



Distributions and Partial Differential Equations

SHERLOCK YOUNG

January 25, 2026



Copyright © 2025 Sherlock Young

Copying prohibited

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Art. No 00001

ISBN 111-11-1111-11-1

Edition 1.0

Cover design by Sherlock Young

Published by Three Squirrels

Printed in Tianjin

If you have any questions, please send email to nkuSherr1@nankai.edu.cn



1	广义函数	5
1.1	由来	5
1.2	广义函数的定义	6
1.2.1	基本空间	6
1.2.2	函数的磨光化	7
1.2.3	磨光的应用	10
1.3	广义函数及其基本运算	15
1.3.1	基本运算	17
2	卷积	23
2.1	函数与广义函数之间的卷积	23
2.1.1	函数与函数之间的卷积	23
2.1.2	广义函数与函数的卷积	24
2.2	广义函数与广义函数之间的卷积	27
3	Fourier 变换	30
3.1	急减函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	30
3.2	缓增广义函数 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	37

4	偏微分方程一般理论	43
4.1	一些定义	43
4.2	常见基本解	44
4.3	偏微分方程的分类	46
5	椭圆型方程	48
5.1	调和函数的性质	48
	5.1.1 Laplace 算子的基本解	48
	5.1.2 平均值公式	53
	5.1.3 极值原理	55
	5.1.4 边值问题	56
	5.1.5 格林公式	59
5.2	Laplace 方程的 Dirichlet 问题	63
5.3	调和函数的其他性质	75
5.4	亚椭圆	81
6	抛物型方程	83
6.1	热传导方程的导出	83
6.2	热传导方程的边初值问题	90
7	波动方程	106
8	习题	142
8.1	期末习题	142
8.2	作业	167
	8.2.1 作业 1	167
	8.2.2 作业 2	170
	8.2.3 作业 3	173
	8.2.4 作业 4	175
	8.2.5 作业 5	180
	8.2.6 作业 6	184
	8.2.7 作业 7	188
	8.2.8 作业 8	190
	8.2.9 作业 9	194
	8.2.10 作业 10	196

1. 广义函数

1.1	由来	5
1.2	广义函数的定义	6
1.2.1	基本空间	6
1.2.2	函数的磨光化	7
1.2.3	磨光的应用	10
1.3	广义函数及其基本运算	15
1.3.1	基本运算	17

这章我们主要来介绍广义函数的由来、定义及其基本运算。

1.1 由来

定义 1.1.1 (Heavidade 函数).


$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

我们定义如下函数:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

不难发现有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

 注. 从物理意义上表示来看, 实际上可以看成是一条从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的一根细杆, 质量为 1 且集中在 $x=0$ 处. 换言之, $\delta(x)$ 可以看成是密度.

事实上, 我们可以换一种方式定义 $H(t)$:

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

换言之:

$$\delta(t) = H'(t) \quad (1.4)$$

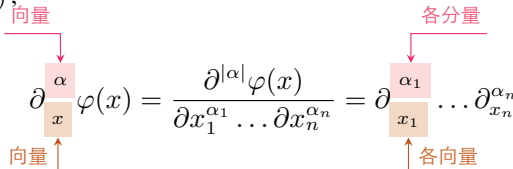
 下面我们引入重指标的定义:

定义 1.1.2 (重指标). (*Schwartz* 记号) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, 记 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为重指标.

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

对 $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\frac{\partial^\alpha \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x) \quad (1.5)$$



1.2 广义函数的定义

1.2.1 基本空间

定义 1.2.1 (基本空间). 具有紧支集的光滑函数的集合. 通常记为:

$$C_0^\infty \quad (1.6)$$



 我们下面给出一个 C_0^∞ 的例子.

例 1.2.1 (eg of C_0^∞).


$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. 支集为 $B(0, 1)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty$.

定义 1.2.2 (支集). 使函数 $f(x)$ 值不为 0 的点的集合的闭包称为函数 $f(x)$ 的支集. 记作 $\text{supp} f$.

$$\text{supp} f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}. \quad (1.7)$$

我们把紧的支集称为**紧支集**.

 **注.** **紧集** 指的是一个集合的任意开覆盖都有有限子覆盖。

 **注.** 实际上, 根据定义我们可知: 支集一定为闭集.

定义 1.2.3. 函数序列 $\varphi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中趋于 0 即指:

(i) 存在一个紧集 $K \subseteq \Omega$ 使对一切 $\varphi_n(x)$

$$\text{supp } \varphi_n \subseteq K; \quad (1.8)$$

↑ 具有紧支集

(ii) $\varphi_n(x)$ 之任意固定阶微商之序列皆对 x 一致收敛于 0 (不要求对于微商的阶数具有一致性).

 **换言之:**

(i) 在 K 之外, 所有 $\varphi_n(x)$ 均为 0;

(ii) 在 K 上, 对固定的 $\alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得 $n > N$ 时, 对 $\forall x \in K: |\partial_x^\alpha \varphi_n(x)| < \varepsilon$.

定义 1.2.4 ($\mathcal{D}(\Omega)$). 赋以上述收敛性以后 $C_0^\infty(\Omega)$ 称为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 空间, 上述的趋于 0 时常称为“在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中”.

$\mathcal{D}(\Omega)$ 是最常见的基本空间, 它的元素常称为**试验函数**.

 **注.** $C_0^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$ 空间的对偶空间常记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$, C^∞ 空间的对偶空间常记为 $\mathcal{E}'(\Omega)$.

1.2.2 函数的磨光化

定义 1.2.5 (磨光). 取 $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且设 $\text{supp } g \subset \{x: |x| \leq 1\}$ 且 $c = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \neq 0$, 于是作 $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 我们有

$$\int \varphi_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{c} \int g(x) dx = 1.$$

以 $\varphi_\varepsilon(x)$ 为“核”作其与连续函数 $f(x)$ 的**卷积**:

$$f_\varepsilon(x) = \int f(\xi) \varphi_\varepsilon(x - \xi) d\xi = (J_\varepsilon f)(x). \quad (1.9)$$

$f_\varepsilon(x)$ 称为 $f(x)$ 的**磨光化 (正则化)**, J_ε 称为**磨光算子**, φ_ε 称为**磨光核**.

我们要验证函数的磨光可以作如下的考虑:

设 $f(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ 连续且有紧支集. 定义 $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) J_\varepsilon(x - y) dy = (J_\varepsilon * f)(x)$.

(i) 是否有意义? —— 卷积有意义;

(ii)

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) = \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(y) J_\varepsilon(x - y) dy = (J_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\partial_x^\alpha J_\varepsilon(x - y)) dy = (J_\varepsilon * f)(x)$$

 将对 $f(x)$ 的微分 ($K_\varepsilon = K \cup \{x : 0 < \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$) 转到对 $J_\varepsilon(x)$ 的微分.

(iii)

$$\text{supp} f_\varepsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\} := K_\varepsilon$$

(iv) 是否有 $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$? $x \notin K_\varepsilon$ 时, $|x - y| > \varepsilon, \forall y \in K \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 0$.

其中:

定义 1.2.6 (距离).

$$\text{dist}(x, y) := \inf_{y \in K} |x - y| \quad (1.10)$$

为 x 到 K 的距离.

 **注.** 说到底, 磨光的目的是: 将不够光滑的函数用光滑函数逼近.

下面我们关注一个利用磨光证明的重要定理:

定理 1.2.1. 如果 $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, 则在任一紧集 K 上一致地有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \partial^\alpha f(x), \quad |\alpha| \leq k.$$

如果进一步设 $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ 则

$$\text{supp} f_\varepsilon \subseteq \{x; \text{dist}(x, \text{supp} f) \leq \varepsilon\}.$$

我们先证明一个重要的命题:

命题 1.2.2. 紧集上的连续函数必然一致连续.

Proof. 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间, $K \subset X$ 是紧集, 且 $f: K \rightarrow Y$ 连续. 需要证明 f 在 K 上一致连续.

由于 f 在 K 上连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $x \in K$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得当 $y \in K$ 且 $d_X(x, y) < \delta_x$ 时, 有 $d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

考虑开球族 $\{B(x, \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in K}$, 它构成 K 的一个开覆盖. 由于 K 是紧集, 存在有限子覆盖, 即存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$, 使得

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right).$$

令 $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \frac{\delta_{x_2}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\} > 0$.

现在, 取任意 $p, q \in K$ 满足 $d_X(p, q) < \delta$. 由于 $p \in K$, 存在某个 i ($1 \leq i \leq n$) 使得 $p \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$, 即 $d_X(p, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$.

由三角不等式:

$$d_X(q, x_i) \leq d_X(q, p) + d_X(p, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

因此, $q \in B(x_i, \delta_{x_i})$.

由 δ_{x_i} 的定义, 有:

$$d_Y(f(p), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d_Y(f(q), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由三角不等式:

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(q)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

所以, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $p, q \in K$ 满足 $d_X(p, q) < \delta$, 有 $d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon$. 即 f 在 K 上一致连续. □

我们先来考虑上述定理的连续版本:

引理 1.2.3 (局部性质). 设 $f(x)$ 在 Ω 上连续, 则对 Ω 上的任意紧子集 K , 一定存在 C_0^∞ 函数列在 K 上一致收敛于 $f(x)$.

Proof. 由 $K \subset \Omega$, $\exists \epsilon_0 > 0$ 使得 $K_{\epsilon_0} \subset \Omega$. (这是由于紧集在开集中可以被稍大的紧集所包含).

$$\text{令 } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\epsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\epsilon_0} \end{cases}, \text{ 则 } \text{supp } \tilde{f} \in K_{\epsilon_0}.$$

对 \tilde{f} 进行磨光, 由 $\tilde{f}_\epsilon(x) = J_\epsilon(x) * \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_\epsilon(x) \in C^\infty(\Omega) \supseteq \text{supp } \tilde{f}_\epsilon(x)$.

$\text{supp } J_\epsilon \subseteq B(0, \epsilon)$, $J_\epsilon \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x) = 1$ 且 J_ϵ 局部可积. 另一面, 光滑函数与局部可积函数的卷积仍然光滑, 且 \tilde{f} 为紧支集函数故 $\tilde{f} \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$f_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) J_\epsilon(x-y) dy, \text{ 取 } 0 < \epsilon < \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \text{supp } \tilde{f}_\epsilon(x) \subseteq K_{\epsilon_0+\epsilon} \subseteq K_{2\epsilon_0} \subset \Omega \Rightarrow \tilde{f}_\epsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

$\forall x \in K$:

$$|\tilde{f}_\epsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) J_\epsilon(x-y) dy - f(x) \right|$$

其中:

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) J_\epsilon(x-y) dy$$

于是:

$$|\tilde{f}_\epsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{f}(y) - f(y)) J_\epsilon(x-y) dy \right|$$

而对于 $y \in K_\epsilon \subseteq K_{\epsilon_0}$, 有 $\tilde{f}(y) = f(y)$

故

$$|\tilde{f}_\epsilon(x) - f(x)| \leq \max_{|x-y| \leq \epsilon, x \in K} |f(y) - f(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y) dy \right| \rightarrow 0$$

紧集上的连续函数必然一致连续, 故 $|f(y) - f(x)| < \epsilon \rightarrow 0$

$\uparrow = 1$

故 $\{f_\epsilon\}$ 即为我们所找的函数列, 其在 Ω 内的任意紧子集上一致收敛于原函数 f . □

接下来, 我们回到定理的证明: 让我们重述一下定理:

定理. 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ 必存在 C_0^∞ 函数列 f_ϵ 在 K 一致地有:

$$\text{对固定的 } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| < k, \partial_x^\alpha f_\epsilon(x) \rightarrow \partial_x^\alpha f.$$



证明. 我们作与上述引理证明地同样构造, 则:

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) dy - (\partial_x^\alpha f(x)) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha f(x)) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} J_\varepsilon(x-y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (-1)^{|\alpha|} (\partial_{y_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{y_n}^{\alpha_n} J_\varepsilon(x-y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} \tilde{f}(y) (-1)^{|\alpha|} (\partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy \end{aligned}$$

命题 1.2.4 (分部积分). $u, v \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 开集, 则:

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) \partial_{x_j} u(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) (\partial_{x_j} v(x)) dx + \int_{\partial\Omega} uv \cdot \vec{n}_j ds \quad (1.11)$$

其中 \vec{n}_j 表示 Ω 外法向量 \vec{n} 的第 j 个分量.

结合上述命题, 进而有:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy &= \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} \tilde{f}(y) (-1)^{|\alpha|} (\partial_y^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} (-1)^{|\alpha|} (\partial_y^\alpha \tilde{f}(y)) J_\varepsilon(x-y) dy + \int_{\partial\Omega} \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) \cdot \vec{n}_j ds \end{aligned}$$

而 C_0^∞ 函数 f 有 $\text{supp} f \subsetneq \Omega$, 故 $\tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y)|_{x \in \partial\Omega} = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) \cdot \vec{n}_j ds = 0$.

故:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} (-1)^{|\alpha|} (\partial_y^\alpha \tilde{f}(y)) J_\varepsilon(x-y) dy + \int_{\partial\Omega} \tilde{f}(y) J_\varepsilon(x-y) \cdot \vec{n}_j ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} (\partial_y^\alpha \tilde{f}(y)) J_\varepsilon(x-y) dy \end{aligned}$$

回到最初式子, 我们接下来仿照引理的证明即有:

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)) dy - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha f(x)) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} (\partial_y^\alpha \tilde{f}(y)) J_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha f(x)) J_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &\leq \max_{|x-y| \leq \varepsilon, x \in K} |\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) dy \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

仍然沿用: 紧集上的连续函数必然一致连续, 结合 $\partial_x^\alpha f(x)$ 为连续函数

故 $|\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| = |\partial_y^\alpha f(y) - \partial_x^\alpha f(x)| < \varepsilon \rightarrow 0$

□

1.2.3 磨光的应用

✎ 截断函数 (cut-off function):

定义 1.2.7. 设区域 Ω_1 含于 Ω_2 , $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2^o$, 则记为 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$.

定理 1.2.5. 如果 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$, 则存在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数 $\varphi(x) \geq 0$, 使得

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1; \\ 0, & x \notin \Omega_2. \end{cases} \quad (1.12)$$

我们把上述得到的这样的 $\varphi(x)$ 称为一个**截断函数**.

