}, \quad \xi_m(b) - \xi_m(w_b) = -\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot (-1).$$

对其他 b , $\xi_m(b) = \xi_m(w_b) = 0$, $0 - 0 = \sigma \cdot 0$ 成立。所有 $b_1 + b_2$ 个边界点满足, 故 $\sigma_m = 1/r$ 。

(4) **右局部** ξ_m , $m = b_1 + 2, \dots, b_1 + b_2$, 对应 $\sigma_m = 1/r$ 。对 $m = b_1 + 2, \dots, b_1 + b_2$, 令 $k = m - b_1 - 1 \in \{1, \dots, b_2\}$, 定义

$$\xi_m(v) = \begin{cases} \frac{i}{r}, & v = v_{k,i}, 1 \leq i \leq r, \\ -\frac{i}{r}, & v = v_{k+1,i}, 1 \leq i \leq r, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

验证同 (3), 共 $b_2 - 1$ 个, $\sigma_m = 1/r$ 。

上述 $b_1 + b_2$ 个函数在 B 上内积两两正交 (ξ_1 与局部模式正交, ξ_2 全局支撑且左右反号, 局部模式支撑成对反号), 故线性无关, 充满 Steklov 空间。若 $b_1 = 1$ 或 $b_2 = 1$, 对应局部模式消失, $1/r$ 重数减少, 与引理一致。

2.3 一些可以直接求特征值的特殊图

2.3.1 星图 S_n

离散 Steklov 特征值问题为

$$\begin{cases} \Delta u(c) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(v_i) = \sigma u(v_i), \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

其中

$$\Delta u(c) = \sum_{i=1}^n (u(c) - u(v_i)), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(v_i) = u(c) - u(v_i).$$

由内点方程 $\Delta u(c) = 0$ 得

$$nu(c) - \sum_{i=1}^n u(v_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(v_i).$$

Steklov 特征值由 Rayleigh 商给出:

$$\sigma_k = \min \frac{\sum_{(x,y) \in E} (u(x) - u(y))^2}{\sum_{v \in \partial\Omega} u(v)^2},$$

最小化空间为 $u \perp \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ (在边界上)。对 S_n ,

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^n (u(c) - u(v_i))^2, \quad \|u\|_{\partial\Omega}^2 = \sum_{i=1}^n u(v_i)^2.$$

常值函数 $u \equiv 1$ 给出 $\sigma_1 = 0$ 。对于 σ_2 , 特征函数 u 在边界上与常函数正交, 即

$$\sum_{i=1}^n u(v_i) = 0.$$

代入内点方程得 $u(c) = 0$ 。此时

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^n (0 - u(v_i))^2 = \sum_{i=1}^n u(v_i)^2 = \|u\|_{\partial\Omega}^2.$$

因此, 对任意满足 $\sum u(v_i) = 0$ 的非零 u ,

$$\frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|_{\partial\Omega}^2} = 1.$$

这给出下界 $\sigma_2 \geq 1$ 。

另一方面, 我们设 n 偶, $u(v_i) = 1$ (前 $n/2$ 个), $u(v_i) = -1$ (后 $n/2$ 个), $u(c) = 0$ 。则

$$\|\nabla u\|^2 = \frac{n}{2} \cdot 1 + \frac{n}{2} \cdot 1 = n, \quad \|u\|_{\partial\Omega}^2 = n,$$

故 $\sigma_2 \leq 1$ 。

注 2.6. 由 Steklov 特征值的 Rayleigh 商定义, 特征值实际上是高个中挑矮个, 就是具体意思就是如果你有一堆石头, 你在石头中找到一块 $1kg$ 的, 那么石头中最轻的那块肯定要小于等于 $1kg$ 。

上下界相等, 故

$$\sigma_2(S_n) = 1$$

实际上更进一步的有重数为 $n - 1$ 。

2.3.2 路 P_n

$$\sigma_1(P_n) = 0, \quad \sigma_2(P_n) = \frac{2}{n-1}$$

2.4 匹配数引理

Lemma 2.6. 设 $b \geq 3$ 和 $t \geq 1$ 为整数。设 T 为一棵具有 b 个叶子且直径至多为 $4t$ 的树。则 T 的匹配数至多为 bt 。

证明. 不失一般性, 可假设该树的直径恰为 $4t$ (若直径小于 $4t$, 则结论更强)。取一条长度为 $4t$ 的直径路径

$$P: v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_{4t},$$

其中 v_0 与 v_{4t} 为叶子。

1. 路径 P 的贡献

路径 P 本身至多为最大匹配贡献 $\lfloor \frac{4t}{2} \rfloor = 2t$ 条边。

2. 剩余叶子的距离

树中共有 b 个叶子, v_0, v_{4t} 已计入 P , 故剩余 $b-2$ 个叶子。对任意剩余叶子 $u \notin P$, 其到 P 的距离

$$d_T(u, P) = \min_{w \in P} d_T(u, w) \leq 2t.$$

这是由于直径 $\leq 4t$, 故 $d_T(u, v_0) \leq 4t$ 与 $d_T(u, v_{4t}) \leq 4t$ 。记 $d_T(u, P) = d_T(u, w)$, 则

$$d_T(u, w) \leq \min\{d_P(w, v_0), d_P(w, v_{4t})\} \leq 2t,$$

3. 每条挂枝的贡献

从 u 到其入口点 w 的唯一路径长度 $\leq 2t$ 。该路径上至多有 $\lfloor \frac{2t}{2} \rfloor = t$ 条匹配边 (即使与 P 交互, 净增边数仍 $\leq t$)。

综上: 所有 $b-2$ 条挂枝在 P 之外互不相交 (树无环), 因此这些挂枝总共贡献的匹配边 $\leq (b-2) \cdot t$ 。
故: 最大匹配的边数为 $\leq 2t + (b-2)t = bt$. □

Lemma 2.7. 设整数 $b \geq 2, t \geq 1$ 。设 T 是一棵直径为 $4t+1$ 、有 b 个叶子、且最大匹配数为 $bt+1$ 的树。则 T 必为 Crab 图 $CG_{b_1, b-b_1; 2t}$, 其中 $b_1 = 1, 2, \dots, b-1$ 。

证明. 考虑一条长度为 $4t+1$ 的直径路径 P 。它至多贡献 $2t+1$ 条匹配边。其余 $b-2$ 个叶子到 P 的距离至多 $2t$, 每条挂枝至多贡献 t 条边。故总匹配数

$$\leq 2t+1 + (b-2)t = bt+1.$$

现已知匹配数为 $bt+1$, 故等号成立, 当且仅当:

1. P 贡献恰 $2t+1$ 条边;
2. 每个挂枝贡献恰 t 条边。

后者要求每条挂枝长度 **恰为** $2t$ 并被完美匹配, 前者要求 P 上有 $2t+1$ 条边被选中。由于 P 有 $4t+2$ 个顶点, 完美匹配需覆盖全部顶点。

由于 P 被完美匹配, 所有顶点饱和。若挂枝连在非端点, 则其入口点已被匹配, 无法扩展, 除非替换边。但为保持 P 贡献 $2t+1$, 替换不可减少边数。

唯一可能: 挂枝连在 P 的中间两点 v_{2t}, v_{2t+1} 。此时:

1. v_{2t}, v_{2t+1} 分别为两个 spider 的中心;

2. 所有挂枝长度为 $2t$, 共 b 条, 分为 b_1 条和 $b - b_1$ 条;

3. 中间边 $v_{2t} - v_{2t+1}$ 被匹配;

4. 总匹配: $b_1 t + (b - b_1)t + 1 = bt + 1$ 。

故 T 为 Crab 图 $CG_{b_1, b-b_1; 2t}$, 其中 $1 \leq b_1 \leq b - 1$ 。 □

Lemma 2.8. 设整数 $b \geq 3$, $t \geq 0$ 。设 T 是一棵有 b 个叶子、直径至多为 $4t + 3$ 的树, 则 T 的最大匹配数 $\leq bt + 2$ 。

证明. 不失一般性, 假设直径为 $4t + 3$ 。取直径路径

$$P: v_0 - v_1 - \cdots - v_{4t+3}.$$

其至多贡献 $2t + 2$ 条匹配边, 我们按其贡献边数分情况讨论。

1. P 贡献 $2t + 2$ 条边 (完美匹配)。

则 P 上所有顶点饱和, 其余 $b - 2$ 个叶子到 P 距离 $\leq 2t + 1$, 但入口点已饱和, 故每条挂枝至多贡献 t 条边。总匹配 $\leq 2t + 2 + (b - 2)t = bt + 2$ 。

2. P 不含边 $v_{2t}v_{2t+1}$ 、 $v_{2t+1}v_{2t+2}$, 但含 $v_{2t+2}v_{2t+3}$ 。

则 P 贡献 $\leq 2t + 1$ 条, v_{2t+1} 未饱和。设 b_1 个叶子通过 v_{2t+1} 连接, 贡献 $\leq b_1 t + 1$; 其余叶子入口点饱和, 贡献 $\leq t$ 条。总匹配 $\leq 2t + 1 + b_1 t + 1 + (b - 2 - b_1)t = bt + 2$ 。

