两个有趣的广义重积分问题

Sherr1 Nankai University

1 Problems

Exercise 1.1 12(4)

研究下列广义积分的敛散性：

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^{p_i}} dx_1 ... dx_n, p_i > 0, i = 1, 2, ..., n$$

其中：

$$\textbf{(a)}\Omega : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1; \quad \textbf{(b)}\Omega : \sum_{i=1}^{n} |x_i| > 1$$

Solution 首先我们先来证明 $\mathbb{R}^n$ 换元公式的 *Jacobi* 行列式形式：(见下一面 Lemma1.1)

Lemma 1.1

对于 $\mathbb{R}^n$ 的球，我们可以有如下换元：

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ ... \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$$

则其 *Jacobi* 行列式：

$$\frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(r, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 ... \sin\varphi_{n-2}$$

Proof

$$\mathcal{J} = \frac{D(x_1,...,x_n)}{D(r,\varphi_1,...,\varphi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \prod_{i=1}^{n-2}\sin\varphi_i\cos\varphi_{n-1} & \prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i \\ -r\sin\varphi_1 & r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_1\prod_{i=2}^{n-2}\sin\varphi_i & r\cos\varphi_1\prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i & r\cos\varphi_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin\varphi_i \end{vmatrix}$$

从第二行开始提出公因式 r，接着用第一行的 $\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$ 倍加到第二行上可得：

$$\mathcal{J} = r^{n-1}\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \prod_{i=1}^{n-2}\sin\varphi_i\cos\varphi_{n-1} & \prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i \\ 0 & \frac{1}{\cos\varphi_1}\cos\varphi_2 & \frac{1}{\cos\varphi_1}\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \cos\varphi_{n-1}\frac{1}{\cos\varphi_1}\prod_{i=2}^{n-2}\sin\varphi_i & \frac{1}{\cos\varphi_1}\prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i & \cos\varphi_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin\varphi_i \end{vmatrix}$$

按照第一行展开有：

$$= r^{n-1}\cos\varphi_1\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos\varphi_1}\cos\varphi_2 & \frac{1}{\cos\varphi_1}\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \cos\varphi_{n-1}\frac{1}{\cos\varphi_1}\prod_{i=2}^{n-2}\sin\varphi_i & \frac{1}{\cos\varphi_1}\prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & \sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \cos\varphi_2\cos\varphi_{n-1}\prod_{i=1, i\neq 2}^{n-2}\sin\varphi_i & \cos\varphi_2\prod_{i=1, i\neq 2}^{n-1}\sin\varphi_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i & \cos\varphi_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin\varphi_i \end{vmatrix}$$

再提出第一行公因子 $\dfrac{1}{\cos\varphi_1}$ 和后 $n-2$ 行的 $\sin\varphi_1$ 有：

$$\mathcal{J}=r^{n-1}\cos\varphi_1\cdot\frac{\sin^{n-2}\varphi_1}{\cos\varphi_1}\begin{vmatrix}\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \cos\varphi_{n-1}\prod_{i=2}^{n-2}\sin\varphi_i & \prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\cos\varphi_3 & \cdots & \cos\varphi_2\cos\varphi_{n-1}\prod_{i=3}^{n-2}\sin\varphi_i & \cos\varphi_2\prod_{i=3}^{n-1}\sin\varphi_i\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_i & \cos\varphi_{n-1}\prod_{i=2}^{n-2}\sin\varphi_i\end{vmatrix}$$

可以见到上式的行列式部分和最开始的行列式提出 r 因子的部分是相同的，故我们有：

$$\mathcal{J}=r^{n-1}\cdot\sin^{n-2}\varphi_1\cdot T_2=r^{n-1}\cdot\sin^{n-2}\varphi_1\cdot\sin^{n-3}\varphi_2\cdot T_3=...=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1...\sin\varphi_{n-2}$$

故上述引理成立. □

(a) 由于 $\Omega:\sum_{i=1}^{n}|x_i|\le 1$ 内的奇点有且仅有 $(0,0,...,0)$

故我们只需考虑 $\Omega':\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{p_i}\le 1$ 内广义积分收敛情况即可.