问题 1.2.1 (截断函数的构造). 取特征函数 $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\varepsilon_0} \end{cases}$

令 $f(x) = J_\varepsilon(x) * \chi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) J_\varepsilon(x-y) dy$, 我们断言有 $f(x)$ 即为**截断函数**, 下面我们从下面两个方面来验证:

(i) $\partial_x^\alpha f(x) = \int \chi(y) \partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy \Rightarrow f(x) \in C^\infty$ 且 $\text{supp} f \subseteq K_{\varepsilon_0+\varepsilon} \subseteq K_{2\varepsilon_0}$, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) 当 $x \in K$ 时: $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) J_\varepsilon(x-y) dy$, $x \in K \Rightarrow \text{supp} J_\varepsilon(x-y) = \{|x-y| < \varepsilon\} \Rightarrow y \in K_\varepsilon \Rightarrow \chi(y) = 1 \Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) dy = 1$; 当 $x \notin K_{2\varepsilon_0}$ 时: $\chi(y) = 0 : \text{supp} J_\varepsilon(x-y) = \{|x-y| \leq \varepsilon\} \subseteq K_{\varepsilon_0}^c \Rightarrow y \notin K_\varepsilon \Rightarrow f(x) = 0$.

命题 1.2.6. 设 $f(x)$ 为上述截断函数, 则有:

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_\alpha \varepsilon_0^{-|\alpha|} \quad (1.13)$$

证明. $\partial_x^\alpha f(x) = \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) J_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy$.

磨光核 $J_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n} j_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 其中 $j_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$;

一般磨光核 取 $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq 1$, $\text{supp} g(x) \subseteq \overline{B(1,0)}$, $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = c \neq 0$.

磨光核: $J_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha f(x) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \partial_x^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \partial_x^\alpha \frac{1}{c\varepsilon^n} j_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{c\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \varepsilon^{-|\alpha|} j_1^{|\alpha|}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \right| = \left| \frac{1}{c\varepsilon^n} \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) j_1^{|\alpha|}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{c\varepsilon^n} \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \left| j_1^{|\alpha|}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy = \frac{1}{c\varepsilon^n} \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |j_1^{|\alpha|}(\tau)| \varepsilon^n d\tau \\ &= C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|} = C_\alpha \varepsilon_0^{-|\alpha|} \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{取 } \tau = \frac{x-y}{\varepsilon} \\ \uparrow \text{取 } \varepsilon_0 = \varepsilon \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \varepsilon^n d\tau \\ \uparrow = \det J \end{array} \end{aligned}$$

实际上, 截断函数就是对特征函数进行磨光, 将复杂问题分为多个简单问题.

□

♡ 单位分解

定义 1.2.8 (单位分解). 对于 A 的任意开覆盖 \mathcal{O} , 必存在一组 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数族 $\Phi = \{\varphi_a(x)\}$, 使

(i) $0 \leq \varphi_a(x) \leq 1$;

(ii) 任一点 $x \in A$ 均有一个邻域 V 使得只有有限多个 $\varphi_a(x)$ 在 V 上不为 0, 亦即只有有限多个 $\text{supp } \varphi_a(x)$ 与 V 之交非空. 这个性质说成是 $\{\text{supp } \varphi_a(x)\}$ 为局部有限的;

(iii) $\sum_a \varphi_a(x) = 1$. 因为每一点 x 只落在有限多个 $\text{supp } \varphi_a(x)$ 之中, 所以上述的和在每一点 x 上实际上是有限和而不会发生收敛性问题;

(iv) 对任意 $a \in I$, $\varphi_a(x)$ 的支集必位于 U_a 中.

这一 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数族 Φ 称为从属于 \mathcal{O} 的 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 单位分解.



证明.

Step1 我们有这样一个断言:

断言 1.2.7. 存在一组开集 $\{w_j\}_j$ 使得 $w_j \subset\subset U_j$ i.e. $\bar{w}_j \subset U_j^\circ, j = 1, 2, \dots, N$ 和 \bar{w}_j 是紧集且 $\{w_j\}_{j=1,2,\dots,N}$ 仍为开覆盖.



依次构造 w_j 令紧集 $C_1 = A - (\bigcup_{i=2}^N U_i) \subset\subset U_1$, 则必然存在开集 w_1 使得 $C_1 \subset\subset w_1 \subset\subset U_1$ 且 $A \subset w_1 \cup (\bigcup_{i=1}^N U_i)$

设已经完成 w_1, \dots, w_{k-1} 满足紧集 $C_k = A - (\bigcup_{j=1}^{k-1} w_j) \cup (\bigcup_{j=k+1}^N U_j) \subset\subset U_k$, 则必然存在开集 w_k 使得 $C_k \subset\subset w_k \subset\subset U_k$ 且 $A \subset (\bigcup_{j=1}^k w_j) \cup (\bigcup_{j=k+1}^N U_j)$, $\Rightarrow \{w_1, \dots, w_N\}$ 为 A 的开覆盖.

类似截断函数的构造可得: $\psi_j \in C_0^\infty(U_j), \psi_j = \begin{cases} 1, & x \in \bar{w}_j \\ 0, & x \notin \bar{w}_j \subset U_j \end{cases}, \sum_j \psi_j(x) = c \geq 1$

令 $\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_j \psi_j(x)}$ 单位化 $\Rightarrow \sum_j \varphi_j(x) = 1$

Step2 设 $A = \bigcup_j A_j$, A_j 为紧集且 $A_j \subset\subset A_{j+1}, \mathcal{O} = \{U_\alpha\}_\alpha$ 为 A 的开覆盖.

若将 **Step1** 中的结论应用 A_j 上 \Rightarrow 局部有限不能满足即 $\exists x_0 \in A_1$ s.t. 无限多 $\varphi_\alpha(x_0) \neq 0$.

考虑 $A_j - A_{j-1}^\circ$, 已知 \mathcal{O} 为 A 的开覆盖, $\mathcal{O} = \{U_i\}_{i \in I}$ 为开集; 找开集 $(A_{j+1} - A_{j-2}^\circ) \supset A_j - A_{j-1}^\circ$, 取 $\mathcal{O}_j = \{U_i \cap (A_{j+1}^\circ - A_{j-2}^\circ)\}$ 为 $A_j - A_{j-1}^\circ$ 的开覆盖.

应用 **Step1** 的构造, 得到 $\Psi_j = \{\psi_{j_k}\}$ 从属于 \mathcal{O}_j 的单位分解.

令 $\Psi = \{\Psi_j\}_j$ 一族 C_0^∞ 函数族 $\forall \psi_{j_k} \in \Psi$ 且 $\text{supp } \psi_{j_k} \subset U_{j_k}, 0 \leq \psi_{j_k} \leq 1$

断言 1.2.8. $\forall x \in A, \exists U_x$ 使得至多有限多个 $\text{supp } \psi_{j_k}$ 与之交集非空.

Proof. 任意取 $x_0 \in A \Rightarrow \exists j_0$ 使得 $x_0 \in A_{j_0}$ 对于 $\Psi_j : j \geq j_0 + 2$ 中的 ψ_{j_k} 一定在 x_0 处为 0.



$\Rightarrow \exists v_x$ 使得 v_x 只与有限多个 $\Psi_1, \dots, \Psi - j_0 + 1$ 中的 C_0^∞ 的支集交集非空。
最后将 $\sum_{j,k} \psi_{jk} = c \geq 0$ 单位化即可。 \square

Step3 设 A 为开集, 令 $A_j = \left\{ x : |x| \leq j, \text{dist}(x, \partial A) \geq \frac{1}{j} \right\}$, 则 A_j 为紧集且有 $A = \bigcup_j A_j$.
即构造一族上开无穷的紧集 A_j 去逼近 A .

Step4 A 为任意集合, \mathcal{O} 是 A 的开覆盖, $\mathcal{O} = \{U_i\}_{i \in I}$, $B = \bigcup_{j \in I} U_j$ 开集, 那么 B 上从属 \mathcal{O} 的单位分解.

此单位分解也是 A 的从属于 \mathcal{O} 的单位分解. \square

例 1.2.2. 设 $\varphi(x), f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 考虑偏微分算子 (PDO):

$$P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

其中: $a_\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则有:

$$P(\varphi f) = \sum_{|\beta| \leq m \text{ 且 } \beta < \alpha} \frac{1}{\beta!} \partial_x^\beta \varphi P^{(\beta)}(x, \partial_x) f$$

其中 $P^{(\beta)}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ 称为算子 $P(x, \partial_x)$ 的**象征 (Symbol)**.


算子 $P \xrightarrow{\text{Fourier变换}} \text{象征Symbol } P(\xi) \longrightarrow \xi \text{ 的多项式}$

求导 \downarrow

$P^{(\beta)}(x, \partial_x) \xleftarrow{\text{Fourier变换}} \partial_\xi^\beta P(\beta) \longrightarrow \xi \text{ 的多项式}$

问题. (i) 将 $P^{(\beta)}(x, \partial_x^\alpha)$ 的形式写出来 ($\beta \leq \alpha$)

$$\begin{aligned} P^{(\beta)}(x, \xi) &= \partial_\xi^\beta \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_\xi^\beta \xi^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\beta_n} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\alpha_1!}{(\alpha_1 - \beta_1)!} \dots \frac{\alpha_n!}{(\alpha_n - \beta_n)!} \xi_1^{\alpha_1 - \beta_1} \dots \xi_n^{\alpha_n - \beta_n} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \xi^{\alpha - \beta} \\ \Rightarrow P^{(\beta)}(x, \partial_x^\alpha) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \partial_x^{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

 注. 在偏微分方程与伪微分算子理论中, 对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 我们有:

$$\alpha! \triangleq \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

要证:

$$P(\varphi f) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} \partial_x^\beta \varphi \sum_{|\alpha| \leq m \& \alpha \geq \beta} a_\alpha(x) \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \partial_x^{\alpha - \beta} f \quad (1.14)$$

问题. (ii) 计算 $\partial_x^\alpha e^{\xi x}$

$\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha e^{\xi x} &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} e^{\xi_1 x_1} \dots e^{\xi_n x_n} \\ &= \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} e^{\xi_1 x_1} \dots e^{\xi_n x_n} \\ &= \xi^\alpha e^{\xi x} \end{aligned}$$

下面我们来证明 (1.14):

问题. 证明:

$$P(\varphi f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha (\varphi f) = \sum_{|\beta| \leq m \& \beta \leq \alpha} \partial_x^\beta \varphi R(x, \partial_x) f \quad (1.15)$$

证明. 为求 $R(x, \partial_x)$ 要求 R 的象征: $R(x, \xi)$.

设 $\varphi = e^{\xi x}, f = e^{\eta x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(\varphi f) &= P(e^{(\xi + \eta)x}) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha e^{(\xi + \eta)x} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (\xi + \eta)^\alpha e^{(\xi + \eta)x} \end{aligned} \quad (1.16)$$

又有:

$$\begin{aligned} P(\varphi f) &= \sum_{|\beta| \leq m \& \beta \leq \alpha} \partial_x^\beta e^{\xi x} R(x, \partial_x) e^{\eta x} \\ &= \sum_{|\beta| \leq m \& \beta \leq \alpha} \xi^\beta e^{\xi x} R(x, \eta) e^{\eta x} \\ &= \sum_{|\beta| \leq m \& \beta \leq \alpha} \xi^\beta e^{(\xi + \eta)x} R(x, \eta) \end{aligned} \quad (1.17)$$

而 $P=(1.16)=(1.17)$, 于是:

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta| \leq m \& \beta \leq \alpha} \xi^\beta R(x, \eta) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (\xi + \eta)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \frac{\alpha! \cdot \xi^\beta}{\beta! (\alpha - \beta)!} \eta^{\alpha - \beta} \\ &= \sum_{|\beta| \leq m \& \beta \leq \alpha} \xi^\beta \sum_{\beta \leq \alpha \& |\alpha| \leq m} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} a_\alpha(x) \eta^{\alpha - \beta} \\ \Rightarrow R(x, \partial_x) &= \sum_{\beta \leq \alpha \& |\alpha| \leq m} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} a_\alpha(x) \eta^{\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

代入 $P(\varphi f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha (\varphi f)$ 结论得证! \square

1.3 广义函数及其基本运算

定义 1.3.1 (广义函数). 广义函数即为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 即对于 $\forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$:

(i) **线性性**

c_1, c_2 实数,

$$\langle f, c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle f, \varphi_2 \rangle \quad (1.19)$$

(ii) **连续性**

若 $\varphi_j \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上, 则 $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$.



我们记广义函数空间为 $\mathcal{D}'(\Omega)$.

(iii) **连续的等价定义**

对任一紧集 $K \subset \Omega$, 必存在 c 和非负整数 k 使得 $\forall \varphi \in C_0^\infty(K)$ 都有:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi| \quad (1.20)$$

若 f 满足线性性 + 连续性则称 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

 **注.** 若对 $\forall K \subset \Omega$ 紧集, 均有统一的 k 使 (8.2) 成立, 则称 k 为 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 的阶数, 即 f 为 k 阶广义函数 (*Distribution*). 

下面我们来验证 (ii) \iff (iii):

证明.

(iii) \Rightarrow (ii) 已知 $\varphi_j \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的意义下: ① $\exists K_0$ 紧集使得 $\text{supp} \varphi_j \subset K_0$ 对 $\forall j$; ② 在 K_0 中 $\partial_x^\alpha \varphi_j(x) \rightarrow 0$ 对 \forall 固定的 α .

由 (iii) 对 $K_0, \exists c, k$ 使得 ① $\Rightarrow \varphi_j \in C_0^\infty(K_0)$

$$\Rightarrow |\langle f, \varphi_j \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial_x^\alpha \varphi_j| \xrightarrow{\text{②}} \rightarrow 0$$

(ii) \Rightarrow (iii) 反证法: 假设对某个 K 紧集 $\subset \Omega$, 对任意 c , 非负整数 k , $\exists \varphi \in C_0^\infty(K)$ 使得

$$|\langle f, \varphi \rangle| > c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial_x^\alpha \varphi|$$

对于 K_1 令 $c = k = j = 1, 2, \dots \Rightarrow \exists \varphi_j \in C_0^\infty(K_1) \xrightarrow{\text{假设}} |\langle f, \varphi_j \rangle| > c \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial_x^\alpha \varphi_j|$

令 $\psi_j = \frac{\varphi_j}{\langle f, \varphi_j \rangle} \in C_0^\infty(K_1) \Rightarrow \frac{1}{j} > \sum_{|\alpha| \leq j} |\partial_x^\alpha \psi_j|$

当 $j \rightarrow \infty \Rightarrow |\partial_x^\alpha \psi_j| \rightarrow 0 \Rightarrow \{\psi_j\}, \psi_j \in C_0^\infty(K_1), \text{supp} \psi_j \subseteq K_1$ 且 $\partial_x^\alpha \psi_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$

$\xrightarrow{\text{由} \mathcal{D}(\Omega)} \psi_j \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的意义下.