3. 对称, 缺 $v_{2t+1}v_{2t+2}$ 、 $v_{2t+2}v_{2t+3}$, 但含 $v_{2t}v_{2t+1}$, 同上得 $bt + 2$ 。

4. P 不含三条中间边 $v_{2t}v_{2t+1}$, $v_{2t+1}v_{2t+2}$, $v_{2t+2}v_{2t+3}$ 。

则 P 贡献 $\leq 2t$ 条, v_{2t+1} 、 v_{2t+2} 均未饱和。设 b_1, b_2 个叶子分别通过这两点连接, 贡献 $\leq b_1 t + 1 + b_2 t + 1$; 其余贡献 $\leq t$ 条。总匹配 $\leq 2t + b_1 t + 1 + b_2 t + 1 + (b - 2 - b_1 - b_2)t = bt + 2$ 。

综上, 匹配数 $\leq bt + 2$ 。 □

Lemma 2.9. 设整数 $b \geq 3$, $t \geq 1$ 。设 T 是一棵有 b 个叶子、直径至多为 $4t + 2$ 的树。则 T 的最大匹配数 $\leq bt + 1$ 。

证明. 不失一般性, 假设直径为 $4t + 2$ 。取直径路径

$$P: v_0 - v_1 - \cdots - v_{4t+2}.$$

其至多贡献 $2t + 1$ 条匹配边。分两种情况讨论。

1. 最大匹配包含 $v_{2t}v_{2t+1}$ 或 $v_{2t+1}v_{2t+2}$ 中的一条。

不妨设包含 $v_{2t}v_{2t+1}$, 则 v_{2t+1} 已饱和, P 贡献 $\leq 2t + 1$ 条。设 b_1 个叶子通过 v_{2t+1} 连接, 因入口点饱和, 每条贡献 $\leq t$ 条; 其余叶子入口点饱和, 亦贡献 $\leq t$ 条。总匹配 $\leq 2t + 1 + b_1 t + (b - 2 - b_1)t = bt + 1$ 。

2. 最大匹配不含 $v_{2t}v_{2t+1}$ 、 $v_{2t+1}v_{2t+2}$ 。

则 P 贡献 $\leq 2t$ 条, v_{2t+1} 未饱和。设 b_1 个叶子通过 v_{2t+1} 连接, 贡献 $\leq b_1 t + 1$; 其余叶子入口点饱和, 贡献 $\leq t$ 条。总匹配 $\leq 2t + b_1 t + 1 + (b - 2 - b_1)t = bt + 1$ 。

综上, 匹配数 $\leq bt + 1$ 。证毕。 \square

注 2.7. 实际上我们发现论文中给的引理涵盖了所有给定叶子数 ($\forall b$)、给定直径范围 (按照模 4 划分) 的树的匹配数的范围的确定。

2.5 一般树

2.5.1 给定顶点数、匹配数

这个论文的逻辑是这样的, 就是为什么要研究这些特殊图的 Steklov 特征值? 实际上, 就是对于一般的图, 这些特殊图可能是一般图的子图, 那么我们由 lemma 2.1 我们就可以得到研究图的一个 Steklov 特征值的上界。

而且我们会发现, 实际上我们研究的上面几个特殊图的直径都是能被很好的框定, 而且都是树结构, 那么我们在处理直径被限制的树或者是匹配数被确定的 (匹配数蕴含着直径的限制条件) 树将会非常便利。

Definition 2.2 ($\mathcal{T}(n, m)$). 令 n, m 为整数, 满足 $n \geq 2$ 且 $1 \leq m \leq n/2$, 我们记 $\mathcal{T}(n, m)$ 为具有 n 个顶点且最大匹配数 m 的树的集合。

第一个主要结果是关于 $T \in \mathcal{T}(n, m)$ 的 $\sigma_2(T)$ 的上界。

Theorem 2.10. 设 n, m 为整数, 满足 $n \geq 2$ 且 $1 \leq m \leq n/2$ 。设 T 为具有 n 个顶点且最大匹配数为 m 的树。则

$$\sigma_2(T) \leq \begin{cases} 1, & m = 1, \\ \frac{n-2}{2n-5}, & m = 2, \\ \frac{1}{2}, & m \geq 3. \end{cases} \quad (38)$$

当 $m = 1$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = 1$ 成立当且仅当 T 是星图 S_n 。

当 $m = 2$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = \frac{n-2}{2n-5}$ 成立当且仅当 T 是蟹图 $CG_{1, n-3; 1}$ 。

当 $m \geq 3$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = \frac{1}{2}$ 成立当且仅当 T 是蜘蛛图 $Sp_{m-1, n-2m+1; 2, 1}$ 。

证明. 设 T 为具有 n 个顶点且匹配数为 m 的树。若 T 包含一条长度为 ℓ 的路径, 则 T 的匹配数至少为 $\lceil \ell/2 \rceil$ 。因此, 若树的匹配数为 m , 则其直径 D 至多为 $2m$ 。

1. 若 $m = 1$, 则直径至多为 2。直径为 1 的唯一树是星图 S_2 , 所有直径为 2 的树均为星图 S_n 。显然, 星图的第二 Steklov 特征值为 1。

2. 若 $m = 2$, 则直径至多为 4。

若 T 的直径为 4, 则它包含路径图 P_5 作为子树。则由 lemma 2.1 得 $\sigma_2(T) \leq \sigma_2(P_5) = \frac{1}{2} < \frac{n-2}{2n-5}$ 。

若 T 的直径为 3, 则 T 是蟹图 $CG_{p, q; 1}$, 其中 $p+q = n-2$ 。则 $\sigma_2(T) = \frac{p+q}{pq+p+q} = \frac{n-2}{p(n-2-p)+n-2} \leq \frac{n-2}{2n-5}$ 。等号成立当且仅当 $T \cong CG_{1, n-3; 1}$ 。

若 T 的直径为 2, 则它是星图且匹配数为 1, 矛盾。

3. $m \geq 3$ 时: 注意到 $\sigma_2(Sp_{m-1, n-2m+1; 2, 1}) = \frac{1}{2}$, 因为 $m-1 \geq 2$ 。

若 T 的直径至少为 5, 则它包含路径图 P_6 作为子树。则由 lemma 2.1 得 $\sigma_2(T) \leq \sigma_2(P_6) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ 。

若 T 的直径为 4。若 T 包含蜘蛛图 $Sp_{1,2;3,1}$ 作为子树, 则由 lemma 2.1 得 $\sigma_2(T) \leq \sigma_2(Sp_{1,2;3,1}) \approx 0.42 < \frac{1}{2}$ 。假设 T 不包含蜘蛛图 $Sp_{1,2;3,1}$ 作为子树。设 u 和 v 为距离为 4 的两个顶点。这意味着 u 和 v 均不是孪生顶点。因此树 T 必须是蜘蛛图 $Sp_{p_1,p_2;2,1}$, 其中 $2p_1 + p_2 + 1 = n$ 且 $p_1 \geq 2$ 。由于匹配数为 m , 它只能是蜘蛛图 $Sp_{m-1,n-2m+1;2,1}$ 。若 T 的直径至多为 3, 则匹配数至多为 2, 矛盾。

综上, 我们便完成了分类讨论的证明。 \square

2.5.2 给定叶子数、匹配数

Definition 2.3 ($\tilde{\mathcal{T}}(b, m)$). 令 b, m, k 为整数, 满足 $b \geq 2, m \geq 1$, 且 $b \geq k \geq 1$, 我们记 $\tilde{\mathcal{T}}(b, m)$ 为具有 b 个叶子且最大匹配数 m 的树的集合。

第二个主要结果是关于 $T \in \tilde{\mathcal{T}}(b, m)$ 的 $\sigma_2(T)$ 的上界。

Theorem 2.11. 令 b, m 为整数, 满足 $b \geq 2$ 且 $m \geq 1$ 。令 T 为具有 b 个叶子且最大匹配数 m 的树。则有

$$\sigma_2(T) \leq \begin{cases} 1, & m = 1, \\ \frac{b}{2b-1}, & m = 2, \\ \frac{2}{2m-1}, & b = 2, m \geq 3, \\ \frac{1}{2r + \frac{b-1}{b}}, & b \geq 3, m = br + 1, r \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{2}{4r+3}, & b \geq 3, m = br + 2, r \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{2r+2}, & b \geq 3, m = br + s, 3 \leq s \leq b, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{cases} \quad (39)$$

当 $m = 1$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = 1$ 成立当且仅当 T 是星图 S_{b+1} 。

当 $m = 2$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = \frac{b}{2b-1}$ 成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1,b-1;1}$ 。

当 $b = 2, m \geq 3$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = \frac{2}{2m-1}$ 成立当且仅当 T 是路径图 P_{2m} 。

当 $b \geq 3, m = br + 1, r \in \mathbb{Z}_+$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = \frac{1}{2r + \frac{b-1}{b}}$ 成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1,b-1;2r} \cong Sp_{1,b-1;2r+1,2r}$ 。

当 $b \geq 3, m = br + s, 3 \leq s \leq b, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 时, 蜘蛛图 $Sp_{2r+2,2r+1;s-1,b-s+1} \in \tilde{\mathcal{T}}(b, br + s)$ 达到等号 $\sigma_2(T) = \frac{1}{2r+2}$ 。其中达到等号的树可能不唯一, 例如 $Sp_{2r+2,2r+1;b-1,1}$ 和 $Sp_{2r+2;b}$ 都属于 $\tilde{\mathcal{T}}(b, br + b)$ 且都达到等号 $\sigma_2(T) = \frac{1}{2r+2}$ 。