令 $y_i=|x_i|^{\frac{p_i}{2}}(1\le i\le n)$，则 $|x_i|=y_i^{\frac{2}{p_i}}(1\le i\le n)$

则由隐函数存在定理我们去求 $Jacobi$ 行列式:

$$\frac{D(x_1,...,x_n)}{D(y_1,...,y_n)}=\frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}p_i}\prod_{k=1}^{n}y_k^{\frac{2}{p_k}-1}$$

则

$$\int_{\Omega'}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|_i^p}dx_1...dx_n=\frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}p_i}\int_{\sum_{k=1}^{n}y_k^2\le 1}\frac{\prod_{k=1}^{n}y_k^{\frac{2}{p_k}-1}}{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}dy_1...dy_n(\clubsuit)$$

下面我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的球坐标换元：

$$\begin{cases}y_1=r\cos\theta_1\\ y_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ ... & r\in[0,1],\theta_i\in[0,\pi](2\le i\le n-1),\theta_1\in[0,2\pi]\\ y_{n-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ y_n=r\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{cases}$$

由隐函数存在定理我们去求 $Jacobi$ 行列式:

$$\frac{D(y_1,...,y_n)}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1...\sin\theta_{n-2}$$

回到 (♣) 式，我们有：

$$\begin{aligned}(\clubsuit)=&\frac{2^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}p_i}\left(\int_0^1 r^{-2}r^{n-1}r^{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{p_i}-1\right)}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}|\cos\theta_1|^{\frac{2}{p_1}-1}|\sin\theta_1|^{\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{2}{p_i}-1\right)+n-2}d\theta_1\right)\\&\left(\int_0^{\pi}|\cos\theta_2|^{\frac{2}{p_2}-1}|\sin\theta_2|^{\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{2}{p_i}-1\right)+n-3}d\theta_2\right)...\left(\int_0^{\pi}|\cos\theta_{n-1}|^{\frac{2}{p_{n-1}}}|\sin\theta_{n-1}|^{\frac{2}{p_n}}d\theta_{n-1}\right)\\=&\frac{2^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}p_i}\left(\int_0^1 r^{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)-1}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}|\cos\theta_1|^{\frac{2}{p_1}-1}|\sin\theta_1|^{2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i}-1}d\theta_1\right)\\&\left(\int_0^{\pi}|\cos\theta_2|^{\frac{2}{p_2}-1}|\sin\theta_2|^{2\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{p_i}-1}d\theta_2\right)...\left(\int_0^{\pi}|\cos\theta_{n-1}|^{\frac{2}{p_{n-1}}}|\sin\theta_{n-1}|^{\frac{2}{p_n}}d\theta_{n-1}\right)\end{aligned}$$

(**Remark**: 这里的三角函数都套上绝对值是由于 $y_i\geq 0(\forall 1\leq i\leq n)$)
由于奇点有且仅有 $(0,0,...,0)$，故我们考虑 $x_i\to 0(1\leq i\leq n)$ 的情况：

$$|\cos\theta_i|^m\sim|\frac{\pi}{2}-\theta_i|^m(\theta_i\to\frac{\pi}{2})\quad|\sin\theta_i|^m\sim\theta_i^m(\theta_i\to 0)\quad|\sin\theta_i|^m\sim|\pi-\theta_i|^m(\theta_i\to\pi)$$

$$|\cos\theta_i|^m\sim|\frac{3\pi}{2}-\theta_i|^m(\theta_i\to\frac{3\pi}{2})\quad|\sin\theta_i|^m\sim|2\pi-\theta_i|^m(\theta_i\to 2\pi)$$

结合 $|\sin\theta_i|^m$ 和 $|\cos\theta_i|^m$ 的指数 m 大于 -1，我们可知后面括号项积分内含三角函数的均收敛
这是由于 $\int_0^1 x^m dx$ 在 $m>-1$ 时收敛.
对于 $\left(\int_0^1 r^{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)-1}dr\right)$，欲使其收敛，则：

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)-1>-1\iff\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$$

则由则由 $\left(\int_0^1 r^{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)-1}dr\right)$ 收敛且后面的每项均收敛可知 (♣) 收敛.
若否，则由 $\left(\int_0^1 r^{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)-1}dr\right)$ 且后面含三角函数的项均不 $\to 0$ 可知 (♣) 发散！
综上：原广义积分收敛 $\iff\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$，反之发散.