由 (ii) 可知 $\langle f, \psi_j \rangle \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, 但:

$$|\langle f, \psi_j \rangle| = \left| \langle f, \frac{\varphi_j}{\langle f, \varphi_j \rangle} \rangle \right| > 1 = \frac{|\langle f, \varphi_j \rangle|}{|\langle f, \varphi_j \rangle|}$$

矛盾!

□

例 1.3.1. 设 $f \in L_{loc}(\Omega)$ 即 f 是 Ω 上的局部可积函数, 则 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

 **注.** 这样的广义函数称为**正则广义函数**.



证明. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega'} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\text{supp} \varphi} f(x) \varphi(x) dx$$

线性性: 显然;

连续性: 对于 \forall 紧集 $K \in \subset \Omega \exists c, k$ 非负整数使得:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi|, \varphi \in C_0^\infty(K)$$

对紧集 $K \subset \Omega, \varphi \in C_0^\infty(K)$,

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_K f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x) \varphi(x)| dx \\ &\leq \sup_K |\varphi(x)| \int_K |f(x)| dx \\ &\leq c \cdot \sup_K |\varphi(x)| \quad \uparrow = c \end{aligned}$$

由此, 连续性得证.

□

例 1.3.2. $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) \Rightarrow |\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle| = |\varphi(0)| \leq \sup_K |\varphi(x)|$, 此时 $c = 1, k = 0$.

 **注.** 这样的广义函数称为**非正则广义函数 (奇异广义函数)**.




定义 1.3.2 (广义为 0). 设 U 为开集, $f \in \mathcal{D}'(U)$, 若对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(U)$ 都有 $\langle f, \varphi \rangle = 0$, 则称 f 在 U 上为 0, 或 $f|_U = 0$.

 注. 函数 φ 为 0 则有 $\varphi|_U = 0$.

 注. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f(x)$ 其中 x 并非 f 的自变量, 而是指示作用的变量. 

定义 1.3.3 (广义相等). 设 $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 若 $f_1 - f_2$ 在 Ω 上为 0, 则称 f_1, f_2 在 Ω 上相等.


即 $\forall \varphi \Rightarrow \langle f_1 - f_2, \varphi \rangle = 0$ 

定义 1.3.4 (广义函数的支集). 广义函数 f 的支集 $\text{supp} f$ 是 f 在其中为 0 的最大开集之余:

$$\text{supp} f = \{x : \exists \text{开集 } U \subset \Omega \text{ 使得 } x \in U \text{ 且在 } U \text{ 上 } f = 0\}^c \quad (1.21) \quad \img alt="cat icon" data-bbox="831 338 854 354"/>$$

定理 1.3.1 (局部化定理).

(i)(整体 \Rightarrow 局部) 若 f 在 Ω 上为 0, 则 f 在 Ω 的任一开子集上限制为 0.

(ii)(局部 \Rightarrow 整体) 若 Ω 上有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 且 $f|_{U_\alpha} = 0, \forall \alpha$, 则 $f = 0$ 在 Ω 上. 

证明.

(i) 已知 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \langle f, \varphi \rangle = 0$

设 u 是 Ω 的任一开子集, 要证 $\forall \psi \in C_0^\infty(u), \langle f, \psi \rangle = 0$.

由 $\psi \in C_0^\infty(u)$ 可知: $\text{supp} \psi$ 紧可知 $\psi \not\subseteq u$.

作零延拓, 令 $\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi(x) & x \in u \\ 0 & x \in \Omega - u \end{cases}$, 则 $\langle f, \psi \rangle = \langle f, \tilde{\psi} \rangle = 0$

此时 $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega)$ 又由任意性知 $f|_u = 0$.

(ii) 任取 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, 记 $K = \text{supp} \varphi$ 则 K 为紧集, 由 $K \subseteq \Omega$ 可知 $\{U_\alpha\}$ 是 K 的开覆盖, 从而必定有有限子覆盖 (紧集定义): $\{U_k\}_{k=1}^n$

作从属于 $\{U_k\}$ 的单位分解: ψ_1, \dots, ψ_n 则: $\varphi = \varphi \cdot 1 = \varphi \sum_{k=1}^n \psi_k = \sum_{k=1}^n \varphi \cdot \psi_k$, 其中 $\varphi \cdot \psi_k \in C_0^\infty(\Omega)$.

$\text{supp} \varphi \cdot \psi_k \subseteq \text{supp}(\psi_k) \subseteq U_k$, 此时 $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \sum_{k=1}^n \varphi \cdot \psi_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi \cdot \psi_k \rangle = 0$.


□

1.3.1 基本运算

♡ 线性运算

定义 1.3.5 (线性运算). 对于常数 $c_1, c_2, f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, \varphi \rangle := c_1 \langle f_1, \varphi \rangle + c_2 \langle f_2, \varphi \rangle \quad (1.22) \quad \img alt="cat icon" data-bbox="831 901 854 917"/>$$

 注. $\langle f_1 - f_2, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \langle f_1, \varphi \rangle = \langle f_2, \varphi \rangle$

♡ 平移

定义 1.3.6 (平移). 设 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f(x-a), \varphi(x) \rangle := \langle f(x), \varphi(x+a) \rangle \quad (1.23)$$

 注. 当 $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 时:

$$\langle f(x-a), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y+a)dy$$

 在一般泛函框架和正则广义函数框架内的计算要相容, 不能有矛盾!

♡ 相似

定义 1.3.7 (相似). 设 $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f(cx), \varphi(x) \rangle := \frac{1}{|c|^n} \langle \underbrace{f(x)}_{\in \mathcal{D}'(\Omega)}, \underbrace{\varphi\left(\frac{x}{c}\right)}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \rangle \quad (1.24)$$

若 $f \in L'_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 对 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f(cx), \varphi(x) \rangle = \int f(cx)\varphi(x)dx = \int f(y)\varphi\left(\frac{y}{c}\right)\frac{1}{|c|^n}dy = \frac{1}{|c|^n} \langle f(y), \varphi\left(\frac{y}{c}\right) \rangle$$

 注. (i) 若 $c > 0, f(cx) = c^\lambda f(x)$ 广义相等, 则称 f 为 λ 阶齐次的广义函数.

(ii) 若 $c = -1$ 时, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 记 $f(-x) = \hat{f}(x), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \hat{f}(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(-x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle = \langle f(x), \hat{\varphi}(x) \rangle$$

若 $f(x) = \hat{f}(x)$, 则称 f 为偶广义函数; 若 $f(x) = -\hat{f}(x)$, 则称 f 为奇广义函数.

♡ 微分运算

定义 1.3.8 (微分运算). 设 $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \varphi(x) \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \quad (1.25)$$

若 $f \in C^\infty(\Omega) \subseteq 2L_{loc}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 则: $\varphi|_{\Omega} = 0$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} f, \varphi \right\rangle = \int \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \varphi dx = \underbrace{\varphi|_{\Omega}}_{=0} - \int f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

故我们可知:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \langle \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \varphi \rangle$$

♡ 乘子运算

定义 1.3.9 (乘子运算). 设 $a(x) \in C^\infty(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\langle a(x)f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), a(x)\varphi(x) \rangle \quad (1.26)$$

若 $f \in L'_{loc}(\Omega)$, 则有:

$$\langle a(x)f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x)a(x)\varphi(x)dx$$

此时

$$a(x)\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega), \text{supp}(a(x)\varphi(x)) \subset \text{supp}\varphi(x) \subseteq K$$

注. (i) 若要使 $a(x)\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 应保证 $a(x) \in C^\infty(\Omega)$;

(ii) $\mathcal{D}'(\Omega)$ 广义函数的乘子空间为 $C^\infty(\Omega)$ (无穷可微且无支集).

例 1.3.3. 设微分算子 $P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$, $a_\alpha(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 证明:

$$\langle P(x, \partial_x)u, \varphi \rangle = \langle u, {}^tP(x, \partial_x)\varphi \rangle$$

这里的 ${}^tP(x, \partial_x) = \sum (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) \cdot)$ 称为 P 的转置算子.

证明.

$$\begin{aligned} \langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u, \varphi \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u, \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial_x^\alpha u, a_\alpha(x) \varphi(x) \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) \varphi(x)) \rangle \\ &= \langle u, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) \varphi(x)) \rangle \end{aligned}$$

得证! □

例 1.3.4. 证明: $n = 1, x \in \mathbb{R}, H'(x) = \delta(x), H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

证明. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle H'(x), \varphi(x) \rangle &= (-1) \langle H(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x) dx = (-1) \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx \\ &= (-1)(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) \\ &= \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

进而有 $H'(x) = \delta(x)$. □

例 1.3.5 (作业). 对 $n > 1$ 时, $H(x) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{if not} \end{cases}$, 则:

$$\frac{\partial^n H(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x)$$



定义 1.3.10. 设 $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 若 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad (1.27)$$

则称 $f_n \rightarrow f$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上.

 注. 准确来说, 这种收敛性称为弱 * 收敛, 指的是依 * 拓扑弱收敛.



定理 1.3.2. 若 $f_n \rightarrow f$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上, 则对于 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, 则有:

$$\partial_x^\alpha f_n \rightarrow \partial_x^\alpha f \quad (1.28)$$



证明. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\langle \partial_x^\alpha f_n(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_n(x), \partial_x^\alpha \varphi(x) \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \partial_x^\alpha \varphi(x) \rangle = \langle \partial_x^\alpha f(x), \varphi(x) \rangle$$

$\in C_0^\infty(\Omega) \uparrow$

得证! □

例 1.3.6. $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \end{cases}$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 求 $f_\varepsilon(x)$ 逐点极限和广义函数极限.



$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, 接下来我们来证明 $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 意义下:

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle f_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle = \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} (\Psi(\varepsilon) - \Psi(-\varepsilon))$$

其中 $\Psi(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的原函数, 我们令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 则有 $\varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$, 故我们可知:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$$

定理 1.3.3. 设有 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 适合:

(i) 对任意 $M > 0$, 当 $|a| < M$, $|b| < M$ 时

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq c,$$

c 只与 M 有关;



(ii) 固定 a 和 b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b \end{cases}$$

则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x).$$



证明. 令

$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi) d\xi.$$

由条件 (i), 在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n'(x), \varphi(x) \rangle = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n(x) \varphi'(x) dx = (-1) \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right) \varphi'(x) dx \\ &= (-1) \int H(x) \varphi'(x) dx = (-1) \langle H(x), \varphi'(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Lebesgue 控制收敛定理

故我们可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$. □

接下来我们来看 [定理 1.3.9](#) 的推广形式:

问题 1.3.1. 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的条件下: 磨光核 $\Phi_\varepsilon(x)$, $\Phi_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$



证明. 我们回顾一下:

$$g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq g(x) \leq 1, \text{supp} \subseteq \overline{B_1(0)}, \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = c \neq 0, \text{ 令 } \Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

要证:

$$\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle \Phi_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$$

实际上:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) d(\varepsilon y) = \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) \varepsilon^n d(y) = \frac{1}{c} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) d(y) \end{aligned}$$

故我们有:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \Phi_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{c} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) d(y) = \frac{1}{c} \int g(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\varepsilon y) d(y) \\ &= \frac{1}{c} \int g(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\varepsilon y) d(y) = \frac{1}{c} \varphi(0) \int g(y) d(y) = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Lebesgue 控制收敛定理

故我们可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \delta(x)$. □

对于基本函数空间与广义函数空间我们有如下区别:

基本函数空间	广义函数空间
$C_0^\infty(\Omega)$ (记为 $\mathcal{D}(\Omega)$)	$\mathcal{D}'(\Omega)$
$C^\infty(\Omega)$ (记为 $\mathcal{E}(\Omega)$)	$\mathcal{E}'(\Omega)$
$C_0^\infty(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$	$\mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$

 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 是需要有紧支集的广义函数.

2. 卷积

2.1	函数与广义函数之间的卷积	23
2.1.1	函数与函数之间的卷积	23
2.1.2	广义函数与函数的卷积	24
2.2	广义函数与广义函数之间的卷积	27

2.1 函数与广义函数之间的卷积

2.1.1 函数与函数之间的卷积

定义 2.1.1 (卷积). 设 $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ 至少有一个具有紧支集, 则:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy. \quad (2.1)$$

 注. 定义有意义, 不妨设 $\text{supp} f \subseteq K$, 则此时有: $(f * g)(x) = \int_{\cup} f(y)g(x-y)dy$. 

性质 2.1.1. (i) 可交换 $f * g = g * f$

$$f * g = \int f(y)g(x-y)dy = \int f(x-z)g(z)dz = \int g(z)f(x-z)dz = g * f$$

 注. 在 n 维中, $|\det J| = 1$, 故有 $dy = dz$. 

(ii) **结合律** 设 $f, g, h \in C(\mathbb{R}^n)$, 其中至少有两个具有紧支集, 则有 $f * (g * h) = (f * g) * h$.

(iii) **微分** 设 $g \in C^k(\mathbb{R}^n), f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, 即 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k$:

$$\partial_x^\alpha (f * g)(x) = f * (\partial_x^\alpha g) \stackrel{\text{若 } g \in C^k}{=} g * (\partial_y^\alpha f) \quad (2.2)$$

证明. 不妨设 $n = 1$, 在 \mathbb{R} 上, 令 $\text{supp} f \subseteq K$, 考虑:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(f * g)(x+h) - (f * g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int f(y)g(x+h-y)dy - \int f(y)g(x-y)dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{g(x+h-y) - g(x-y)}{h} dy \\ &\stackrel{\text{Lebesgue 控制收敛定理}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h-y) - g(x-y)}{h} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g'(x-y)dy \end{aligned}$$

进一步, 由交换律我们可得: $\partial_x^\alpha (f * g)(x) = f * (\partial_x^\alpha g) \stackrel{\text{若 } g \in C^k}{=} g * (\partial_y^\alpha f)$. \square

(iv) **支集** 若 $f * g$ 有意义, 则:

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp} f + \text{supp} g = \{x + y : x \in \text{supp} f, y \in \text{supp} g\} \quad (2.3)$$


证明. 要证: 对 $\forall x \notin \text{supp} f + \text{supp} g$ 则 $x \notin \text{supp}(f * g)$ 即 $(f * g)(x) = 0$.

当 $x \notin \text{supp} f + \text{supp} g$, 则 $\exists x$ 的邻域 V_x 使得 $V_x \cap (\text{supp} f + \text{supp} g) = \emptyset$ 则 $\forall y \in \text{supp} f, x - y \notin \text{supp} g$, 否则 $x \in \text{supp} f + \text{supp} g$ 矛盾!