证明. 设 T 为具有 b 个叶子和最大匹配数 m 的树。

1. 若 $m = 1$, 则 T 是星图 S_{b+1} 且 $\sigma_2(T) = 1$ 。
2. 若 $m = 2$, 则 T 是螃蟹图 $CG_{b_1,b-b_1;1}$, 其中 $b_1 = 1, 2, \dots, b-1$ 。我们有 $\sigma_2(T) = \frac{b}{b_1(b-b_1)+b} \leq \frac{b}{2b-1}$ 。当 $b_1 = 1$ 或 $b-1$ 时等号成立。
3. 若 $m \geq 3$ 且 $b = 2$, 则 T 是路径图 P_{2m} 或 P_{2m+1} 。我们有 $\sigma_2(T) = \frac{2}{2m-1}$ 或 $\sigma_2(T) = \frac{2}{2m}$ 。

4. 若 $b \geq 3$ 且 $m = br + 1$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_+$ 。由 lemma 2.6, T 的直径至少为 $4r + 1$ 。若 T 的直径至少为 $4r + 2$, 则 $\sigma_2(T) \leq \frac{2}{4r+2} = \frac{1}{2r+1} \leq \frac{1}{2r+\frac{b-1}{b}}$ 。若 T 的直径恰好为 $4r + 1$, 则由 lemma 2.7, T 是螃蟹图 $CG_{b_1, b-b_1; 2r}$, 其中 $b_1 = 1, 2, \dots, b-1$ 为正整数。所以 $\sigma_2(T) = \frac{b}{b_1(b-b_1)+2rb} \leq \frac{b}{2rb+b-1}$ 。等号成立当且仅当 $b_1 = 1$ 或 $b-1$ 。
5. 若 $b \geq 3$ 且 $m = br + 2$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_+$ 。由 lemma 2.9, T 的直径至少为 $4r + 3$ 。所以 $\sigma_2(T) \leq \frac{2}{4r+3}$ 。
6. 若 $b \geq 3$ 且 $m = br + s$, 其中 $3 \leq s \leq b$, $r \in \mathbb{Z}_+$ 。由 lemma 2.8, T 的直径至少为 $4r + 4$ 。所以 $\sigma_2(T) \leq \frac{2}{4r+4} = \frac{1}{2r+2}$ 。

综上, 我们便完成了分类讨论的证明。 □

第三个主要结果是关于 $T \in \tilde{\mathcal{T}}(b, m)$ 的 $\sigma_k(T)$ 的上界 ($k \geq 3$)。

Theorem 2.12. 设 b, m, k 为整数, 满足 $b \geq k \geq 3$ 且 $m \geq 1$ 。设 T 为具有 b 个叶子和最大匹配数 m 的树。则

$$\sigma_k(T) \leq 1 \tag{40}$$

等号取到 $\sigma_k(T) = 1$ 当且仅当为蜘蛛图 $Sp_{1, b-1; 2m-1, 1} \in \tilde{\mathcal{T}}(b, m)$ 。

证明. 首先我们注意到: $\sigma_k(Sp_{1, b-1; 2m-1, 1}) = 1 (3 \leq k \leq b)$, 其次又由于对任意树都有: $\sigma_k(T) \leq 1$, 故原命题成立。 □

注 2.8. 作者在另外一篇文章中给出了所有树的第 k Steklov 特征值均小于等于 1 的这个结论, 然后这里给出了取到 1 的条件。

3 Algebraic Connectivity

3.1 Laplace 特征值的大小关系

Lemma 3.1. 设 T 是一个 n 阶有限树。设 T' 是 T 的一个 n' 阶子树。则对于 $i = 1, 2, \dots, n'$, 有

$$\lambda_i(T) \leq \lambda_i(T') \quad (41)$$

证明. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 $L(T)$ 的一组正交拉普拉斯特征函数系, 其中 ξ_i 是定义在 $V(T)$ 上的 $\lambda_i(T)$ -特征函数, $i = 1, 2, \dots, n$ 。设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n'}$ 是 $L(T')$ 的一组正交拉普拉斯特征函数系, 其中 η_i 是定义在 $V(T')$ 上的 $\lambda_i(T')$ -特征函数, $i = 1, 2, \dots, n'$ 。

对于定义在 $V(T')$ 上的函数 f , 我们将其延拓为定义在 $V(T)$ 上的函数 \tilde{f} , 使得 \tilde{f} 在 $T - E(T')$ 的各个连通分支上取常数值。

显然 $\lambda_1(T) = \lambda_1(T') = 0$ 。现设 $2 \leq i \leq n'$ 为整数。

考虑函数 $\tilde{f} = c_1 \tilde{\eta}_1 + c_2 \tilde{\eta}_2 + \dots + c_i \tilde{\eta}_i$, 其中 c_1, c_2, \dots, c_i 是不全为零的常数, 且满足对每个 $j = 1, 2, \dots, i-1$ 都有 $\langle \tilde{f}, \xi_j \rangle = 0$ 。这样的 c_1, c_2, \dots, c_i 是存在的, 因为这是一个包含 i 个变量、 $i-1$ 个方程的齐次线性方程组, 必有非零解。

由拉普拉斯特征值的极小极大原理 (Courant-Fischer 定理), 我们有:

$$\lambda_i(T) \leq \frac{\sum_{uv \in E(T)} (\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v))^2}{\sum_{v \in V(T)} \tilde{f}(v)^2} \quad (42)$$

$$\leq \frac{\sum_{uv \in E(T')} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(T')} f(v)^2} = \lambda_i(T'). \quad (43)$$

第二个不等式的成立:

1. 分子: 由于 \tilde{f} 在 $T - E(T')$ 的每个连通分支上为常数, 所以对于 $uv \in E(T) \setminus E(T')$, 有 $\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v) = 0$ 。因此:

$$\sum_{uv \in E(T)} (\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v))^2 = \sum_{uv \in E(T')} (\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v))^2 = \sum_{uv \in E(T')} (f(u) - f(v))^2$$

2. 分母: 延拓过程不减少函数值的平方和。具体来说, 对于 $T - E(T')$ 的每个连通分支 C , 设 v_C 是 C 中与 T' 相连的顶点, 则对任意 $u \in C$, 有 $\tilde{f}(u) = f(v_C)$ 。因此:

$$\sum_{v \in V(T)} \tilde{f}(v)^2 = \sum_{v \in V(T')} f(v)^2 + \sum_C \sum_{u \in C \setminus \{v_C\}} f(v_C)^2 \geq \sum_{v \in V(T')} f(v)^2$$

这保证了比值不会增大。

综上, 我们得到 $\lambda_i(T) \leq \lambda_i(T')$ 。 □

注 3.1. 这里有一个问题是: 如何保证

$$\frac{\sum_{uv \in E(T')} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(T')} f(v)^2} = \lambda_i(T')$$

我想的解释是就是我们反着来, 从一开始就取满足等号成立的 f 来做延拓, 然后其他部分都相同, 这样就可避免由于一般情形:

$$\frac{\sum_{uv \in E(T')} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(T')} f(v)^2} \geq \lambda_i(T')$$

的讨论 (要不然“小于”+“大于”不一定有“小于”)。

3.2 特殊图中的 Laplace 特征值

3.2.1 Crab 图

我们先来确定 $L(CG_{b_1, b_2; r})$ 的特征值。

注意到我们对 $CG_{b_1, b_2; r}$ 有一个等划分: $V_{u,i}, V_{v,i}$, 其中 $i = 0, 1, \dots, r$, 由下式给出:

$$V_{u,0} = \{u_0\}, \quad (44)$$

$$V_{u,i} = \{u_{i,1}, \dots, u_{i,b_1}\}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (45)$$

$$V_{v,0} = \{v_0\}, \quad (46)$$

$$V_{v,i} = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,b_2}\}, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (47)$$

记 \mathbb{R}^V 为 V 上所有实函数的空间, W 为在每个部分中取常数值子空间。我们首先确定 W^\perp 中的特征空间 (它可以通过将 P_{2r+1} 的某些特征函数提升到 W^\perp 中得到)

对于正整数 n : $L(P_n)$ 是具有 n 个顶点的路径图的拉普拉斯矩阵, 我们记 B_{n-1} 为从 $L(P_n)$ 中删除与 P_n 的一个端点对应的一行和一列后得到的矩阵, 记 H_{n-2} 为从 $L(P_n)$ 中删除与 P_n 的两个端点对应的两行和两列后得到的矩阵。

注 3.2. 上述过程实际上可以看成是“消点”。

我们记 $\Phi(M) = \Phi(M, x) = \det(xI - M)$ 为矩阵 M 的特征多项式。

Lemma 3.2. 设 G_1 和 G_2 是两个顶点不交的图, $G = G_1 u : v G_2$ 是通过将图 G_1 的顶点 u 与图 G_2 的顶点 v 用一条边连接后得到的图。则

$$\Phi(G) = \Phi(G_1)\Phi(G_2) - \Phi(G_1)\Phi(L_v(G_2)) - \Phi(G_2)\Phi(L_u(G_1)). \quad (48)$$

Lemma 3.3. 设 $\Phi(P_0) = 0, \Phi(B_0) = 1, \Phi(H_0) = 1$ 。则我们有:

1. $x\Phi(B_n) = \Phi(P_{n+1}) + \Phi(P_n)$;
2. $\Phi(P_{n+1}) = (x-2)\Phi(P_n) - \Phi(P_{n-1}), (n \geq 1)$;
3. $\Phi(P_n) = x\Phi(H_{n-1}), (n \geq 1)$;
4. $\Phi(C_n) = \frac{1}{x}\Phi(P_{n+1}) - \frac{1}{x}\Phi(P_{n-1}) + 2(-1)^{n+1}, (n \geq 3, x \neq 0)$;
5. $\Phi(P_m, x)\Phi(P_n, x) - \Phi(P_{m-1}, x)\Phi(P_{n+1}, x) = \Phi(P_{m-1}, x)\Phi(P_{n-1}, x) - \Phi(P_{m-2}, x)\Phi(P_n, x), (m \geq 2, n \geq 1, x \neq 2)$ 。

证明.