(b) 由于 $\Omega:\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|>1$ 内的奇点有且仅有无穷原点
故我们只需考虑 $\Omega'':\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^{p_i}>1$ 内广义积分收敛情况即可.
令 $|y_i|=|x_i|^{\frac{p_i}{2}}(1\leq i\leq n)$，则 $|x_i|=|y_i|^{\frac{2}{p_i}}(1\leq i\leq n)$

我们做与 **(a)** 相同的操作，有：

由隐函数存在定理我们去求 *Jacobi* 行列式:

$$\frac{D(x_1,...,x_n)}{D(y_1,...,y_n)}=\frac{2^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}p_i}\prod_{k=1}^{n}y_k^{\frac{2}{p_k}-1}$$

则

$$\int_{\Omega''}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|_i^p}dx_1...dx_n=\frac{2^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}p_i}\int_{\sum_{k=1}^{n}y_k^2\le 1}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}y_k^{\frac{2}{p_k}-1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2}dy_1...dy_n(\spadesuit)$$

我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的球坐标换元：

$$\begin{cases} y_1=r\cos\psi_1 \\ y_2=r\sin\psi_1\cos\psi_2 \\ ... \\ y_{n-1}=r\sin\psi_1\sin\psi_2...\sin\psi_{n-2}\cos\psi_{n-1} \\ y_n=r\sin\psi_1\sin\psi_2...\sin\psi_{n-2}\sin\psi_{n-1}\end{cases} r\in[1,+\infty),\psi_i\in[0,\pi](2\le i\le n-1),\psi_1\in[0,2\pi]$$

由隐函数存在定理我们去求 *Jacobi* 行列式:

$$\frac{D(y_1,...,y_n)}{D(r,\psi_1,...,\psi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\psi_1...\sin\psi_{n-2}$$

回到 ($\spadesuit$) 式，我们有：

$$\begin{aligned}(\spadesuit)=&\frac{2^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}p_i}\left(\int_1^{+\infty}r^{-2}r^{n-1}r^{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{p_i}-1\right)}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}|\cos\psi_1|^{\frac{2}{p_1}-1}|\sin\psi_1|^{\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{2}{p_i}-1\right)+n-2}d\psi_1\right)\\ &\left(\int_0^{\pi}|\cos\psi_2|^{\frac{2}{p_2}-1}|\sin\psi_2|^{\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{2}{p_i}-1\right)+n-3}d\psi_2\right)...\left(\int_0^{\pi}|\cos\psi_{n-1}|^{\frac{2}{p_{n-1}}}|\sin\psi_{n-1}|^{\frac{2}{p_n}}d\psi_{n-1}\right)\\ =&\frac{2^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}p_i}\left(\int_1^{+\infty}r^{2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)-1}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}|\cos\psi_1|^{\frac{2}{p_1}-1}|\sin\psi_1|^{2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i}-1}d\psi_1\right)\\ &\left(\int_0^{\pi}|\cos\psi_2|^{\frac{2}{p_2}-1}|\sin\psi_2|^{2\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{p_i}-1}d\psi_2\right)...\left(\int_0^{\pi}|\cos\psi_{n-1}|^{\frac{2}{p_{n-1}}}|\sin\psi_{n-1}|^{\frac{2}{p_n}}d\psi_{n-1}\right)\end{aligned}$$

(**Remark**: 这里的三角函数都套上绝对值是由于 $y_i\ge 0(\forall 1\le i\le n)$)

由于奇点有且仅有无穷远点，故我们考虑 $x_i \to +\infty(1 \le i \le n)$ 的情况：

$$|\cos\psi_i|^m \sim |\frac{\pi}{2} - \psi_i|^m(\psi_i \to \frac{\pi}{2}) \quad |\sin\psi_i|^m \sim \psi_i^m(\psi_i \to 0) \quad |\sin\psi_i|^m \sim |\pi - \psi_i|^m(\psi_i \to \pi)$$

$$|\cos\psi_i|^m \sim |\frac{3\pi}{2} - \psi_i|^m(\theta_i \to \frac{3\pi}{2}) \quad |\sin\psi_i|^m \sim |2\pi - \psi_i|^m(\psi_i \to 2\pi)$$

结合 $|\sin\psi_i|^m$ 和 $|\cos\psi_i|^m$ 的指数 m 大于 -1，我们可知后面括号项积分内含三角函数的均收敛这是由于 $\int_0^1 x^m dx$ 在 $m > -1$ 时收敛.