则 \exists 邻域 $U_{x_y} \cap \text{supp} g = \emptyset$ 即 $g|_{U_{x_y}} = 0$, 进而 $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = 0$. \square

2.1.2 广义函数与函数的卷积

定义 2.1.2. 设 $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则 $(f * \varphi)(x) = \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle$

 **注.** 若 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 也有: $(f * \varphi)(x) = \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle$.

例 2.1.1. 若 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\delta * f = f(x), (\delta * f)(x) = \langle \delta(y), f(x-y) \rangle = f(x)$.

性质 2.1.2. 设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

(i) $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii)

$$\partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi \stackrel{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2}{=} (\partial^{\alpha_1} f) * (\partial^{\alpha_2} \varphi) \quad (2.4)$$

(iii)

$$\text{supp}(f * \varphi) \subseteq \text{supp} f + \text{supp} \varphi \quad (2.5)$$

(iv) 结合律

$$(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi) \quad (2.6)$$


**Proof.** (ii) 我们先考虑如下引理:

引理 2.1.1. 设 $\varphi(x, y) \in C^k(U_x \times \Omega_y)$, U_x 为开集, 且对 $x \in U_x$, $\varphi(x, y) \in C^\infty(\Omega_y)$
即

$$\text{supp}_y \varphi(x, y) \subset K \subset \subset \Omega_y, \quad K \text{ 与 } x \text{ 无关}$$

令 $F(x) = \langle f(y), \varphi(x, y) \rangle$, 也有:

$$\partial_x^\beta F(x) = \langle f(y), \partial_x^\beta \varphi(x, y) \rangle \quad (2.7)$$

取 $|h|$ 充分小, 设 $x \in U_x$ 则 $x + h \in U_x$ (这是由于 U_x 为开集), 则

$$F(x+h) - F(x) = \langle f(y), \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) \rangle = \langle f(y), \sum_{j=1}^n h_j \partial_{x_j} \varphi(x, y) + R(x, y, h) \rangle$$

其中 $R(x, y, h) = O(|h|^2)$, 从而

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \langle f(y), \sum_{j=1}^n h_j \partial_{x_j} \varphi(x, y) \rangle + \langle f(y), R(x, y, h) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n h_j \langle f(y), \partial_{x_j} \varphi(x, y) \rangle + \langle f(y), R(x, y, h) \rangle \end{aligned}$$

其中

$$|\langle f(y), R(x, y, h) \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_y^\alpha R(x, y, h)| = O(|h|^2) \xrightarrow{|h| \rightarrow 0^+} 0$$

令 $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)$, $n = 1$ 时:

$$\partial_{x_j} F(x) = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{|h|} = \langle f(y), \partial_{x_j} \varphi(x, y) \rangle$$

从而引理得证.

接下来我们利用引理来证明式 (2.4):

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha (f * \varphi)(x) &= \partial_x^\alpha \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle = \langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \rangle \\ &= \langle f(y), (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \varphi(x-y) \rangle = \langle \partial_y^\alpha f(y), \varphi(x-y) \rangle = (\partial_x^\alpha f) * \varphi \end{aligned}$$

对于 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 我们有:

$$\partial_x^\alpha (f * \varphi)(x) = (\partial^{\alpha_1} f_1) * (\partial^{\alpha_2} \varphi)$$

(iii) 证明同函数与函数卷积部分, 但不能交换 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 与 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$f * \varphi = \langle \underbrace{f(y)}_{\text{泛函}}, \underbrace{\varphi(x-y)}_{\text{试验函数}} \rangle$$

(iv) 我们先从函数层面来分析:

$$\begin{aligned}
 (f * \varphi) * \psi &= f * (\varphi * \psi) \\
 \Downarrow \\
 (\mathcal{D}' * C_0^\infty) * C_0^\infty &= \mathcal{D}' * (C_0^\infty * C_0^\infty) \\
 \Downarrow \\
 C^\infty * C_0^\infty &= \mathcal{D}' * C_0^\infty \\
 \Downarrow \\
 C^\infty &= C^\infty
 \end{aligned}$$

为证明式 (2.6), 我们先考虑下面这个引理:

引理 2.1.2. 设 $\varphi(x, y) \in C_0^\infty(\Omega \times w)$, $\text{supp}\varphi \subseteq K_1 \times K_2$, 这里 K_1, K_2 均为紧集, 设 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 有

$$\int \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle dy = \langle f(x), \int \varphi(x, y) dy \rangle \quad (2.8)$$

我们先来证明一下上述引理:

$\langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \in C^\infty(w)$, $\text{supp}\langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \subset K_2 \subset W$ 紧, 从而 $\langle f(x), \varphi(x, y) \rangle$ 关于 y 可积, 取包含 K_2 的方体 $Q \subseteq W$ 即有:

$$\int \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle dy = \int_{K_2} \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle dy = \int_Q \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle dy$$

接着, 我们用 h 等分 Q , 将积分写作 Riemann 和, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 &\int \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle dy \\
 &\quad \uparrow h \rightarrow 0^+ \\
 &\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \langle f(x), \varphi(x, kh) \rangle h^m = \langle f(x), \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \varphi(x, kh) h^m \rangle \rightarrow \langle f(x), \int \varphi(x, y) dy \rangle
 \end{aligned}$$

这样我们便完成了对引理式 (2.8) 的证明. 接下来我们回到结合律式 (2.6) 的证明:

$$\begin{aligned}
 (f * \varphi) * \psi &= \int (f * \varphi)(y) \psi(x - y) dy \\
 &= \int \langle f(z), \varphi(y - z) \rangle \psi(x - y) dy \\
 &= \int \langle f(z), \varphi(y - z) \psi(x - y) \rangle dy \\
 &= \langle f(z), \int \varphi(y - z) \psi(x - y) dy \rangle \\
 &\stackrel{y-z=w}{=} \langle f(z), \int \varphi(w) \psi(x - z - w) dw \rangle \\
 &= \langle f(z), (\varphi * \psi)(x - z) \rangle \\
 &= f * (\varphi * \psi)
 \end{aligned}$$

故结合律得证.

□

定理 2.1.3 (广义函数的正则化). 设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_\varepsilon(x)$ 为磨光核, $f_\varepsilon := f * \Phi_\varepsilon \in C^\infty$, 则 $f_\varepsilon \rightarrow f, \varepsilon \rightarrow 0$, 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中.



证明. 定义函数的反射: $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则有:

$$(f * \check{\varphi})(0) = \langle f(y), \check{\varphi}(x - y) \rangle |_{x=0} = \langle f(y), \varphi(y - x) \rangle |_{x=0} = \langle f(y), \varphi(y) \rangle$$

于是, 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 要证: $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle f_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle &= (f_\varepsilon * \check{\varphi})(0) \\ &= ((f * \Phi_\varepsilon) * \check{\varphi})(0) \\ &= (f * (\Phi_\varepsilon * \check{\varphi}))(0) \\ &= \langle f, (\Phi_\varepsilon * \check{\varphi}) \rangle(0) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, (\check{\varphi}) \rangle \\ &= \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

□

2.2 广义函数与广义函数之间的卷积

定义 2.2.1. 设 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 其中至少一个具有紧支集, 不妨设 $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义:

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle \quad (2.9)$$

 **注.** (i) 为什么有此形式?

当 f, g 正则 \mathcal{D}' , $f \in C(\mathbb{R}^n), g \in C_0(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int \varphi(x) dx \int f(y) g(x - y) dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int f(y) dy \int g(x - y) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{x-y=z}{=} \int f(y) dy \int g(z) \varphi(y + z) dz \\ &= \langle f(y), \langle g(z), \varphi(y + z) \rangle \rangle \end{aligned}$$

(ii) 定义有意义吗?

$$\langle g(y), \varphi(x + y) \rangle = \langle \check{g}(-y), \varphi(x - (-y)) \rangle = \check{g} * \varphi \in C_0^\infty$$

从而定义有意义.

$$\mathcal{E}' * C_0^\infty \uparrow$$



性质 2.2.1. (i) 结合律

设 $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 其中至少 2 个具有紧支集, 不妨设 $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$



则有

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

(ii) 交换律

设 $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{E}'$, 则有

$$f * g = g * f$$

(iii) 微分

设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$$

(iv) 交集

设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}f + \text{supp}g$

证明. (i) 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有:

$$\langle (f * g) * h, \varphi \rangle = \langle (f * g)(x), \langle h(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle f(x), \langle g(z), \langle h(y), \varphi(x + z + y) \rangle \rangle \rangle$$

$$\langle f * (g * h), \varphi \rangle = \langle f(x), \langle (g * h)(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle f(x), \langle g(z), \langle h(z), \varphi(x + z + y) \rangle \rangle \rangle$$

故: $\langle (f * g) * h, \varphi \rangle = \langle f * (g * h), \varphi \rangle$, 故 $(f * g) * h = f * (g * h)$, 性质得证.

(ii) 我们有如下断言:

断言 2.2.1. 设 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\begin{array}{ccccccc} ((f * g) * \varphi) * \psi & = & ((g * f) * \varphi) * \psi \\ \mathcal{D}' & C_0^\infty & \mathcal{D}' & C_0^\infty & & & \\ & C^\infty & *C_0^\infty & C^\infty & *C_0^\infty & & \\ & & C^\infty & & C^\infty & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} ((f * g) * \varphi) * \psi & \stackrel{\text{广义函数结合律}}{=} (f * (g * \varphi)) * \psi \\ & \stackrel{\text{广义函数与函数卷积、结合律}}{=} f * ((g * \varphi) * \psi) \\ & \stackrel{\text{交换律}}{=} f * ((g * \varphi) * \psi) \\ & \stackrel{\text{广义函数结合律}}{=} (f * \psi) * (g * \varphi) \\ & \stackrel{\text{交换律}}{=} (g * \varphi) * (f * \psi) \\ & \downarrow \text{逆过程} \end{aligned}$$

$$((g * f) * \varphi) * \psi$$

由断言2.2.1结果可知:

$$(((f * g) * \varphi) * \check{\psi})(0) = (((g * f) * \varphi) * \check{\psi})(0)$$

则有

$$\begin{aligned}\langle (f * g) * \varphi, \psi \rangle &= \langle (g * f) * \varphi, \psi \rangle \\ &\Rightarrow (f * g) * \varphi = (g * f) * \varphi\end{aligned}$$

同理可知

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle g * f, \varphi \rangle$$

$\Rightarrow f * g = g * f$ 广义相等.

(iii) 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有:

$$\begin{aligned}\langle \partial_x^\alpha (f * g)(x), \varphi(x) \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle (f * g)(x), \partial_x^\alpha \varphi(x) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x + y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^\alpha \langle f(x), \langle g(y), \partial_y^\alpha \varphi(x + y) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x), \langle \partial_y^\alpha g(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle \\ &= f * \partial^\alpha g\end{aligned}$$

进一步:

$$\partial_x^\alpha (f * g) = \partial_x^\alpha (g * f) = g * (\partial_x^\alpha f) = (\partial_x^\alpha) * g$$

(iv) 对任取 $\varphi \in C_0^\infty$, 有 $\text{supp} \varphi \cap (\text{supp} f + \text{supp} g) = \emptyset$, 即 $\text{supp} \varphi$ 不包含在 $\text{supp} f + g$ 中.

对于 $\forall x \in \text{supp} f$, 当 $y \in \text{supp} g$: $\Rightarrow \varphi(x + y) = 0 \Rightarrow \langle g(y), \varphi(x + y) \rangle = 0$

当 $y \notin \text{supp} g$: $\Rightarrow \langle g(y), \varphi(x + y) \rangle = 0 \Rightarrow \langle f * g, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \text{supp} \varphi \cap \text{supp}(f * g) = \emptyset \Rightarrow \text{supp} \varphi \subset (\text{supp} f * g)^c \Rightarrow (\text{supp} f + g)^c \subset (\text{supp}(f * g))^c$

可知结论成立. □

例 2.2.1. 设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, 计算 $\delta * f$.

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 有:

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \Rightarrow \delta * f = f$$



3. Fourier 变换

3.1	急减函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	30
3.2	缓增广义函数 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	37

3.1 急减函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

定义 3.1.1 (Fourier 变换). 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx. \tag{3.1}$$

目标: 将 Fourier 变换推广到广义函数空间 \mathcal{D}'

希望有: 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'$,

$$\langle \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle := \langle f(x), \hat{\varphi}(x) \rangle. \tag{3.2}$$

注意到, 当 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= \int_{\text{supp}\varphi} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \\ \partial_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) &= \int_{\text{supp}\varphi} (\partial_\xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}) \varphi(x) dx \\ &\Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

 注. $\hat{\varphi}(\xi)$ 是 C^∞ 函数, 但不能保证其具有紧支集; 事实上, C^∞ 可以看成是一个改进的函数空间, 保留 C_0^∞ 函数的大部分性质.

定义 3.1.2 (急减函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). 满足以下条件的 C^∞ 函数称为 **急减函数**

$\forall \alpha, \beta$, 必有常数 $C(\alpha, \beta) > 0$, 使得

不用保持 α, β 的一致性 (实际上就是减小速度快于多项式)


$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| < C(\alpha, \beta) \quad (3.3)$$

此时 $|x^\alpha| \rightarrow \infty$, 需要 $\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\beta f| \rightarrow 0$

 注. 类似于数分中判断广义积分是否收敛中比较判别法.