Step1 : 我们首先证明 1 和 2 成立。考虑 B_n 的特征多项式, 我们有

$$\Phi(B_n) = \begin{vmatrix} x-1-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} = \Phi(P_n) - \Phi(B_{n-1})$$

因此我们得到

$$\Phi(B_{n-1}) = \Phi(P_n) - \Phi(B_n) \quad (49)$$

由 lemma 3.2, 我们有

$$\Phi(P_{n+1}) = (x-1)\Phi(P_n) - x\Phi(B_{n-1}) \quad (50)$$

将式 (49) 代入式 (50), 我们有

$$\Phi(P_{n+1}) = (x-1)\Phi(P_n) - x\Phi(P_n) + x\Phi(B_n) = -\Phi(P_n) + x\Phi(B_n)$$

因此, 1 成立。将 1 代入式 (50), 可得 2 成立。

Step2 : 其次, 我们通过对 n 进行归纳来证明 3 成立。当 $n = 1, 2$ 时, 结果是显然的。假设 $n \geq 3$ 。由 2 和归纳假设, 我们有

$$\begin{aligned} \Phi(P_n) &= (x-2)\Phi(P_{n-1}) - \Phi(P_{n-2}) \\ &= x(x-2)\Phi(H_{n-2}) - x\Phi(H_{n-3}) \\ &= x[(x-2)\Phi(H_{n-2}) - \Phi(H_{n-3})] \\ &= x\Phi(H_{n-1}) \end{aligned}$$

因此, 3 成立。

Step3 : 接下来, 我们证明 4 成立。按第一行展开行列式 $\Phi(C_n)$, 我们有

$$\begin{aligned} \Phi(C_n) &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & x-2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}_{n \times n} \\ &= (x-2)\Phi(H_{n-1}) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &= (x-2)\Phi(H_{n-1}) - \Phi(H_{n-2}) + (-1)^{n+1} - \Phi(H_{n-2}) + (-1)^{n+1} \\ &= (x-2)\Phi(H_{n-1}) - 2\Phi(H_{n-2}) + 2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

将上述方程与 2 和 3 结合, 我们有

$$\begin{aligned} \Phi(C_n) &= \frac{x-2}{x}\Phi(P_n) - \frac{2}{x}\Phi(P_{n-1}) + 2(-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{x}[(x-2)\Phi(P_n) - \Phi(P_{n-1}) - \Phi(P_{n-1})] + 2(-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{x}\Phi(P_{n+1}) - \frac{1}{x}\Phi(P_{n-1}) + 2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

因此, 4 成立。

Step4 : 最后我们证明 5 成立。由 2, 我们有

$$\Phi(P_m) = (x-2)\Phi(P_{m-1}) - \Phi(P_{m-2}) \quad (51)$$

$$\Phi(P_{n+1}) = (x-2)\Phi(P_n) - \Phi(P_{n-1}) \quad (52)$$

由式 (52), 我们立即得到

$$(x-2)\Phi(P_n) = \Phi(P_{n+1}) + \Phi(P_{n-1}) \quad (53)$$

由式 (51) 和 (53), 我们有

$$(x-2)\Phi(P_m)\Phi(P_n) = [(x-2)\Phi(P_{m-1}) - \Phi(P_{m-2})][\Phi(P_{n+1}) + \Phi(P_{n-1})]$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} & (x-2)[\Phi(P_m)\Phi(P_n) - \Phi(P_{m-1})\Phi(P_{n+1})] \\ &= (x-2)\Phi(P_{m-1})\Phi(P_{n-1}) - \Phi(P_{m-2})[\Phi(P_{n+1}) - \Phi(P_{n-1})] \end{aligned} \quad (54)$$

由 2, 我们有

$$\Phi(P_{n+1}) + \Phi(P_{n-1}) = (x-2)\Phi(P_n)$$

将上述方程代入式 (54), 可得 5 成立。证明完成。

□

Corollary 3.4. $\Phi(B_n) + \Phi(B_{n-1}) = \Phi(P_n)$.

证明.

$$\begin{aligned} x(\Phi(B_n) + \Phi(B_{n-1})) &= \Phi(P_{n+1}) + \Phi(P_n) + \Phi(P_n) + \Phi(P_{n-1}) \\ &= (x-2)\Phi(P_n) - \Phi(P_{n-1}) + 2\Phi(P_n) + \Phi(P_{n-1}) \\ &= x\Phi(P_n). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 3.5. 设 P_n 表示具有 n 个顶点的路径图, B_n 表示从 P_{n+1} 中删除一个端点后得到的图。则路径图 P_n 的拉普拉斯特征多项式 $\Phi(P_n)$ 的根 (即 P_n 的拉普拉斯特征值) 为

$$4 \sin^2 \frac{(i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (55)$$

而 B_n 的拉普拉斯特征多项式 $\Phi(B_n)$ 的根 (即 B_n 的拉普拉斯特征值) 为

$$4 \sin^2 \frac{(2i-1)\pi}{4n+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (56)$$

Lemma 3.6. 设 $\lambda = \lambda_{2i}(P_{2r+1})$ 是 $L(P_{2r+1})$ 的第 $(2i)$ 个特征值, 其中 $i = 1, 2, \dots, r$ 。则 W^\perp 包含 $L(CG_{b_1, b_2; r})$ 的一个 λ -特征空间, 其维数为 $b_1 + b_2 - 2$ 。

证明. 考虑路径图 P_{2r+1} , 其顶点记为 $w_1 \sim w_2 \sim \dots \sim w_{2r+1}$ 。对于特征值 $\lambda = \lambda_{2i}(P_{2r+1})$ ($i = 1, \dots, r$), 存在特征函数 ξ 满足:

$$\xi(w_j) = (-1)^{j-1} \left(1 - 2 \cos \frac{(i-1)\pi}{n} + 2 \cos \frac{2(i-1)\pi}{n} - \dots + (-1)^{j-1} 2 \cos \frac{(j-1)(i-1)\pi}{n} \right),$$

其中 $j = 1, \dots, 2r+1$, $n = 2r+1$ 。关键的是, 对于这些特定的特征值, 有 $\xi(w_{r+1}) = 0$ 。

注 3.3. 这里也是直接给出了特征函数的构造, 并没有进一步验证。

现在考虑螃蟹图 $CG_{b_1, b_2; r}$ 。对于 $m = 1, 2, \dots, b_1 - 1$, 取路径:

$$u_{m, r} \sim u_{m, r-1} \sim \dots \sim u_{m, 1} \sim u_0 \sim u_{m+1, 1} \sim \dots \sim u_{m+1, r}.$$

将 P_{2r+1} 的 λ -特征函数 ξ 限制在此路径上 (即 $f(u_{m, j}) = \xi(w_j)$), 其余顶点赋值为 0。由于 $\xi(w_{r+1}) = 0$ 对应 u_0 处的函数值, 这样构造的函数在整个图上满足 λ -特征方程, 且属于 W^\perp 。这给出了 $b_1 - 1$ 个线性无关的 λ -特征函数。

类似地, 对 $m = 1, 2, \dots, b_2 - 1$, 考虑路径:

$$v_{m, r} \sim v_{m, r-1} \sim \dots \sim v_{m, 1} \sim v_0 \sim v_{m+1, 1} \sim \dots \sim v_{m+1, r},$$

同样通过限制 ξ 得到 $b_2 - 1$ 个线性无关的 λ -特征函数。

这些函数的总数为 $(b_1 - 1) + (b_2 - 1) = b_1 + b_2 - 2$, 且它们线性无关, 都属于 W^\perp , 从而在 W^\perp 中给出了一个维数为 $b_1 + b_2 - 2$ 的 λ -特征空间。□