对于 $\left(\int_1^{+\infty} r^{2\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1\right) - 1} dr\right)$，欲使其收敛，则：

$$2\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1\right) - 1 < -1 \iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} < 1$$

则由则由 $\left(\int_1^{+\infty} r^{2\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1\right) - 1} dr\right)$ 收敛且后面的每项均收敛可知 (♠) 收敛.

若否，则由 $\left(\int_1^{+\infty} r^{2\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1\right) - 1} dr\right)$ 且后面含三角函数的项均不 $\to 0$ 可知 (♠) 发散！

综上：原广义积分收敛 $\iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} < 1$，反之发散.

□

Exercise 1.2 15

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶实对称正定矩阵，$b_1, ..., b_n$ 和 c 均是实数. 求

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^n b_ix_i + c\right) dx_1...dx_n$$

其中 $\exp(u)$ 表示 e^u.

Solution 记 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathbf{T}}, \mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$，则有：

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^n b_ix_i + c\right) dx_1...dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + c\right) d\mathbf{x}$$

考虑消去 $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} - c$ 的一次项，即要求 $\bar{\mathbf{x}}$ 使得：

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^{\mathbf{T}}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + c' = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} - c$$

解得：$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, c' = -c - \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$，令 $\mathbf{\Psi} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b}^{\mathbf{T}} & \mathbf{c} \end{vmatrix}$，通过分块矩阵初等变换我们有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b}^{\mathbf{T}} & \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{b}^{\mathbf{T}} & \mathbf{c} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{b}^{\mathbf{T}} & \mathbf{c} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{vmatrix} \\
&= \det(\mathbf{A}) \cdot (c + \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = \det(\mathbf{A}) \cdot (-c') \\
&\Rightarrow c' = -\frac{\mathbf{\Psi}}{\det(\mathbf{A})}
\end{aligned}$$

我们基于以上结果对积分 I 做平移变换，即令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$，而平移变换的 *Jacobi* 行列式为 1，故：

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + c\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} - c'\right) d\mathbf{y} = \exp\left(-\frac{\mathbf{\Psi}}{\det(\mathbf{A})}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}\right) d\mathbf{y}$$

由于 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，故存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{diag}\{\lambda_{\mathbf{1}}, ..., \lambda_{\mathbf{n}}\}, \quad \mathbf{Q}^{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}^{-\mathbf{1}}$$

作换元 $\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{y}$，则由于其是正交变换，故 $\dfrac{\partial(w_1, ..., w_n)}{y_1, ..., y_n} = 1$，从而有

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}\right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda_1 w_1^2 - ... - \lambda_n w_n^2) d\mathbf{w} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_1 w_1^2) dw_1\right) ... \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_n w_n^2) dw_n\right)
\end{aligned}$$

我们给出一个命题：

Proposition 1.1 15.3 例 2

概率积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Proof 我们先计算：

$$\Delta = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

由极坐标：

$$\begin{cases} x = r\cos\psi \\ y = r\sin\psi \end{cases} \quad r \geq 0, \psi \in [0, 2\pi]$$

由此可得：

$$\Delta = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

另一面，我们化广义积分为累次积分可得：

$$\pi = \Delta = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) = I$$

故：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

□

回到原题，我们令 $u_k = \sqrt{|\lambda_k|} w_k$，则 $-\lambda_k w_k^2 = u_k^2$，故：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_k w_k^2) dw_k = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u_k^2} du_k = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_k w_k^2) dw_k = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda_k|}}$$

故：

$$\mathcal{J} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_1 w_1^2) dw_1 \right) ... \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_n w_n^2) dw_n \right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda_k|}} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{|\lambda_k|}} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\det(\mathbf{A})}$$

故：

$$\begin{aligned} I &= \exp\left(-\frac{\mathbf{\Psi}}{\det(\mathbf{A})} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\mathbf{y}^\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{y} \right) d\mathbf{y} = \exp\left(\frac{\mathbf{\Psi}}{\det(\mathbf{A})} \right) \frac{\sqrt{\pi^n}}{\det(\mathbf{A})} \\ &= \exp(c') \frac{\sqrt{\pi^n}}{\det(\mathbf{A})} = \exp(c + \mathbf{b}^\mathbf{T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \frac{\sqrt{\pi^n}}{\det(\mathbf{A})} \end{aligned}$$

综上：

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \right) dx_1 ... dx_n = \exp(c + \mathbf{b}^\mathbf{T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \frac{\sqrt{\pi^n}}{\det(\mathbf{A})}$$

□