对 $\{f_j\} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f_j \rightarrow 0$ 定义为

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f_j| \rightarrow 0.$$

 注. 可将 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 视为 f 在 ∞ 处为 0.

$$C_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty \quad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

对于 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义其 Fourier 变换:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx$$

可知

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \left((1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} |\varphi(x)| \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx\end{aligned}$$

可知 $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义有意义 **有问题**

定理 3.1.1. 若 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\varphi) = \hat{\varphi}$, 且

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi) = \xi^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \quad (3.4)$$

$$\mathcal{F}(x^\alpha \varphi) = (-D_\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \quad (3.5)$$

证明. 其中 $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$, $(-D_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} = \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}$, 则有

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \mathcal{F}(\varphi) &= \xi^\alpha \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \\ &= \int \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \\ &= \int (-D_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \cdot \varphi(x) dx \quad (\text{在无穷远处等同于 } 0, \text{ 边界项消失}) \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} (D_x^\alpha \varphi)(x) dx + 0 \\ &= \mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi)\end{aligned}$$

另一方面, 计算 $(-D_\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}(-D_\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi) &= (-D_\xi)^\alpha \int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-D_\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} (x^\alpha \varphi(x)) dx \\ &= \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)\end{aligned}$$

由 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

只需验证: $\sup_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| < C(\alpha, \beta)$, 其中, 对任意固定的 α, β

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}_j(\xi)| &= |\xi^\alpha \mathcal{F}((-x)^\beta \varphi_j(x))(\xi)| \\ &= |\mathcal{F}(D_x^\alpha((-x)^\beta \varphi_j(x)))(\xi)| \\ &= \left| \int e^{-ix\cdot\xi} D_x^\alpha((-x)^\beta \varphi_j(x)) dx \right| \\ &\leq \int |D_x^\alpha((-x)^\beta \varphi_j(x))| dx\end{aligned}$$

由8.2.3的问题 (2) \Rightarrow 当 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $D_x^\alpha((-x)^\beta \varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&\leq \int (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} |D_x^\alpha((-x)^\beta \varphi_j(x))| dx \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} ((1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} |D_x^\alpha((-x)^\beta \varphi_j(x))|) \int (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx \\ &\leq \bar{C}(\alpha, \beta) \quad \uparrow = C(\alpha, \beta) \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}_j(\xi)| \leq \bar{C}(\alpha, \beta) \\ &\Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

故我们有如下定理:

定理 3.1.2. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续线性映射算子, 把急减空间映成急减空间.



□

定理 3.1.3. $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 有连续的逆映射 \mathcal{F}^{-1} , $\hat{\varphi} \mapsto \varphi$, 且

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}) = \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \cdot \hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

有意义, $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

引理 3.1.4.

$$\int e^{-ix \cdot \xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \quad (3.7)$$

注. Gauss 函数的 Fourier 变换仍为 Gauss 函数.

证明. 我们只需证明 $n = 1$ 即可.

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \int e^{ix \cdot \xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx &= \int e^{-i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2}} dx_1 \dots dx_n \\ &= \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j \xi_j} e^{-\frac{x_j^2}{2}} dx_j = \prod_{j=1}^n (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi_j^2}{2}} = \text{RHS} \end{aligned}$$

只需要证对每个 j 均成立即可. 当 $n = 1$ 时,

$$\int e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$$

已知: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

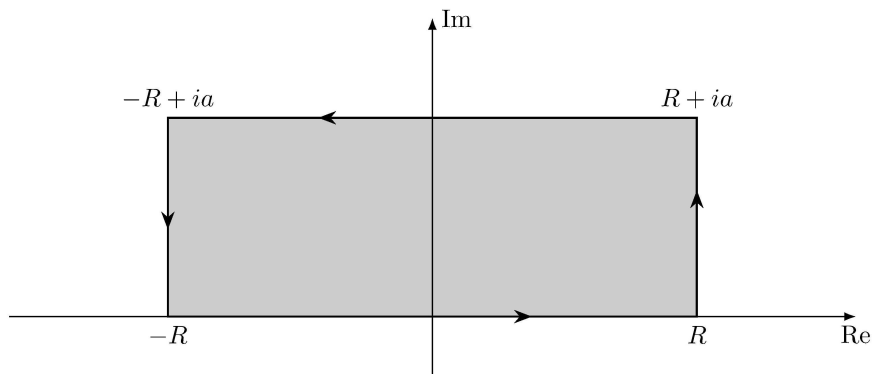
在如下路径上积分

$$\int_{\Gamma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0 = \int_{-R}^R e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(R+it)^2} dt + \int_{\xi}^0 e^{-\frac{1}{2}(-R+it)^2} dt + \int_R^{-R} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$$

$\left| \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(R+it)^2} dt \right| \leq e^{-\frac{1}{2}R^2} \cdot e^{\frac{1}{2}\xi^2} \cdot |\xi| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$
↑ 与左式类似

故我们可知有

$$\int e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$



下面我们回归定理的证明:

令 $g(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, 设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 考虑积分:

$$\int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) g(\varepsilon \xi) d\xi \quad \text{其中 } g(\varepsilon \xi) = e^{-\frac{|\varepsilon \xi|^2}{2}}$$

由 Fourier 变换定义 $\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} \varphi(y) dy$, 代入上式并利用 Fubini 定理 交换积分次序:

$$\begin{aligned} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) g(\varepsilon \xi) d\xi &= \int e^{ix \cdot \xi} g(\varepsilon \xi) d\xi \int e^{-iy \cdot \xi} \varphi(y) dy \\ &= \int \varphi(y) dy \int e^{i(x-y) \cdot \xi} g(\varepsilon \xi) d\xi \end{aligned}$$

做变量替换 $\eta = \varepsilon \xi$ (即 $\xi = \frac{\eta}{\varepsilon}$, $d\xi = \frac{1}{\varepsilon^n} d\eta$), 则积分变为:

$$\begin{aligned} \int \varphi(y) dy \int e^{i(x-y) \cdot \frac{\eta}{\varepsilon}} g(\eta) \frac{1}{\varepsilon^n} d\eta &= \varepsilon^{-n} \int \varphi(y) \hat{g}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int \varphi(x + \varepsilon y_1) \hat{g}(y_1) \cdot \varepsilon^n dy_1 \\ &= \int \varphi(x + \varepsilon y_1) \hat{g}(y_1) dy_1 \end{aligned}$$

记 $y_1 = \frac{y-x}{\varepsilon}$, 即 $y = x + \varepsilon y_1, dy = \varepsilon^n dy_1$

下面取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$:

一方面, $g(\varepsilon \xi) = e^{-\frac{|\varepsilon \xi|^2}{2}} \rightarrow 1$ (当 $\varepsilon \rightarrow 0$), 故

$$\int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) g(\varepsilon \xi) d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

另一方面, 由含参积分连续性 (或积分中值定理), 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\varphi(x + \varepsilon y_1) \rightarrow \varphi(x)$, 故

$$\int \varphi(x + \varepsilon y_1) \hat{g}(y_1) dy_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x) \int \hat{g}(y_1) dy_1$$

而 $g(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ 是 Gauss 函数, 其 Fourier 变换满足 $\int \hat{g}(y_1) dy_1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$, 因此:

$$\varphi(x) \int \hat{g}(y_1) dy_1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$$

对比左右两边极限, 有:

$$\int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$$

两边同乘 $(2\pi)^{-n}$, 最终得:

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(x)$$


□

性质 3.1.1 (\mathcal{F} 与反射). 设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\mathcal{F}(\check{\varphi}) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(-x) dx \stackrel{y=-x}{=} \int e^{iy \cdot \xi} \varphi(y) dy = (2\pi)^n \cdot \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \quad (3.8)$$

$$(\mathcal{F}(\varphi))^\vee = (\hat{\varphi}(\xi))^\vee = \hat{\varphi}(-\xi) = \int e^{-ix \cdot (-\xi)} \varphi(x) dx = (2\pi)^n \cdot \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \quad (3.9)$$

其中, $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ 为 **反射变换**.

 **注.** $\mathcal{F}^{-1}(\check{\varphi}) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \cdot \hat{\varphi}(\xi) d\xi$. 由 $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 为连续线性映射, 我们可知 $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 也为连续线性映射.



性质 3.1.2 (\mathcal{F} 与平移).

$$\mathcal{F}(\tau_h \varphi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x-h) dx = \int e^{-i(x-h) \cdot \xi} \cdot e^{-ih \cdot \xi} \varphi(x-h) dx = e^{-ih \cdot \xi} \mathcal{F}(\varphi) \quad (3.10)$$

$$\tau_h \mathcal{F}(\varphi) = \int e^{-ix \cdot (\xi-h)} \varphi(x) dx = \int e^{-ix \cdot \xi} \cdot (e^{ix \cdot h} \varphi(x)) dx = \mathcal{F}(e^{ix \cdot h} \cdot \varphi(x)) \quad (3.11)$$

其中, $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x-h)$ 为 **平移变换**.



性质 3.1.3 (\mathcal{F} 与相似变换).

$$\mathcal{F}(\varphi(cx)) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(cx) dx = \int e^{-i\frac{y}{c} \cdot \xi} \varphi(y) \cdot \frac{1}{|c|^n} dy = |c|^{-n} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{c}\right) \quad (3.12)$$

$$\hat{\varphi}(c\xi) = \int e^{-ix \cdot (c\xi)} \varphi(x) dx = \int e^{-i\frac{y}{c} \cdot (c\xi)} \varphi\left(\frac{y}{c}\right) \cdot \frac{1}{|c|^n} dy = \frac{1}{|c|^n} \mathcal{F}\left(\varphi\left(\frac{\cdot}{c}\right)\right)(\xi) \quad (3.13)$$



若 φ 是 k 阶齐次的, 即 $\varphi(cx) = |c|^k \varphi(x)$, 此时 $\hat{\varphi}(\xi)$ 有如下性质:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(c\xi) &= |c|^{-n} \mathcal{F}\left(\varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right)(\xi) \\ &= |c|^{-n} \mathcal{F}(|c|^{-k} \varphi(x))(\xi) \\ &= |c|^{-(n+k)} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = |c|^{-(n+k)} \hat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

性质 3.1.4 (\mathcal{F} 与卷积). 若 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \quad (3.14)$$



证明. (1) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{f} \cdot \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(2) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \mathcal{F}(f * g)$ 有意义.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \int e^{-ix \cdot \xi} (f * g)(x) dx \\ &= \int e^{-ix \cdot \xi} dx \int f(y) g(x-y) dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int f(y) dy \int e^{-ix \cdot \xi} g(x-y) dx \\ &= \int f(y) dy \int e^{-i(x-y+y) \cdot \xi} g(x-y) dx \\ &= \int f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy \int e^{-i(x-y) \cdot \xi} g(x-y) dx \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

(3) 卷积的 Fourier 变换 $\widehat{(f * g)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(4) 由于 \mathcal{F}^{-1} 是 $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 上线性映射, 从而 $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

□

推论 3.1.5. 若 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\widehat{f \cdot g} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g} \quad (3.15)$$

证明. 由于 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故 $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 进而 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 因此 $\widehat{f \cdot g}$ 有意义.

$$\begin{aligned} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)g(x)dx &= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)dx \cdot \int (2\pi)^{-n} e^{ix \cdot \eta} \hat{g}(\eta)d\eta \quad (\text{Fourier 逆变换: } g(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \eta} \hat{g}(\eta)d\eta) \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\eta)d\eta \cdot \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)e^{ix \cdot \eta} dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\eta)d\eta \cdot \int e^{-ix \cdot (\xi - \eta)} f(x)dx \\ &= (2\pi)^{-n} (\hat{f} * \hat{g})(\xi) \end{aligned}$$

□

定理 3.1.6. 若 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle \quad (3.16)$$

说明. $\hat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 因此内积有意义.

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, g \rangle &= \int \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int g(\xi) d\xi \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad (\text{Fourier 变换定义: } \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx) \\ &= \int f(x) dx \int e^{-ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi = \int f(x) \hat{g}(x) dx = \langle f, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

 **注.** 目标: 广义函数的 Fourier 变换放到基本函数 (如 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) 上定义.

□

定义 3.1.3 (线性偏微分算子). 线性偏微分算子定义为:

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad a_\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (3.17)$$

其象征为:

$$\sigma(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (3.18)$$

需要证明: $P = \mathcal{F}^{-1} \sigma(\xi) \mathcal{F}$ (算子与象征的关系, 即映射与映射的相等)



证明. 设 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 只需证明 $Pu = \mathcal{F}^{-1} \sigma(\xi) \mathcal{F}u$.

首先展开 $\mathcal{F}^{-1} \sigma(\xi) \mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}^{-1} \sigma(\xi) \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \right)$$

利用 Fourier 变换的线性性, 可交换求和与逆变换:

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{F}^{-1} (a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi))$$

注意到 $\mathcal{F}^{-1}[\xi^\alpha \hat{u}(\xi)] = D_x^\alpha u(x)$ (Fourier 变换的微分性质), 因此:

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \hat{u}(\xi)) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) = Pu$$

故 $P = \mathcal{F}^{-1} \sigma(\xi) \mathcal{F}$ 得证. □

3.2 缓增广义函数 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

定义 3.2.1 (缓增广义函数). \mathcal{S} 空间上的连续线性泛函称为缓增广义函数, 记为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1. 连续: 对 $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\varphi_j \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中, 则有

$$\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

2. 连续的等价定义: 设 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 存在 k, m , 使得

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C_{k,m} \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi|$$

例 3.2.1. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 其中 $1 \leq p < \infty$.

证明. 对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 需证明存在 k, m 和常数 $C_{k,m}$, 使得

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C_{k,m} \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi|$$

断言 3.2.1. 若 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 对任意 $1 \leq q < \infty$ 成立.

考虑 L^q 范数:

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

利用 Schwartz 函数的速降性, 引入权函数 $(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2q}}$, 则:

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2q}} \cdot (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2q}} \varphi(x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

由上确界估计和积分收敛性:

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2q}} \varphi(x) \right| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

其中积分 $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ 是收敛的常数. 由上式, 我们可知断言成立!
回到配对估计:

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx = \|f \cdot \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

由 Hölder 不等式 ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

代入 $\|\varphi\|_{L^q}$ 的估计:

$$\leq \|f\|_{L^p} \cdot \sup_{\mathbb{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2q}} \varphi(x) \right| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$


由于 Schwartz 函数的导数和多项式衰减可覆盖上述权函数, 故存在 k, m 使得上确界可被 $\sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} |x^\alpha D^\beta \varphi|$ 控制, 从而 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

定义 3.2.2 (缓增 C^∞ 函数). 设 $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 若对任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, 存在 $C_\alpha > 0$ 以及 N_α , 使得

$$|D_x^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{N_\alpha} \quad (3.19)$$

则称 $a(x)$ 为 **缓增 C^∞ 函数**

 **注.** 各阶微分被多项式所控制 

例 3.2.2. 缓增 C^∞ 函数 $a(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 

证明. 对 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle a(x), \varphi(x) \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |a(x) \varphi(x)| dx$$

利用缓增条件 $|a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{N_\alpha}$ (对某阶 α), 代入得:

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} C_\alpha (1 + |x|^2)^{N_\alpha} |\varphi(x)| dx$$

为控制积分收敛性, 引入 Schwartz 函数的速降权 $(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$, 则:

$$\leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{N_\alpha} |\varphi(x)| dx = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot (1 + |x|^2)^{N_\alpha + \frac{n+1}{2}} |\varphi(x)| dx$$

由 Schwartz 函数的性质, $(1 + |x|^2)^{N_\alpha + \frac{n+1}{2}} |\varphi(x)|$ 的上确界有限, 即:

$$\leq C_\alpha \cdot \sup_{\mathbb{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^{N_\alpha + \frac{n+1}{2}} \varphi(x) \right| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

由于积分 $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ 收敛 (为常数), 且上确界可被 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的半范数控制, 故 $a(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

例 3.2.3. 缓增 C^∞ 函数可作为 \mathcal{S}' 的乘子.