Definition 3.1 (商矩阵). 设图 G 的顶点集 V 有一个划分 $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ 。定义商矩阵 Q 为一个 $k \times k$ 矩阵, 其元素为:

$$Q_{ij} = \frac{1}{|V_i|} \sum_{u \in V_i} \sum_{v \in V_j} w(u, v),$$

其中 $w(u, v)$ 表示顶点 u 和 v 之间的边权 (对于无权图, $w(u, v) = 1$ 如果 u, v 相邻, 否则为 0)。对于螃蟹图 $CG_{b_1, b_2; r}$, 考虑划分 $\{V_{u, 0}, V_{u, 1}, \dots, V_{u, r}, V_{v, 0}, V_{v, 1}, \dots, V_{v, r}\}$, 其商矩阵为:

$$Q_{b_1, b_2; r} = \begin{bmatrix} b_1 + 1 & -b_1 \mathbf{e}_1^\top & -1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 & B_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & b_2 + 1 & -b_2 \mathbf{e}_1^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{e}_1 & B_r \end{bmatrix}, \quad (57)$$

其中 \mathbf{e}_1 是第一个分量为 1、其余分量为 0 的列向量, B_r 是 $r \times r$ 矩阵。

接下来我们确定 W 中的特征函数。

考虑 $CG_{b_1, b_2; r}$ 关于上述部分 $V_{u, i}, V_{v, i}$ 的商矩阵 $Q_{b_1, b_2; r}$ 。那么有 $L(CG_{b_1, b_2; r})P = PQ_{b_1, b_2; r}$, 其中 P 由特征列组成, 具体为

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{V_{u, 0}} & \mathbf{1}_{V_{u, 1}} & \dots & \mathbf{1}_{V_{u, r}} & \mathbf{1}_{V_{v, 0}} & \mathbf{1}_{V_{v, 1}} & \dots & \mathbf{1}_{V_{v, r}} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

我们用 μ 来表示商矩阵 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的特征值。

Lemma 3.7. 设 ξ 是 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的一个 μ -特征函数。则 ξ 诱导出 $L(CG_{b_1, b_2; r})$ 在 W 中的一个 μ -特征函数。

证明. 注意到 $L(CG_{b_1, b_2; r})P\xi = PQ_{b_1, b_2; r}\xi = \mu P\xi$ 。由于 $P\xi$ 在每个划分部分 $V_{u, i}$ 和 $V_{v, i}$ 上取常数值, 因此 $P\xi \in W$, 并且满足 $L(CG_{b_1, b_2; r})(P\xi) = \mu(P\xi)$, 即 $P\xi$ 是 $L(CG_{b_1, b_2; r})$ 的 μ -特征函数。□

Lemma 3.8. $\lambda_2(CG_{b_1, b_2; r}) = \mu_2(Q_{b_1, b_2; r}) \leq \lambda_2(P_{2r+2})$ 。

证明. 首先, 由 lemma 3.6 可知, W^\perp 包含 $r(b_1 + b_2 - 2)$ 个线性无关的特征函数。这些特征函数对应于 P_{2r+1} 的 r 个特征值 (每个特征值对应 $b_1 + b_2 - 2$ 维特征空间)。

其次, W 包含 $2r + 2$ 个线性无关的特征函数, 这些特征函数由商矩阵 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的特征函数诱导而来。

总计我们得到 $r(b_1 + b_2 - 2) + (2r + 2) = r(b_1 + b_2) + 2$ 个线性无关的特征函数。由于 $CG_{b_1, b_2; r}$ 的总顶点数为 $r(b_1 + b_2) + 2$, 这意味着我们已经找到了所有的特征值。

这些特征值来源于两部分: $L(P_{2r+1})$ 的特征值和 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的特征值。

由于 P_{2r+2} 是 $CG_{b_1, b_2; r}$ 的子树, 根据特征值的交错性质, 有:

$$\lambda_2(CG_{b_1, b_2; r}) \leq \lambda_2(P_{2r+2}) < \lambda_2(P_{2r+1})$$

由于 $\lambda_2(P_{2r+1})$ 大于 $\lambda_2(P_{2r+2})$, 而 $\lambda_2(CG_{b_1, b_2; r})$ 必须小于等于 $\lambda_2(P_{2r+2})$, 因此 $\lambda_2(CG_{b_1, b_2; r})$ 不可能来自 $L(P_{2r+1})$ 的特征值, 只能来自 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的特征值。

故有 $\lambda_2(CG_{b_1, b_2; r}) = \mu_2(Q_{b_1, b_2; r}) \leq \lambda_2(P_{2r+2})$ 。 \square

Lemma 3.9.

$$\Phi(Q_{b_1, b_2; r}) = (x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + b_1 b_2 + b_1 + b_2)\Phi(B_r)\Phi(B_r) \quad (59)$$

$$- ((b_1 + b_2)x - 2b_1 b_2 - b_1 - b_2)\Phi(B_r)\Phi(B_{r-1}) \quad (60)$$

$$+ b_1 b_2 \Phi(B_{r-1})\Phi(B_{r-1}). \quad (61)$$

证明. 商矩阵 $Q_{b_1, b_2; r}$ 具有如下分块结构:

$$Q_{b_1, b_2; r} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

其中: $A_{11} = x - b_1 - 1$, $A_{13} = -1$, $A_{31} = -1$, $A_{33} = x - b_2 - 1$, $A_{12} = -b_1 e_1^\top$, $A_{21} = -e_1$, $A_{34} = -b_2 e_1^\top$, $A_{43} = -e_1$, $A_{22} = A_{44} = B_r$

我们使用分块矩阵行列式公式进行拉普拉斯展开, 然后考虑按前两个块行和块列展开:

首先计算 (1, 1) 位置的代数余子式:

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} x - b_1 - 1 & -b_1 e_1^\top & -1 & 0 \\ -e_1 & B_r & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x - b_2 - 1 & -b_2 e_1^\top \\ 0 & 0 & -e_1 & B_r \end{bmatrix} \\
&= (x - b_1 - 1)(x - b_2 - 1) \det(B_r) \det(B_r) \\
&\quad - (x - b_1 - 1)(-1) \det \begin{bmatrix} -e_1 & 0 & 0 \\ 0 & x - b_2 - 1 & -b_2 e_1^\top \\ 0 & -e_1 & B_r \end{bmatrix} \\
&\quad - (-1)(x - b_2 - 1) \det \begin{bmatrix} -b_1 e_1^\top & -1 & 0 \\ B_r & 0 & 0 \\ 0 & -e_1 & B_r \end{bmatrix} \\
&\quad + (-1)(-1) \det \begin{bmatrix} -b_1 e_1^\top & -1 & 0 \\ B_r & 0 & 0 \\ 0 & x - b_2 - 1 & -b_2 e_1^\top \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

展开最终我们可以得到:

$$\begin{aligned}
\Phi(Q_{b_1, b_2; r}) &= (x - b_1 - 1)(x - b_2 - 1) \Phi(B_r) \Phi(B_r) \\
&\quad - (x - b_1 - 1) b_2 \Phi(B_{r-1}) \Phi(B_r) \\
&\quad - (x - b_2 - 1) b_1 \Phi(B_r) \Phi(B_{r-1}) \\
&\quad + b_1 b_2 \Phi(B_{r-1}) \Phi(B_{r-1})
\end{aligned}$$

接下来我们将各项展开并合并同类项:

第一步: 展开各项系数

第一项系数:

$$\begin{aligned}
(x - b_1 - 1)(x - b_2 - 1) &= x^2 - (b_2 + 1)x - (b_1 + 1)x + (b_1 + 1)(b_2 + 1) \\
&= x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + (b_1 b_2 + b_1 + b_2 + 1)
\end{aligned}$$

第二项和第三项系数合并:

$$\begin{aligned}
& - (x - b_1 - 1) b_2 - (x - b_2 - 1) b_1 \\
&= -b_2 x + b_1 b_2 + b_2 - b_1 x + b_1 b_2 + b_1 \\
&= -(b_1 + b_2)x + (2b_1 b_2 + b_1 + b_2)
\end{aligned}$$

第四项系数: $b_1 b_2$

第二步: 按 $\Phi(B_r)$ 和 $\Phi(B_{r-1})$ 的幂次重新分组

将各项按 $\Phi(B_r)^2$ 、 $\Phi(B_r)\Phi(B_{r-1})$ 、 $\Phi(B_{r-1})^2$ 分组:

$\Phi(B_r)^2$ 的系数:

$$[x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + (b_1 b_2 + b_1 + b_2 + 1)] - [1] = x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + (b_1 b_2 + b_1 + b_2)$$

(这里减去 1 是因为第一项展开后常数项多了一个 1)

$\Phi(B_r)\Phi(B_{r-1})$ 的系数:

$$-[(b_1 + b_2)x - (2b_1b_2 + b_1 + b_2)]$$

$\Phi(B_{r-1})^2$ 的系数:

$$b_1b_2$$

因此得到最终形式:

$$\begin{aligned}\Phi(Q_{b_1, b_2; r}) &= (x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + b_1b_2 + b_1 + b_2)\Phi(B_r)\Phi(B_r) \\ &\quad - ((b_1 + b_2)x - 2b_1b_2 - b_1 - b_2)\Phi(B_r)\Phi(B_{r-1}) \\ &\quad + b_1b_2\Phi(B_{r-1})\Phi(B_{r-1})\end{aligned}$$

□

Corollary 3.10.

$$\Phi(Q_{b_1, b_2; 1}) = x(x^3 - (b_1 + b_2 + 4)x^2 + (b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2 + 5)x - (b_1 + b_2 + 2)). \quad (62)$$

证明. 当 $r = 1$ 时, 代入已知值: $\Phi(B_1) = x - 1$ (B_1 是单个顶点, 拉普拉斯矩阵为 $[1]$); $\Phi(B_0) = 1$ (根据定义).