设 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $a(x)$ 是缓增 C^∞ 函数, 则对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle a(x)f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), a(x)\varphi(x) \rangle$$

其中 $a(x)\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故右侧有意义 

定义 3.2.3 (广义傅里叶变换). 对 $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 如下定义 **广义傅里叶变换**:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \quad (3.20)$$

定义 3.2.4 (逆变换). 对 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, **逆变换** 定义为:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \quad (3.21)$$

定理 3.2.2. 设 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则有广义相等关系:

$$\widehat{D^\alpha f} = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \quad (3.22)$$

证明. 对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \widehat{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \langle D^\alpha f, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\xi^\alpha \varphi(\xi)) \rangle = \langle \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle$$

$$\Rightarrow \widehat{D^\alpha f} = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$$

$$\langle \widehat{x^\alpha f}, \varphi(\xi) \rangle = \langle x^\alpha f, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, x^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{D_\xi^\alpha \varphi(\xi)} \rangle = \langle \hat{f}(\xi), D_\xi^\alpha \varphi(\xi) \rangle = \langle (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle$$

$$\Rightarrow \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \quad \square$$

定理 3.2.3. 设 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad (\text{广义相等}) \quad (3.23)$$

证明. 实际有: 若 $f \in \mathcal{S}'$, $g \in \mathcal{S}$, 则 $f * g \in$ 线性 C^∞ 函数 $\subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

同理, 若 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (广义函数空间), $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 属于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的乘子空间.

要证 $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$ (广义相等), 即证:

$$\langle (f * g)^\wedge, \varphi \rangle = \langle f * g, \hat{\varphi} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle (f * g)^\wedge, \varphi \rangle &= \langle f * g, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle f(x), \langle g(y), \hat{\varphi}(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x), \langle \check{g}(-y), \hat{\varphi}(x - (-y)) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x), \check{g} * \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle f(x), \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\check{g}) * \hat{\varphi}) \rangle \\ &= \langle f(x), (2\pi)^n \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\check{g}) \cdot \varphi)^\wedge \rangle \\ &= (2\pi)^n \langle \hat{f}, \mathcal{F}^{-1}(\check{g}) \cdot \varphi \rangle \end{aligned}$$

因 $g \in \mathcal{S}$, 则 $\check{g} \in \mathcal{S}$, 故 $\mathcal{F}^{-1}(\check{g}) \in \mathcal{S}$ (傅里叶变换保 \mathcal{S} 空间), 属于缓增 C^∞ 函数.

进一步需证 $(2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = \hat{g}$:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) &= (2\pi)^n \cdot (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{g}(\xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} g(-x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} g(x) dx \quad (\text{变量替换 } x \mapsto -x) \\ &= \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

因此:

$$\langle (f * g)^\wedge, \varphi \rangle = (2\pi)^n \langle \hat{f}, \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) \cdot \varphi \rangle = \langle \hat{f} \cdot \hat{g}, \varphi \rangle$$

由 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的任意性, 得 $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$ (广义相等), 结论成立. □

定理 3.2.4. 设 $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (紧支集广义函数空间), 则其傅里叶变换

$$\hat{g}(\xi) = \langle g(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle$$

是缓增 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数. 

实际上函数空间与广义函数空间满足:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

因此, $\hat{g}(\xi) = \langle g(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ 作为 \mathcal{E}' 与 C^∞ 函数的配对, 是有意义的, 为缓增 C^∞ 函数.

证明. 设 Φ_ε 是磨光核, 则 $g * \check{\Phi}_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g * \check{\Phi}_\varepsilon = g$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中成立. 另一方面: 傅里叶变换 $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是连续线性映射, 因此 $\mathcal{F}(g * \check{\Phi}_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(g) = \hat{g}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中成立.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g * \check{\Phi}_\varepsilon)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (g * \check{\Phi}_\varepsilon)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \langle g(y), \check{\Phi}_\varepsilon(x - y) \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle g(y), e^{-ix \cdot \xi} \check{\Phi}_\varepsilon(x - y) \rangle dx \\ &= \langle g(y), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \check{\Phi}_\varepsilon(x - y) dx \rangle_y \\ &= \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} \Phi_\varepsilon(z) dz \rangle_y \quad (\text{令 } z = x - y) \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\Phi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$, 因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} \Phi_\varepsilon(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} \delta(z) dz = 1$$

代入得极限:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(g * \check{\Phi}_\varepsilon)(\xi) = \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \rangle = \hat{g}(\xi)$$

下面我们来验证 $\hat{g}(\xi)$ 是缓增 C^∞ 函数:

对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, 考察 $\partial_\xi^\alpha \hat{g}(\xi)$:

$$\partial_\xi^\alpha \hat{g}(\xi) = \partial_\xi^\alpha \langle g(y), e^{-iy \cdot \xi} \rangle = \langle g(y), \partial_\xi^\alpha e^{-iy \cdot \xi} \rangle$$

由于 $\partial_\xi^\alpha e^{-iy \cdot \xi} = (-iy)^\alpha e^{-iy \cdot \xi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 有紧支集 $K = \text{supp } g$, 因此存在常数 C, \tilde{C} 与多重指标 β , 使得:

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \hat{g}(\xi)| &= |\langle g(y), (-iy)^\alpha e^{-iy \cdot \xi} \rangle| \\ &\leq C \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{y \in K} |\partial_y^\beta [(-iy)^\alpha e^{-iy \cdot \xi}]| \\ &\leq \tilde{C} (1 + |\xi|)^{|\beta|} \end{aligned}$$

这表明 $\hat{g}(\xi)$ 的各阶导数被多项式控制, 故 $\hat{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且缓增。 □

例 3.2.4. 求 $\hat{\delta}$.

由于 $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 其傅里叶变换定义为:

$$\hat{\delta}(\xi) = \langle \delta(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle = 1$$

例 3.2.5. 求 $\hat{1}$.

常函数 $f(x) \equiv 1$ 是缓增 C^∞ 函数, 属于 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 。对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其傅里叶变换的配对为:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle &= \langle 1, \hat{\varphi}(\xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^n \cdot (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i0 \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (\text{插入 } e^{-i0 \cdot \xi} \text{ 凑逆变换}) \\ &= (2\pi)^n \cdot \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(0) \quad (\text{逆变换定义: } \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi) \\ &= (2\pi)^n \cdot \varphi(0) \quad (\text{逆变换性质: } \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(0) = \varphi(0)) \\ &= (2\pi)^n \cdot \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

因此有广义函数相等:

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta(x)$$

性质 3.2.1. 对 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 有对偶性:

$$\mathcal{F}(\hat{f}) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(f) \tag{3.24}$$

证明. 对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 利用傅里叶变换的配对定义:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\hat{f}), \varphi \rangle &= \langle \hat{f}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\varphi)^\vee \rangle \quad (\hat{f} \text{ 的定义: } \langle \hat{f}, \psi \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle, \text{ 此处 } \psi = \mathcal{F}(\varphi)) \\ &= \langle f, (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad (\text{傅里叶逆变换与反转的关系: } \mathcal{F}(\varphi)^\vee = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\varphi)) \\ &= \langle (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(f), \varphi \rangle \end{aligned}$$

由 φ 的任意性, 得 $\mathcal{F}(\hat{f}) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(f)$ 。

特别地, 当 $f = 1$ 时, 代入得 $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta(x)$, 与之前结论一致。 □

例 3.2.6. $\delta(x, y)$ 关于部分变量 (如 x) 的 Fourier 变换

$$\langle \delta(x, y), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x = \delta(y) \quad (3.25)$$

证明 (磨光核方法). 设 Φ_ε 是磨光核 (含参紧支集光滑函数, 满足 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta * \Phi_\varepsilon = \delta$ 在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+m})$ 中), 则:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x, y) * \Phi_\varepsilon(x) = \delta(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+m})$$

对 x 部分作 Fourier 变换:

$$\mathcal{F}_x(\delta(x, y) * \Phi_\varepsilon(x)) = \langle \delta(x, y) * \Phi_\varepsilon(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$$

对 $\forall \varphi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned} & \langle \langle \delta(x, y) * \Phi_\varepsilon(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \varphi(y) \rangle_y \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} (\delta(x, y) * \Phi_\varepsilon(x))(x, y) e^{-ix \cdot \xi} \varphi(y) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - x', y) \Phi_\varepsilon(x') dx' \right) e^{-ix \cdot \xi} \varphi(y) dx dy \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \delta(x - x', y) \Phi_\varepsilon(x') e^{-ix \cdot \xi} \varphi(y) dx' dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \Phi_\varepsilon(x') \left(\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - x', y) e^{-ix \cdot \xi} dx \right) \varphi(y) dx' dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \Phi_\varepsilon(x') e^{-ix' \cdot \xi} \delta(y) \varphi(y) dx' dy \quad (\text{变量替换 } x = x', \text{ 利用 } \delta(x - x', y) = \delta(x - x') \delta(y)) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon(x') e^{-ix' \cdot \xi} dx' \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^m} \delta(y) \varphi(y) dy \right) \\ &= \hat{\Phi}_\varepsilon(\xi) \cdot \varphi(0) \quad (\text{Fourier 变换定义: } \hat{\Phi}_\varepsilon(\xi) = \mathcal{F}_x(\Phi_\varepsilon)(\xi)) \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\hat{\Phi}_\varepsilon(\xi) \rightarrow 1$ (因 $\Phi_\varepsilon \rightarrow \delta$, 其 Fourier 变换趋于 1), 故:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \langle \delta(x, y) * \Phi_\varepsilon(x), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \varphi(y) \rangle_y = \varphi(0) = \langle \delta(y), \varphi(y) \rangle_y$$

另一方面, 直接对 $\delta(x, y)$ 作极限:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \langle \delta(x, y), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \varphi(y) \rangle_y = \langle \langle \delta(x, y), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \varphi(y) \rangle_y$$

对比得:

$$\langle \langle \delta(x, y), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x, \varphi(y) \rangle_y = \langle \delta(y), \varphi(y) \rangle_y$$

由 $\varphi(y)$ 的任意性, 故 $\langle \delta(x, y), e^{-ix \cdot \xi} \rangle_x = \delta(y)$, 即关于 x 的 Fourier 变换结果为 $\delta(y)$. □

4. 偏微分方程一般理论

4.1	一些定义	43
4.2	常见基本解	44
4.3	偏微分方程的分类	46

4.1 一些定义

定义 4.1.1 (局部可解性). 设 $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$, 其中 $a_\alpha(x) \in C^\infty$. 考虑方程 $Pu = f$.

1. 若在 x_0 的某个邻域内满足方程, 则称方程在该邻域内**局部可解**.
2. 若 $\varphi \in C_0^\infty$, 且成立 $\langle Pu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$, 则称 u 为 $Pu = f$ 的**分布意义下弱解**, 其中 $\langle Pu, \varphi \rangle = \langle u, P^t \varphi \rangle$ 对 u 的正则性要求可以较低.

定义 4.1.2 (基本解). 对于线性偏微分算子 $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$, 其中 a_α 为常数. 若 $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 且满足 $PE = \delta(x)$, 则称 E 为算子 P 的**基本解** (基本解对应的是算子, 目标为研究方程的解).

若 E 为算子 P 的基本解, 则 $u = E * f$ 为 $Pu = f$ 的广义函数解:

$$\begin{aligned} Pu &= P(E * f) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \partial_x^\alpha (E * f) \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \partial_x^\alpha E \right) * f \\ &= PE * f = \delta * f = f \end{aligned}$$



性质 4.1.1. 1. 若 $P(D_x)E(x, y) = \delta(x - y)$, 则称 $E(x, y)$ 是 $P(D_x)$ 的基本解。

2. 考虑 $P(D_x)u = f$, 此时 $u(x) = \langle E(x, y), f(y) \rangle$ 为 $P(D_x)u = f$ 的广义函数解:

$$\begin{aligned} P(D_x)u &= P(D_x)\langle E(x, y), f(y) \rangle \\ &= \langle P(D_x)E(x, y), f(y) \rangle \\ &= \langle \delta(x - y), f(y) \rangle \\ &= \delta * f = f \end{aligned}$$

3. 若方程在 \mathbb{R}^n 上, 给定初始条件

$$\begin{cases} Pu = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} Pu(x, t) = f \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

不能直接使用基本解.



4.2 常见基本解

例 4.2.1. $P = \frac{d}{dx}$, 其基本解为 $E(x) = H(x) + C$, 这是由于 Heaviside 函数的导数性质: $H'(x) = \delta(x)$, 即对该基本解求导满足:

$$\frac{d}{dx}E(x) = \frac{d}{dx}(H(x) + C) = H'(x) = \delta(x)$$

从而 $PE = \delta(x)$, 符合基本解定义。



例 4.2.2. 求满足以下条件的 $E(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}E(x, y) = \delta(x - y), & x, y \in (0, 1) \\ E(0, y) = E(1, y) = 0, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



解. 对 $\frac{d^2}{dx^2}E(x, y) = \delta(x - y)$ 两边关于 x 积分, 利用 $\int \delta(x - y)dx = H(x - y)$, 可得:

$$\frac{d}{dx}E(x, y) = H(x - y) + \alpha(y)$$

其中 $\alpha(y)$ 是积分引入的关于 y 的待定函数。

再次对 x 积分, 由 Heaviside 函数积分性质 $\int H(x-y)dx = (x-y)H(x-y)$ (因 $x-y > 0$ 时 $H(x-y) = 1$, 积分得 $x-y$; $x-y < 0$ 时 $H(x-y) = 0$, 积分得 0), 因此:

$$E(x, y) = \int H(x-y)dx + \alpha(y) \cdot x + \beta(y) = (x-y)H(x-y) + \alpha(y)x + \beta(y)$$

这里 $\beta(y)$ 是第二次积分引入的关于 y 的待定函数。

代入左边界 $x = 0$: $E(0, y) = \beta(y) = 0$, 故 $\beta(y) \equiv 0$ 。

代入右边界 $x = 1$: $E(1, y) = (1-y)H(1-y) + \alpha(y) \cdot 1 = 0$ 。由于 $y \in [0, 1]$ 时 $1-y \geq 0$, $H(1-y) = 1$, 因此:

$$1 - y + \alpha(y) = 0 \implies \alpha(y) = y - 1$$

将 $\alpha(y) = y - 1$ 、 $\beta(y) = 0$ 代入, 得到:

$$E(x, y) = (x-y)H(x-y) + (y-1)x$$

□

例 4.2.3. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + ay = \delta(x)$ $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 中的基本解。



Proof. 我们要求解分布意义下的微分方程:

$$\frac{dy}{dx} + ay = \delta(x)$$

首先考虑对应的齐次方程:

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

该方程的通解为:

$$y = Ce^{-ax}$$

使用常数变易法, 设非齐次方程的解为:

$$y = c(x)e^{-ax}$$

代入原方程:

$$\frac{d}{dx}[c(x)e^{-ax}] + a[c(x)e^{-ax}] = \delta(x)$$

计算导数:

$$c'(x)e^{-ax} - ac(x)e^{-ax} + ac(x)e^{-ax} = \delta(x)$$

化简得:

$$c'(x)e^{-ax} = \delta(x)$$

在分布意义下积分得:

$$c(x) = H(x) + C$$

其中 $H(x)$ 是 Heaviside 阶跃函数。于是得到通解:

$$y(x) = [H(x) + C]e^{-ax}$$

为了得到基本解 (即缓增分布), 我们需要选择适当的常数 C 使得解是缓增的:

(i) $a > 0$

当 $a > 0$ 时, e^{-ax} 在 $x \rightarrow +\infty$ 时衰减。为了确保解是缓增的, 我们需要在 $x < 0$ 时消除指数增长。取 $C = 0$, 则:

$$y(x) = H(x)e^{-ax}$$

此时:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}$$

这是一个缓增分布。

(i) $a < 0$

当 $a < 0$ 时, e^{-ax} 在 $x \rightarrow +\infty$ 时增长。为了得到缓增分布, 我们需要在 $x > 0$ 时消除指数增长。取 $C = -1$, 则:

$$y(x) = [H(x) - 1]e^{-ax} = -H(-x)e^{-ax}$$

此时:

$$y(x) = \begin{cases} -e^{-ax}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

这同样是一个缓增分布。

因此, 方程的基本解为:

$$E(x) = \begin{cases} H(x)e^{-ax}, & a > 0 \\ -H(-x)e^{-ax}, & a < 0 \end{cases}$$

或者统一写为:

$$E(x) = \frac{a}{|a|} H\left(\frac{a}{|a|}x\right) e^{-ax}$$

□

4.3 偏微分方程的分类

定义 4.3.1 (偏微分方程的一般形式). 偏微分方程 (PDE) 的一般形式为:

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots\right) = 0$$

其中最高阶微分的阶数称为 PDE 的阶数.



定义 4.3.2 (经典解). 对于二阶微分方程 $\Delta u = f$, 如果未知函数 u 代入方程后满足该方程, 则称 u 为经典解.



定义 4.3.3 (线性偏微分方程). 线性偏微分方程具有如下形式:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

其中:

1. 若 $f = 0$, 称为齐次线性微分方程
2. 若 $f \neq 0$, 称为非齐次线性微分方程



定义 4.3.4 (半线性偏微分方程). 半线性偏微分方程具有如下形式:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u + a_0(D^\beta u, \dots, Du, u, x) = 0$$

↑ 线性
↑ 非线性

其中 $|\beta| < k$, 即非线性部分只包含低阶导数项。



定义 4.3.5 (拟线性偏微分方程). 拟线性偏微分方程具有如下形式:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

↑ 非线性, 但系数不包含最高阶项
↑ 非线性

其中最高阶导数项的系数依赖于低阶导数, 但方程关于最高阶导数是线性的。



例 4.3.1 (典型 PDE 示例).

1. **椭圆型**: $\Delta u = 0$ (Laplace 方程), $\Delta u = f$ (Poisson 方程)
2. **抛物型**: $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0$ (热传导方程)
3. **双曲型**: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ (波动方程)



5. 椭圆型方程

5.1	调和函数的性质	48
5.1.1	Laplace 算子的基本解	48
5.1.2	平均值公式	53
5.1.3	极值原理	55
5.1.4	边值问题	56
5.1.5	格林公式	59
5.2	Laplace 方程的 Dirichlet 问题	63
5.3	调和函数的其他性质	75
5.4	亚椭圆	81

5.1 调和函数的性质

5.1.1 Laplace 算子的基本解

考虑 n 维空间中的 Laplace 算子:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

以 $n = 3$ 为例, 在 \mathbb{R}^3 的静电场中, 根据高斯定律, 在 origin 处放置单位正电荷时, 电势 $E(x)$ 满足:

$$\Delta E(x) = \delta(x)$$

其中 $E(x)$ 即为基本解。

当 $E(x)$ 只与 x 到原点的距离有关时, 即 $E(x) = E(|x|)$, 记:

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

则方程变为:

$$\Delta E(r) = \delta(r)$$

注意到:

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r}$$

定理 5.1.1 (球对称 Laplace 算子). 对于球对称函数 $E(r)$, 有:

$$\Delta E(r) = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE}{dr} \quad (5.1)$$

证明. 由链式法则:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E(r) = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{x_j}{r}$$

计算二阶导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E(r) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

对 $j = 1, \dots, n$ 求和:

$$\begin{aligned} \Delta E(r) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E(r) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE(r)}{dr} \end{aligned}$$

□

 因此我们需要求解方程:

$$\Delta E(r) = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE}{dr} = \delta(r)$$

令 $W(r) = \frac{dE(r)}{dr}$, 则方程变为:

$$\frac{dW(r)}{dr} + \frac{n-1}{r} W(r) = \delta(r)$$

两边同乘 r^{n-1} :

$$r^{n-1} \cdot \frac{dW(r)}{dr} + (n-1)r^{n-2}W(r) = r^{n-1}\delta(r)$$

注意到左边是 $\frac{d}{dr}(r^{n-1}W(r))$ 的展开式, 因此:

$$\frac{d}{dr}(r^{n-1}W(r)) = r^{n-1}\delta(r)$$

在 $r \neq 0$ 时, $\delta(r) = 0$, 所以:

$$\frac{d}{dr}(r^{n-1}W(r)) = 0 \Rightarrow r^{n-1}W(r) = \text{常数}$$

设 $r^{n-1}W(r) = C$, 则:

$$W(r) = \frac{C}{r^{n-1}} \Rightarrow \frac{dE(r)}{dr} = \frac{C}{r^{n-1}}$$

积分得:

$$E(r) = \begin{cases} C_n r^{2-n} + D, & n \geq 3 \\ C_2 \ln \frac{1}{r} + D, & n = 2 \end{cases}$$


其中 D 为积分常数。通常取 $D = 0$ 使得解在无穷远处有适当的行为。

因此, Laplace 算子的基本解为:

$$E(r) = \begin{cases} C_n r^{2-n}, & n \geq 3 \\ C_2 \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases}$$

接下来的工作是确定归一化常数 C_n , 使得 $\Delta E = \delta$ 成立。

1. 设 $r = |x| = |x - 0|$ 表示在原点处放置单位电荷时的距离。若在 x_0 处放置单位电荷, 则距离为 $r = |x - x_0|$ 。
2. Laplace 算子的基本解常用 $T(x, x_0) = T(|x - x_0|)$ 表示, 其中 x 为动点, x_0 为定点。

 下面我们以 $n = 3$ 为例来求解:

我们先来证明一个非常重要的结论: 位势积分公式 (3)

定理 5.1.2 (Green 公式). 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 为光滑连通区域, $\partial\Omega$ 光滑。对于 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 有 Green 公式:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (5.2)$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

定理 5.1.3 (位势积分公式). 对于区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$, 位势积分公式为:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \quad (5.3)$$

其中 $r = |x - x_0|$ 是点 x 到 x_0 的距离, $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿边界外法向的方向导数。

位势积分公式证明.

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 取 $v = \frac{1}{r}$. 但 $v = \frac{1}{r}$ 在原点处有奇点, 不满足 Green 公式的条件。

在三维情形下, $v = \frac{1}{r} = r^{2-3}$ 是基本解的主项。为处理奇点, 设 $B_\varepsilon(0)$ 是以原点为球心、 ε 为半径的小球, 定义:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0)$$

在新的区域 Ω_ε 上, $v = \frac{1}{r} \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ 。

在 Ω_ε 上应用 Green 公式:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

由于基本解满足:

$$\Delta E(r) = \delta(r) = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} \Big|_{\Omega_\varepsilon} = 0$$

边界 $\partial\Omega_\varepsilon$ 由两部分组成: $\partial\Omega$ 和 ∂B_ε 。因此:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

在球面 ∂B_ε 上, 外法向量指向球心, 因此:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left[u \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] ds \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left(-\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} ds \end{aligned}$$

应用积分中值定理, 存在 $Q^*, \hat{Q} \in \partial B_\varepsilon$ 使得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot u(Q^*) = 4\pi u(Q^*) \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} ds &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) = 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $Q^*, \hat{Q} \rightarrow Q$, 且第二项趋于零。因此:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = -4\pi u(Q)$$

综合以上结果, 得到:


$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + 4\pi u(Q)$$

整理得基本公式:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds \quad (5.4)$$

□

 下面我们来确定 C_3 。

 **注.** 此步骤是整个推导的核心, 它建立了分布意义下的基本解定义与经典积分公式之间的联系!

C_3 的确定. 设基本解为 $E(x) = C_3 \frac{1}{r}$, 其中 $r = |x|$ 。根据分布理论中基本解的定义, 它应满足:

$$\Delta E(x) = \delta(x)$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac delta 函数。

为了确定常数 C_3 , 我们考虑上述方程在测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上的作用。根据分布导数的定义, 有:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle \Delta E(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle E(x), \Delta \varphi(x) \rangle \quad (\text{因为 Laplace 算子是自伴的}) \\ &= C_3 \left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi(x) \right\rangle \\ &= C_3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx\end{aligned}$$

现在我们需要计算积分 $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx$ 。为了应用前面推导的积分公式, 我们选择一个足够大的球域 $\Omega = B_R(0)$, 使得 $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$ 。由于 φ 是紧支撑的, 在边界 $\partial\Omega$ 上, φ 及其导数都为零。

应用前面定理中得到的基本公式 (5.4):

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

取 $u = \varphi$, $Q = 0$ 。由于 $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$, 在边界 $\partial\Omega$ 上 φ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 都为零, 因此边界项消失:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0, \quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds = 0$$

于是公式简化为:

$$\varphi(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx$$

由于 $\text{supp}(\Delta \varphi) \subset \text{supp}(\varphi) \subset \Omega$, 我们可以将积分域扩展到整个 \mathbb{R}^3 :

$$\varphi(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx$$

现在比较两个表达式:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= C_3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx \quad (\text{从基本解定义得到}) \\ \varphi(0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx \quad (\text{从积分公式得到})\end{aligned}$$

由于这对所有测试函数 φ 都成立, 我们得到:

$$C_3 = -\frac{1}{4\pi}$$

因此, 三维 Laplace 算子的基本解为:

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

□

定理 5.1.4 (三维 Laplace 算子的基本解). 三维 Laplace 算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ 的基本解为:

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (5.5)$$



即满足分布意义下的方程 $\Delta E = \delta$ 。



注. 对于一般的 n 维情况, 我们有:

$$E(r) = \begin{cases} C_n r^{2-n}, & n \geq 3 \\ C_2 \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{(2-n)S_n} \quad (n \geq 3), \quad C_2 = \frac{1}{2\pi}$$

这里 S_n 是 \mathbb{R}^n 中单位球的表面积.

证明详见 8.2.4 节.

5.1.2 平均值公式

定理 5.1.5 (调和函数的球面平均值公式). 设 u 是调和函数, $\Omega = B_R(Q)$ 是以 Q 为球心、 R 为半径的球域, 则有球面平均值公式:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R} u(P) dS_P \quad (5.6)$$

其中积分是在球面 $S_R(Q)$ 上的面积分。



证明. 由于 $\Delta u = 0$, 利用基本解积分公式 (5.4):

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \frac{1}{r} \underbrace{\Delta u}_0 dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds$$

由于 $\Delta u = 0$, 第二项为零. 因此:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds$$

在球面 ∂B_R 上, $r = R$ 为常数, 且外法向导数 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$. 于是:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u ds$$

我们发现上面的表达式和 (5.6) 只差了 $\frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds$, 故我们下面来证明

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

即可证明 (5.6).

我们给出以下断言:

断言 5.1.6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 连通开集且有光滑边界 $\partial\Omega$, u 是调和函数 ($\Delta u = 0$), 则有:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS_P = 0$$



法一. 使用格林公式 (5.2), 令 $v = 1$, 则 $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dX = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

由于 $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$, 且 $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$, 代入得:

$$0 = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

□

法二. (i) 对于任意光滑向量场 \mathbf{F} 和光滑有界区域 Ω , 有:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

其中 \mathbf{n} 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

(ii) 取向量场 $\mathbf{F} = \nabla u$, 即 \mathbf{F} 是函数 u 的梯度场。那么:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$$

在边界上, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$ 。

(iii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u dV &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ \int_{\Omega} 0 dV &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (\text{因为 } \Delta u = 0) \\ 0 &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS \end{aligned}$$

□

 回到原命题:

应用 claim 5.1.6, 在球面平均值公式中, 第一项为零:

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

因此得到:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u ds$$

这正是球面平均值公式。 □

命题 5.1.7 (体积平均公式). 设 $B_R(Q)$ 是以 Q 为球心、 R 为半径的球体, u 是调和函数, 则成立体积平均值公式:

$$u(Q) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_{B_R(Q)} u(P) dV_P \quad (5.7)$$



证明. 对于任意 $0 < r \leq R$, 由调和函数的球面平均值公式, 在半径为 r 的球面上有:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r(Q)} u(P) dS_P$$

将上式两边乘以 $4\pi r^2$ 并对 r 从 0 到 R 积分:

$$\begin{aligned} \int_0^R 4\pi r^2 u(Q) dr &= \int_0^R \left(\iint_{\partial B_r(Q)} u(P) dS_P \right) dr \\ &= \iiint_{B_R(Q)} u(P) dV_P \end{aligned}$$

计算左边积分:

$$\int_0^R 4\pi r^2 u(Q) dr = 4\pi u(Q) \int_0^R r^2 dr = 4\pi u(Q) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 u(Q)$$

因此得到:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 u(Q) = \iiint_{B_R(Q)} u(P) dV_P$$

整理即得:

$$u(Q) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_{B_R(Q)} u(P) dV_P$$

 注. 利用的原理实际上就是: 球面的积分是体积!