代入 lemma 3.9:

第一项:

$$\begin{aligned}(x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + b_1b_2 + b_1 + b_2) \cdot (x - 1)^2 \cdot 1 \\ = (x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + b_1b_2 + b_1 + b_2)(x^2 - 2x + 1)\end{aligned}$$

第二项:

$$\begin{aligned}-((b_1 + b_2)x - 2b_1b_2 - b_1 - b_2) \cdot (x - 1) \cdot 1 \cdot 1 \\ = -((b_1 + b_2)x - 2b_1b_2 - b_1 - b_2)(x - 1)\end{aligned}$$

第三项:

$$+b_1b_2 \cdot 1 \cdot 1 = b_1b_2$$

现在展开并合并所有项:

首先展开第一项:

$$\begin{aligned}(x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x + b_1b_2 + b_1 + b_2)(x^2 - 2x + 1) \\ = x^4 - 2x^3 + x^2 \\ - (b_1 + b_2 + 2)x^3 + 2(b_1 + b_2 + 2)x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x \\ + (b_1b_2 + b_1 + b_2)x^2 - 2(b_1b_2 + b_1 + b_2)x + (b_1b_2 + b_1 + b_2)\end{aligned}$$

合并第一项的同类项:

$$\begin{aligned}x^4 \\ x^3 : -2 - (b_1 + b_2 + 2) = -(b_1 + b_2 + 4) \\ x^2 : 1 + 2(b_1 + b_2 + 2) + (b_1b_2 + b_1 + b_2) = b_1b_2 + 3b_1 + 3b_2 + 5 \\ x^1 : -(b_1 + b_2 + 2) - 2(b_1b_2 + b_1 + b_2) = -2b_1b_2 - 3b_1 - 3b_2 - 2 \\ x^0 : b_1b_2 + b_1 + b_2\end{aligned}$$

所以第一项为：

$$x^4 - (b_1 + b_2 + 4)x^3 + (b_1b_2 + 3b_1 + 3b_2 + 5)x^2 - (2b_1b_2 + 3b_1 + 3b_2 + 2)x + (b_1b_2 + b_1 + b_2)$$

现在展开第二项：

$$\begin{aligned} & -((b_1 + b_2)x - 2b_1b_2 - b_1 - b_2)(x - 1) \\ &= -[(b_1 + b_2)x^2 - (b_1 + b_2)x - (2b_1b_2 + b_1 + b_2)x + (2b_1b_2 + b_1 + b_2)] \\ &= -[(b_1 + b_2)x^2 - (2b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2)x + (2b_1b_2 + b_1 + b_2)] \\ &= -(b_1 + b_2)x^2 + (2b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2)x - (2b_1b_2 + b_1 + b_2) \end{aligned}$$

第三项： $+b_1b_2$

合并所有项：

$$x^4: 1$$

$$x^3: -(b_1 + b_2 + 4)$$

$$x^2: (b_1b_2 + 3b_1 + 3b_2 + 5) - (b_1 + b_2) = b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2 + 5$$

$$x^1: -(2b_1b_2 + 3b_1 + 3b_2 + 2) + (2b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2) = -(b_1 + b_2 + 2)$$

$$x^0: (b_1b_2 + b_1 + b_2) - (2b_1b_2 + b_1 + b_2) + b_1b_2 = 0$$

因此：

$$\begin{aligned} \Phi(Q_{b_1, b_2; 1}) &= x^4 - (b_1 + b_2 + 4)x^3 + (b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2 + 5)x^2 - (b_1 + b_2 + 2)x \\ &= x[x^3 - (b_1 + b_2 + 4)x^2 + (b_1b_2 + 2b_1 + 2b_2 + 5)x - (b_1 + b_2 + 2)] \end{aligned}$$

□

Corollary 3.11.

$$\Phi(Q_{1, b-1; 1}) = x(x^3 - (b+4)x^2 + (3b+4)x - b - 2). \quad (63)$$

因此， $\lambda_2(CG_{1, b-1; 1})$ 等于方程 $x^3 - (b+4)x^2 + (3b+4)x - b - 2 = 0$ 的最小根。

证明. 在 corollary 3.10 中令 $b_1 = 1$, $b_2 = b - 1$ 即得. □

注 3.4. 接下来这一部分的引理、推论的证明方式大多都是和上面相似，实际上处理的对象还是针对一些特殊的商矩阵，然后再取特殊值得到特殊的结果。毕竟最后要研究的主要还是 λ_2 的性质。

Lemma 3.12. 设 $1 \leq b_1 \leq b_2 - 1$ 为整数，则

$$\Phi(Q_{b_1+1, b_2-1; r}) - \Phi(Q_{b_1, b_2; r}) = (b_2 - b_1 - 1)(\Phi(B_{r-1}) + \Phi(B_r))^2 \quad (64)$$

$$= (b_2 - b_1 - 1)\Phi^2(P_r) \geq 0. \quad (65)$$

证明. 通过直接计算可得。具体来说，将 $Q_{b_1+1, b_2-1; r}$ 和 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的特征多项式相减，利用 $\Phi(B_{r-1}) + \Phi(B_r) = \Phi(P_r)$ 的关系，可以得到上述等式。由于 $b_2 - b_1 - 1 \geq 0$ ，故差值非负。 □

Corollary 3.13. 设 $1 \leq b_1 \leq b_2 - 1$ 为整数，则 $\mu_2(Q_{b_1+1, b_2-1; r}) \leq \mu_2(Q_{b_1, b_2; r})$ 。

证明. 注意到 $\Phi(Q_{b_1+1, b_2-1; r})$ 的阶数为 $2r+2$ (偶数). 由于 0 是 $Q_{b_1+1, b_2-1; r}$ 的单特征值, 对于足够小的 $\epsilon > 0$, 有 $\Phi(Q_{b_1+1, b_2-1; r}, \epsilon) < 0$.

设 $\mu = \mu_2(Q_{b_1, b_2; r}) > 0$ 是 $Q_{b_1, b_2; r}$ 的第二小特征值. 则

$$\Phi(Q_{b_1+1, b_2-1; r}, \mu) = \Phi(Q_{b_1+1, b_2-1; r}, \mu) - \Phi(Q_{b_1, b_2; r}, \mu) \geq 0$$

这意味着 $\mu_2(Q_{b_1+1, b_2-1; r}) \leq \mu = \mu_2(Q_{b_1, b_2; r})$. □

Corollary 3.14. 设 $1 \leq b_1 \leq b_2 - 1$ 为整数, 则 $\lambda_2(CG_{b_1+1, b_2-1; r}) \leq \lambda_2(CG_{b_1, b_2; r})$.

实际上, 如果 $b_2 > b_1 + 1$, 不等式是严格的。

Lemma 3.15. 设 $1 \leq b_1 < b_2 - 1$ 为整数. 则 $\lambda_2(CG_{b_1+1, b_2-1; r}) < \lambda_2(CG_{b_1, b_2; r})$.

证明. 假设 $\lambda = \lambda_2(CG_{b_1+1, b_2-1; r}) = \lambda_2(CG_{b_1, b_2; r})$. 则由 lemma 3.12 有:

$$(b_2 - b_1 - 1)\Phi^2(P_r, \lambda) = 0$$

因此 $\Phi(P_r, \lambda) = 0$.

但是 $0 < \lambda \leq \lambda_2(P_{2r+2}) < \lambda_2(P_r)$, 矛盾. □

Corollary 3.16. 设 $1 \leq b_1 < b$ 为整数. 则 $\lambda_2(CG_{b_1, b-b_1; r}) \leq \lambda_2(CG_{1, b-1; r})$. 等号成立当且仅当 $b_1 = 1$ 或 $b - 1$.

下面我们给出 $\lambda_2(CG_{1, b-1; r})$ 的一个下界。

Lemma 3.17. 设 $b \geq 2$ 为整数. 则

$$\Phi(Q_{1, b-1; r}) - \Phi(Q_{1, 1; r}) = (b-2)((1-x)\Phi(B_r) + \Phi(P_r))\Phi(P_r). \quad (66)$$

证明. 注意到

$$\Phi(Q_{1, b-1; r}) = (x^2 - (b+2)x + 2b-1)\Phi(B_r)\Phi(B_r) \quad (67)$$

$$- (bx - 3b + 2)\Phi(B_r)\Phi(B_{r-1}) \quad (68)$$

$$+ (b-1)\Phi(B_{r-1})\Phi(B_{r-1}). \quad (69)$$

因此,

$$\Phi(Q_{1, b-1; r}) - \Phi(Q_{1, 1; r}) = (b-2)(-(x-2)\Phi(B_r)\Phi(B_r) \quad (70)$$

$$- (x-3)\Phi(B_r)\Phi(B_{r-1}) + \Phi(B_{r-1})\Phi(B_{r-1})) \quad (71)$$

$$= (b-2)((2-x)\Phi(B_r)\Phi(P_r) + \Phi(B_{r-1})\Phi(P_r)) \quad (72)$$

$$= (b-2)((1-x)\Phi(B_r) + \Phi(P_r))\Phi(P_r). \quad (73)$$

最后一步利用了 $\Phi(P_r) = \Phi(B_r) + \Phi(B_{r-1})$ 的关系. □

Lemma 3.18. 设 $b \geq 3$ 为整数. 则 $\lambda_2(CG_{1, b-1; r}) > \lambda_2(P_{2r+3})$.

证明. 注意到 $Q_{1,1;r} = L(P_{2r+2})$ 。显然有 $\Phi(Q_{1,b-1;r}, 0) = \Phi(Q_{1,1;r}, 0) = 0$ 。

考虑 $0 < \theta \leq \lambda_2(P_{2r+3}) < \lambda_2(P_{2r+1}) = \lambda_2(B_r)$ 。我们有 $\Phi(Q_{1,1;r}, \theta) < 0$ 。

同时, $((1-x)\Phi(B_r, \theta) + \Phi(P_r, \theta))\Phi(P_r, \theta) < 0$ 。

因此, $\Phi(Q_{1,b-1;r}, \theta) < 0$ 。这意味着 $\lambda_2(Q_{1,b-1;r}) > \lambda_2(P_{2r+3})$ 。

所以 $\lambda_2(CG_{1,b-1;r}) > \lambda_2(P_{2r+3})$ 。 \square

3.2.2 Spider 图

实际上, Spider 图的 Laplace 特征值分析过程整体上与 Crab 图相似, 毕竟 Crab 图可以看成由两个 Spider 图拼接而成, 故我们几乎可以把处理 Crab 图的方法原封不动的搬到 Spider 图的 Laplace 特征值的处理上:

与 Crab 处理类似, 我们取 $Sp_{b,r}$ 的等划分, 即部分 $V_{u,i}$ ($i = 0, 1, \dots, r$), 由下式给出:

$$V_{u,0} = \{u_0\}, \quad (74)$$

$$V_{u,i} = \{u_{i,1}, \dots, u_{i,b}\}, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (75)$$

设 \mathbb{R}^V 为 V 上所有实函数的空间。设 W 为在每个部分上取常数值子空间。我们首先确定 W^\perp 中的特征空间。它可以通过将 P_{2r+1} 的某些特征函数提升到 W^\perp 中得到。

Lemma 3.19. 设 $b \geq 2$ 为整数。设 $\lambda = \lambda_{2i}(P_{2r+1})$ 是 $L(P_{2r+1})$ 的第 $(2i)$ 个特征值, 其中 $i = 1, 2, \dots, r$ 。则 W^\perp 包含 $L(Sp_{b,r})$ 的一个 λ -特征空间, 其维数为 $b-1$ 。

证明. 证明与 lemma 3.6 的证明相同。 \square

接下来我们确定 W 中的特征函数。

考虑 $Sp_{b,r}$ 关于上述部分 $V_{u,i}$ 的商矩阵 $Q_{b,r}$ 。定义

$$Q_{b,r} = \begin{bmatrix} b & -be_1^\top \\ -e_1 & B_r \end{bmatrix}. \quad (76)$$

那么 $L(Sp_{b,r})P = PQ_{b,r}$, 其中 P 由特征列组成, 具体为

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{V_{u,0}} & \mathbf{1}_{V_{u,1}} & \cdots & \mathbf{1}_{V_{u,r}} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Lemma 3.20. 设 ξ 是 $Q_{b,r}$ 的一个 μ -特征函数。则 ξ 诱导出 $L(Sp_{b,r})$ 在 W 中的一个 μ -特征函数。

证明. 注意到 $L(Sp_{b,r})P\xi = PQ_{b,r}\xi = \mu P\xi$ 。 \square

接下来我们给出 $\lambda_2(Q_{b,r})$ 的一个下界。

Lemma 3.21. 设 $1 \leq k \leq n$ 为整数。设 P 为 n 阶正定矩阵。设 S 为 n 阶半正定矩阵。则 $\mu_k(PS) \geq \mu_1(P)\mu_k(S)$ 。

证明.

$$\begin{aligned}
\mu_k(PS) &= \mu_k(\sqrt{P}S\sqrt{P}) \\
&= \min_{\dim U=k} \max_{0 \neq x \in U} \frac{x^\top \sqrt{P}S\sqrt{P}x}{x^\top x} \\
&= \min_{\dim U=k} \max_{0 \neq x \in U} \frac{(\sqrt{P}x)^\top S(\sqrt{P}x)}{(\sqrt{P}x)^\top (\sqrt{P}x)} \cdot \frac{x^\top Px}{x^\top x} \\
&\geq \mu_1(P) \min_{\dim U=k} \max_{0 \neq x \in U} \frac{(\sqrt{P}x)^\top S(\sqrt{P}x)}{(\sqrt{P}x)^\top (\sqrt{P}x)} \\
&= \mu_1(P)\mu_k(S).
\end{aligned}$$

□

Corollary 3.22. 设 $b \geq 2$ 为整数。则 $\mu_2(Q_{b;r}) \geq \mu_2(Q_{1;r}) = \lambda_2(P_{r+1})$ 。

证明. 注意到 $Q_{b;r} = \Lambda Q_{1;r}$, 其中 Λ 是对角矩阵 $\text{diag}\{b, 1, \dots, 1\}$ 。由于 Λ 的最小特征值为 1, 根据 lemma 3.21, 有 $\mu_2(Q_{b;r}) \geq \mu_2(Q_{1;r})$ 。而 $Q_{1;r}$ 实际上是路径图 P_{r+1} 的拉普拉斯矩阵, 故 $\mu_2(Q_{1;r}) = \lambda_2(P_{r+1})$ 。□

$Sp_{b;r}$ 的第二小拉普拉斯特征值必然来自 P_{2r+1} 。

Lemma 3.23. 设 $b \geq 2, r \geq 1$ 为整数。则 $\lambda_2(Sp_{b;r}) = \lambda_2(P_{2r+1}) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{4r+2}$ 。

证明. 注意到 W^\perp 包含 $r(b-1)$ 个线性无关的特征函数, 而 W 包含 $r+1$ 个线性无关的特征函数。总计我们有 $r(b-1) + (r+1) = rb+1$ 个线性无关的特征函数。由于 $Sp_{b;r}$ 的总顶点数为 $rb+1$, 这意味着我们已经找到了所有的特征值。

这些特征值来源于两部分: $L(P_{2r+1})$ 的特征值和 $Q_{b;r}$ 的特征值。

根据 corollary 3.22, 有 $\lambda_2(Q_{b;r}) \geq \lambda_2(P_{r+1})$ 。而已知 $\lambda_2(P_{r+1}) > \lambda_2(P_{2r+1})$, 因此 $\lambda_2(Sp_{b;r})$ 不可能来自 $Q_{b;r}$ 的特征值, 只能来自 $L(P_{2r+1})$ 的特征值。

故 $\lambda_2(Sp_{b;r}) = \lambda_2(P_{2r+1}) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{4r+2}$ 。□

3.3 一般树

3.3.1 给定顶点数、匹配数

我们的第三个主要结果是对 $T \in \mathcal{T}(n, m)$ 的 $\lambda_2(T)$ 的上界。

Theorem 3.24. 设 n, m 为整数, 满足 $n \geq 2$ 且 $1 \leq m \leq n/2$ 。设 T 为具有 n 个顶点且最大匹配数为 m 的树。则

$$\lambda_{2, \max}(n, m) \leq \begin{cases} 1, & m = 1, \\ \lambda_2(CG_{1, n-2; 1}), & m = 2, \\ 4 \sin^2 \frac{\pi}{10}, & m \geq 3, \end{cases} \quad (78)$$

其中 $\lambda_2(CG_{1, n-2; 1})$ 是方程 $x^3 - (n+3)x^2 + (3n+1)x - n - 1 = 0$ 的最小根。

当 $m = 1$ 时, 等号 $\lambda_2(T) = 1$ 成立当且仅当 T 是星图 S_n 。

当 $m = 2$ 时, 等号 $\lambda_2(T) = \lambda_2(CG_{1, n-2; 1})$ 成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1, n-3; 1}$ 。

当 $m \geq 3$ 时, 等号 $\sigma_2(T) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{10}$ 成立当且仅当 T 是蜘蛛图 $Sp_{m-1, n-2m+1; 2, 1}$ 。

证明. 设 T 为具有 n 个顶点且匹配数为 m 的树。我们将按 m 的取值分情况证明。

1. $m = 1$

如果树 T 包含一条长度为 ℓ 的路径, 则其匹配数至少为 $\lceil \ell/2 \rceil$ 。因此, 如果树的匹配数为 m , 则树的直径 D 至多为 $2m$ 。

当 $m = 1$ 时, 直径至多为 2。

(a) 直径为 1 的唯一树是星图 S_2 。

(b) 直径为 2 的每棵树都是星图 S_n ($n \geq 3$)。

显然, 星图的第二拉普拉斯特征值为 1。因此, 当 $m = 1$ 时, $\lambda_2(T) \leq 1$, 且等号成立当且仅当 T 是星图 S_n 。

2. $m = 2$

当 $m = 2$ 时, 直径 $D \leq 4$ 。我们根据直径的不同取值进行讨论:

(a) $D = 4$

此时 T 包含路径图 P_5 作为子树。根据 lemma 3.1 有:

$$\lambda_2(T) \leq \lambda_2(P_5) < \lambda_2(CG_{1, n-3; 1})$$

其中严格不等式是因为可以计算验证 $\lambda_2(P_5) < \lambda_2(CG_{1, n-3; 1})$ 。

(b) $D = 3$

此时 T 是一个螃蟹图 $CG_{p, q; 1}$, 其中 $p + q = n - 2$ 。根据之前关于螃蟹图特征值的结论, 有:

$$\lambda_2(T) = \lambda_2(CG_{p, q; 1}) \leq \lambda_2(CG_{1, n-3; 1})$$

等号成立当且仅当 $T \cong CG_{1, n-3; 1}$ (即 $p = 1, q = n - 3$ 或 $p = n - 3, q = 1$)。

(c) $D = 2$

此时 T 是星图, 但星图的匹配数为 1, 与 $m = 2$ 矛盾。

综上, 当 $m = 2$ 时, $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(CG_{1, n-3; 1})$, 且等号成立当且仅当 $T \cong CG_{1, n-3; 1}$ 。

3. $m \geq 3$

首先注意到, 极图 $Sp_{m-1, n-2m+1; 2, 1}$ 的第二特征值满足:

$$\lambda_2(Sp_{m-1, n-2m+1; 2, 1}) \geq \lambda_2(Sp_{n-m; 2}) = \lambda_2(P_5)$$

这里利用了 $n - m \geq 2$ 的条件以及蜘蛛图特征值的性质。

现在根据直径 D 的不同取值进行讨论:

(a) $D \geq 5$

此时 T 包含路径图 P_6 作为子树。根据 lemma 3.1, 有:

$$\lambda_2(T) \leq \lambda_2(P_6) < \lambda_2(P_5) \leq 4 \sin^2 \frac{\pi}{10}$$

(b) $D = 4$

我们需要进一步细分：

i. 如果 T 包含蜘蛛图 $Sp_{1,2;3,1}$ 作为子树，则根据 lemma 3.1：

$$\lambda_2(T) \leq \lambda_2(Sp_{1,2;3,1}) \approx 0.32 < \lambda_2(P_5) \approx 0.38$$

ii. 如果 T 不包含 $Sp_{1,2;3,1}$ 作为子树，设 u 和 v 是距离为 4 的两个顶点。这意味着 u 和 v 都不是孪生顶点（即度数为 1 的叶子顶点）。因此，树 T 必须是蜘蛛图 $Sp_{p_1,p_2;2,1}$ ，满足 $2p_1 + p_2 + 1 = n$ 且 $p_1 \geq 2$ 。由于匹配数为 m ，只能是蜘蛛图 $Sp_{m-1,n-2m+1;2,1}$ 。

(c) $D \leq 3$

此时匹配数至多为 2，与 $m \geq 3$ 矛盾。

综上，当 $m \geq 3$ 时， $\lambda_2(T) \leq 4 \sin^2 \frac{\pi}{10}$ ，且等号成立当且仅当 T 是蜘蛛图 $Sp_{m-1,n-2m+1;2,1}$ 。

至此，定理得证。 \square

3.3.2 给定叶子数、匹配数

我们的第四个主要结果是对 $T \in \tilde{\mathcal{T}}(b, m)$ 的 $\lambda_2(T)$ 的上界。

Theorem 3.25. 设 b, m 为整数，满足 $b \geq 2$ 且 $m \geq 1$ 。设 T 为具有 b 个叶子且最大匹配数为 m 的树。则

$$\sigma_2(T) \leq \begin{cases} 1, & m = 1, \\ \lambda_2(CG_{1,b-1;1}), & m = 2, \\ 4 \sin^2 \frac{\pi}{4m}, & b = 2, m \geq 3, \\ \lambda_2(CG_{1,b-1;2r}), & b \geq 3, m = br + 1, r \in \mathbb{Z}_+, \\ 4 \sin^2 \frac{\pi}{8r+8}, & b \geq 3, m = br + 2, r \in \mathbb{Z}_+, \\ 4 \sin^2 \frac{\pi}{8r+10}, & b \geq 3, m = br + s, 3 \leq s \leq b, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{cases} \quad (79)$$

其中 $\lambda_2(CG_{1,b-1;1})$ 是方程 $x^3 - (b+4)x^2 + (3b+4)x - b - 2 = 0$ 的最小根。

当 $m = 1$ 时，等号 $\sigma_2(T) = 1$ 成立当且仅当 T 是星图 S_{b+1} 。

当 $m = 2$ 时，等号 $\sigma_2(T) = \lambda_2(CG_{1,b-1;1})$ 成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1,b-1;1}$ 。

当 $b = 2, m \geq 3$ 时，等号 $\sigma_2(T) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{4m}$ 成立当且仅当 T 是路径图 P_{2m} 。

当 $b \geq 3, m = br + 1, r \in \mathbb{Z}_+$ 时，等号 $\sigma_2(T) = \lambda_2(CG_{1,b-1;2r})$ 成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1,b-1;2r} \cong Sp_{1,b-1;2r+1,2r}$ 。

当 $b \geq 3, m = br + s, 3 \leq s \leq b, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 时，蜘蛛图 $Sp_{s-1,b-s+1;2r+2,2r+1} \in \tilde{\mathcal{T}}(b, br + s)$ 达到等号 $\sigma_2(T) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{8r+10}$ 。达到等号的树可能不唯一，例如 $Sp_{b-1,1;2r+2,2r+1}$ 和 $Sp_{b;2r+2}$ 都属于 $\tilde{\mathcal{T}}(b, br + b)$ 且都达到等号 $\sigma_2(T) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{8r+10}$ 。

证明. 设 T 为具有 b 个叶子和最大匹配数 m 的树。

1. $m = 1$

如果 $m = 1$ ，则 T 是星图且 $\lambda_2(T) = 1$ 。

2. $m = 2$

如果 $m = 2$, 则 T 是螃蟹图 $CG_{b_1, b-b_1; 1}$, 其中 $b_1 = 1, 2, \dots, b-1$ 。我们有 $\lambda_2(T) = \lambda_2(CG_{b_1, b-b_1; 1}) \leq \lambda_2(CG_{1, b-1; 1})$ 。等号成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1, b-1; 1}$ 。

3. $m \geq 3$ 且 $b = 2$

如果 $m \geq 3$ 且 $b = 2$, 则 T 是路径图 P_{2m} 或 P_{2m+1} 。我们有 $\sigma_2(T) = \lambda_2(P_{2m})$ 或 $\sigma_2(T) = \lambda_2(P_{2m+1})$ 。

4. $b \geq 3$ 且 $m = br + 1, r \in \mathbb{Z}_+$

假设 $b \geq 3$ 且 $m = br + 1$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_+$ 。根据 lemma 2.6, T 的直径至少为 $4r + 1$ 。

(a) 如果 T 的直径至少为 $4r + 2$, 则 $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(P_{4r+3}) < \lambda_2(CG_{1, b-1; 2r})$ 。

(b) 如果 T 的直径恰好为 $4r + 1$, 则根据 lemma 2.7, 树 T 是螃蟹图 $CG_{b_1, b-b_1; 2r}$, 其中 $b_1 = 1, 2, \dots, b-1$ 为正整数。所以 $\lambda_2(T) = \lambda_2(CG_{b_1, b-b_1; 2r}) \leq \lambda_2(CG_{1, b-1; 2r})$ 。等号成立当且仅当 T 是螃蟹图 $CG_{1, b-1; 2r}$ 。

5. $b \geq 3$ 且 $m = br + 2, r \in \mathbb{Z}_+$

假设 $b \geq 3$ 且 $m = br + 2$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_+$ 。根据 lemma 2.9, T 的直径至少为 $4r + 3$ 。所以 $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(P_{4r+4})$ 。

6. $b \geq 3$ 且 $m = br + s, 3 \leq s \leq b, r \in \mathbb{Z}_+$

假设 $b \geq 3$ 且 $m = br + s$, 其中 $3 \leq s \leq b, r \in \mathbb{Z}_+$ 。根据 lemma 2.8, T 的直径至少为 $4r + 4$ 。所以 $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(P_{4r+5})$ 。

□

4 猜想

Conjecture 4.1. 设 b, r 为整数, 满足 $b \geq 2$ 且 $r \geq 1$ 。设 T 为具有 b 个叶子且最大匹配数为 $br + 2$ 的树。则 $\sigma_2(T) \leq \sigma_2^-(ES_{b, 2r})$, 其中

$$\sigma_2^\pm(ES_{b; p}) = \frac{2bp + 3b - 3 \pm \sqrt{b^2 - 2b + 9}}{2(bp^2 + 3bp - 3p + 2b - 4)} \quad (80)$$

等号成立当且仅当 T 是 $ES(b, 2r)$ 。

Conjecture 4.2. 设 b, r 为整数, 满足 $b \geq 2$ 且 $r \geq 1$ 。设 T 为具有 b 个叶子且最大匹配数为 $br + 2$ 的树。则对于 $b \geq 3, m = br + 2, r \in \mathbb{Z}_+$, 有 $\sigma_{2, \max}(T) \leq \lambda_2^-(ES_{b, 2r})$ 。等号成立当且仅当 T 是特构图 $ES(b, 2r)$ 。