□

5.1.3 极值原理

定理 5.1.8 (极值原理). 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中连通开集, u 在 Ω 中调和且不恒等于常数, 则 u 不能在 Ω 内部达到上下确界, u 的最值只能在边界 $\partial\Omega$ 上达到。



证明. 使用反证法. 假设 u 是非常值调和函数且在 Ω 内部达到上确界。

设 $M = \sup_{\Omega} u$, 且存在 $Q \in \Omega$ 使得 $u(Q) = M$ 。

 接下来我们通过证明边界上恒取到最大值来证明命题。

断言 5.1.9. 如果 u 在 Ω 内某点达到最大值 M , 则 u 在 Ω 上恒等于 M 。



断言证明. 由于 $Q \in \Omega$ 且 Ω 是开集, 存在邻域 $B_\delta(Q) \subseteq \Omega$ 。

由体积平均值公式:

$$M = u(Q) = \frac{1}{|B_\delta(Q)|} \iiint_{B_\delta(Q)} u(P) dV_P$$

假设存在 $P_0 \in B_\delta(Q)$ 使得 $u(P_0) < M$ (否则 u 在 $B_\delta(Q)$ 上恒等于 M)。

由 u 的连续性, 存在 P_0 的邻域 $V_{P_0} \subseteq B_\delta(Q)$, 使得:

$$u(P) < \frac{u(P_0) + M}{2} < M \quad \text{对所有 } P \in V_{P_0}$$

将积分分解:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{|B_\delta(Q)|} \iiint_{B_\delta(Q)} u(P) dV_P \\ &= \frac{1}{|B_\delta(Q)|} \left(\iiint_{V_{P_0}} u(P) dV_P + \iiint_{B_\delta(Q) \setminus V_{P_0}} u(P) dV_P \right) \\ &< \frac{1}{|B_\delta(Q)|} \left(|V_{P_0}| \cdot \frac{u(P_0) + M}{2} + |B_\delta(Q) \setminus V_{P_0}| \cdot M \right) \\ &< \frac{1}{|B_\delta(Q)|} (|V_{P_0}| \cdot M + |B_\delta(Q) \setminus V_{P_0}| \cdot M) = M \end{aligned}$$

这就得到了矛盾 $M < M$ 。因此假设不成立, 即 u 在 $B_\delta(Q)$ 上恒等于 M 。 \square

 回到原命题:

现在, 对于任意 $R \in \Omega$, 由于 Ω 是连通的, 存在一条连续路径连接 Q 和 R 。沿着这条路径, 我们可以用有限个重叠的球覆盖它, 在每个球上应用上述论证, 最终得到 $u(R) = M$ 。因此 u 在整个 Ω 上恒等于 M , 与 u 是非常值函数的假设矛盾。

综上, 如果 u 是非常值调和函数, 则不能在 Ω 内部达到最大值。同理可证最小值的情况。因此 u 的最值只能在边界 $\partial\Omega$ 上达到。 \square

5.1.4 边值问题

定义 5.1.1 (Laplace 方程). 考虑 Laplace 方程:

$$\Delta u = 0, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ 开集}$$

常见的边界条件类型:

1. *Dirichlet* 边界条件:

$$u|_{\partial\Omega} = f_1$$

2. *Neumann* 边界条件:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = f_2$$


其中 n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

3. 混合边界条件:

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial n} + bu \right) \Big|_{\partial\Omega} = f_3$$

定理 5.1.10 (Dirichlet 问题的唯一性与稳定性). 考虑 *Dirichlet* 边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

则其解如果存在, 必是唯一的, 且连续依赖于边界数据 f 。 

证明. **唯一性证明:** 设 u_1, u_2 都是该方程的解, 即满足:

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0, & i = 1, 2 \\ u_i|_{\partial\Omega} = f, & i = 1, 2 \end{cases}$$

令 $v = u_1 - u_2$, 则 v 满足:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极值原理, 调和函数在区域内部的最大值和最小值必须在边界上达到。由于 v 在边界上恒为零, 因此在整个区域 Ω 上必有 $v \equiv 0$, 即 $u_1 = u_2$ 。唯一性得证。

 **注.** 就是说: 最大值和最小值都为 0, 那显然整个区域上都是 0.

稳定性证明: 设 u_1, u_2 分别满足:

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0, & i = 1, 2 \\ u_i|_{\partial\Omega} = f_i, & i = 1, 2 \end{cases}$$

且边界数据满足 $|f_1 - f_2| < \varepsilon$ 。

令 $v = u_1 - u_2$, 则 v 满足:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = f_1 - f_2, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极值原理, v 在区域 Ω 内的取值被其边界值所控制:

$$|v(x)| \leq \sup_{y \in \partial\Omega} |f_1(y) - f_2(y)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$$

即:

$$|u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$$

这表明解连续依赖于边界, 稳定性得证。

 **注.** 我们要证明一个偏微分方程的稳定性, 实际上就是要证明:

如果边界数据 f_1 和 f_2 很接近, 那么对应的解 u_1 和 u_2 在整个区域 Ω 上也应当很接近。

即:

$$\sup_{\partial\Omega} |f_1 - f_2| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{\Omega} |u_1 - u_2| < C\varepsilon$$

其中 C 是某个常数 (这里 Dirichlet 问题调和函数情形下 $C = 1$)。

□

命题 5.1.11. 设边界值问题为

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

若 u 是该边界条件下的解, 则 $u + c$ (其中 c 为常数) 也是该边界条件的解, 且所有解均可表示为 $u + c$ 的形式。



证明. 设 v 是满足上述边界条件的解, 令 $w = u - v$.

则 w 满足以下齐次边界值问题:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

将 w 代入格林第一公式 (5.15):

$$\iint_{\partial\Omega} w \cdot \frac{\partial w}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} w \cdot \Delta w dV + \iint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 dV$$

由于 $\Delta w = 0$ 且 $\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0$, 上式左边和右边第一项均为 0, 因此:

$$\iint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 dV = 0$$

因为被积函数是平方和 (非负), 积分结果为 0 当且仅当每一项均为 0, 即:

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

这表明 w 是常数函数, 即 $w \equiv c$ (c 为常数). 因此 $v = u - c$, 即所有解可表示为 $u + c$ 的形式. \square

命题 5.1.12. 设 $\Omega = B_R(0)$ (以原点为球心、半径为 R 的开球), $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (u 在 Ω 内二阶连续可微, 在 Ω 的闭包上连续). 则有如下等式成立:

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx$$

并且, 若 $\Delta u \geq 0$, 则

$$u(0) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p$$

证明. 因为 $\Omega = B_R(0)$, 其边界 $\partial\Omega = \partial B_R$ 是球面, 外法向与径向一致. 此时:

♡ r 在边界 ∂B_R 上取值为 R , 即 $r = R$;

♡ 法向导数 $\frac{\partial^{\perp}}{\partial n}$: 对 $r = |x|$, $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$ (外法向沿径向), 由链式法则 $\frac{\partial^{\perp}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{R^2}$ (在边界 $r = R$ 上).

将这些代入位势积分公式 (3), 得到:

$$u(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \left(-\frac{1}{R^2} \right) \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \frac{1}{r} \Delta u dx$$

展开并整理边界积分项:

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS - \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \frac{1}{r} \Delta u dx$$

取 $v \equiv 1$, 则 $\nabla v = 0$, 代入得:

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{B_R} \Delta u dx$$

将此结果代入上式中第一项:

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi R} \int_{B_R} \Delta u dx$$

将上述化简结果代回, 整理积分项:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{B_R} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \frac{1}{r} \Delta u dx \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx \end{aligned}$$


其中 dS_p 是球面 ∂B_R 上的面积元。

当 $\Delta u \geq 0$ 时, 看等式中第二项 $I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx$: 在球 B_R 内, $r \leq R$ (因为 r 是到原点距离, 球内点满足 $|x| \leq R$), 所以 $\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \leq 0$ (当 $r < R$ 时严格小于 0, $r = R$ 时等于 0)。

由于被积函数 $\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u \leq 0$ ($\Delta u \geq 0$ 且前面因子非正), 积分结果 $I_2 \leq 0$ 。因此:

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p + I_2 \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p$$

综上, 命题得证。 □

 注. 更进一步, 我们有: 设 $\Omega = B_R(Q)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 则:

$$(i) \quad u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx$$

$$(ii) \quad \text{若 } \Delta u \geq 0, \text{ 则 } u(Q) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p.$$

证明详见 8.2.5 节。

5.1.5 格林公式

定义 5.1.2 (格林第二公式). 对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 以及函数 $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, 格林第二公式表述为:

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (5.8)$$

其中 $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子, $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 的外法向导数, dV 是体积元, dS 是边界的面积元。 

 我们可以由格林第二公式 (5.8) 得到之前位势积分公式 (3) 的推广公式: 三维位势积分公式 (5.9) 和 (5.10)。

定理 5.1.13 (三维位势积分公式). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界连通开区域, 其边界 $\partial\Omega$ 光滑 (或分片光滑), $x_0 \in \Omega$, 函数 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ 。取 Laplace 方程的基本解 $v(x, x_0) = \frac{1}{4\pi r}$ (其中 $r = |x - x_0| > 0$ 为点 x 到点 x_0 的距离), 则位势积分公式为:

$$u(x_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dV \quad (5.9) \quad \img alt="End of theorem icon" data-bbox="831 901 851 916"/>$$

当 u 为调和函数 (即 $\Delta u = 0$) 时, 公式可简化为:

$$u(x_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (5.10)$$



位势积分公式的详细推导.

1. 挖去奇点构造正则区域:

由于基本解 $v(x, x_0) = \frac{1}{4\pi r}$ 在 $x = x_0$ 处具有奇异性 ($r = 0$ 时函数值趋于无穷大), 直接在整个区域 Ω 上应用格林公式会遇到困难. 为此, 我们采用”挖去奇点”的技术:

取以 x_0 为中心、充分小的半径 $\varepsilon > 0$ 的小球 $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < \varepsilon\}$, 使得 $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset \Omega$. 构造新的区域:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$$

新区域 Ω_ε 的边界由两部分组成:

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x_0)$$

这里需要注意法向的方向: 在 $\partial\Omega$ 上, 法向 n 指向 Ω 的外部; 在 $\partial B_\varepsilon(x_0)$ 上, 由于我们挖去了小球内部, 所以对于区域 Ω_ε 来说, $\partial B_\varepsilon(x_0)$ 的法向应该指向小球内部 (即指向 x_0), 这与通常的外法向方向相反.

2. 应用格林第二公式:

在区域 Ω_ε 上, 函数 $u \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$ 和 $v = \frac{1}{4\pi r} \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$ 都足够光滑, 可以应用格林第二公式:

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (5.11)$$

由于 $v = \frac{1}{4\pi r}$ 是 Laplace 方程的基本解, 在 Ω_ε 内 (即 $r > 0$ 时) 满足 $\Delta v = 0$. 因此公式左边简化为:

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dV = - \iiint_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u dV = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dV$$

公式右边是边界积分, 由于 $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x_0)$, 我们有:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS &= \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\ &\quad + \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

综合以上结果, 我们得到:

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dV = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (5.12)$$

3. 分析小球边界积分的极限:

现在重点分析小球边界 $\partial B_\varepsilon(x_0)$ 上的积分. 在球面 $\partial B_\varepsilon(x_0)$ 上:

♡ $r = \varepsilon$ (常数)

♡ $v = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$

♡ 法向导数: 由于法向指向球心 (与径向相反), 有

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$$

因此小球边界上的积分为:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \left(u \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

将积分拆分为两部分:

$$I_\varepsilon = I_\varepsilon^{(1)} + I_\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u dS - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

对于第一部分 $I_\varepsilon^{(1)}$, 由积分中值定理, 存在 $x_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ 使得:

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u dS = u(x_\varepsilon) \cdot 4\pi\varepsilon^2$$

因此:

$$I_\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \cdot u(x_\varepsilon) \cdot 4\pi\varepsilon^2 = u(x_\varepsilon)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $x_\varepsilon \rightarrow x_0$, 由 u 的连续性得:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(1)} = u(x_0)$$

对于第二部分 $I_\varepsilon^{(2)}$, 由于 $u \in C^2(\bar{\Omega})$, 其梯度有界, 存在常数 $M > 0$ 使得 $\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq M$ 在 $\partial B_\varepsilon(x_0)$ 上成立。利用球面面积公式:

$$|I_\varepsilon^{(2)}| = \left| \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot M \cdot 4\pi\varepsilon^2 = M\varepsilon$$

因此:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(2)} = 0$$

综合以上结果:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(1)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(2)} = u(x_0) + 0 = u(x_0)$$

4. 取极限得到最终公式:

现在回到方程 (5.12):

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dV = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + I_\varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 注意到:

- ♡ $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega$ (在集合意义下)
- ♡ $\iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dV \rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dV$ (由控制收敛定理)
- ♡ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = u(x_0)$

因此取极限后得到:

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dV = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + u(x_0)$$

整理后即得三维位势积分公式:

$$u(x_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dV$$

当 u 为调和函数时, $\Delta u = 0$, 体积分项消失, 得到简化形式:

$$u(x_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

□

 注. 我们也可以推广到 n 维位势积分公式:

对于 $n \geq 2$ 维空间 \mathbb{R}^n 中的区域 Ω , Laplace 方程的基本解为:

$$v(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n r^{n-2}}, & n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases}$$

其中 ω_n 为 n 维单位球的表面积, $r = |x - x_0|$ 为点 x 到点 x_0 的距离. 此时位势积分公式为:

$$u(x_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \int_{\Omega} v \Delta u dV \quad (5.13)$$

当 u 为调和函数 ($\Delta u = 0$) 时, 公式简化为仅含边界积分的形式:

$$u(x_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (5.14)$$

定理 5.1.14 (格林第一公式). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为具有分片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 若 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则成立:

$$\iint_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} u \cdot \Delta v dx + \iint_{\Omega} (\nabla u)^T (\nabla v) dx \quad (5.15)$$

其中 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 表示 v 沿 $\partial\Omega$ 外法向的方向导数, $\Delta v = \nabla^2 v$ 为 v 的 Laplace 算子, ∇u 、 ∇v 分别为 u 、 v 的梯度, $(\nabla u)^T (\nabla v)$ 表示梯度的内积 (即 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$).



证明. 散度定理指出, 对向量场 $\mathbf{F} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, 有:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dx$$

其中 \mathbf{n} 是 $\partial\Omega$ 的外法向单位向量, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 是 \mathbf{F} 的散度。

取向量场 $\mathbf{F} = u \cdot \nabla v$, 其中 u 是标量函数, ∇v 是 v 的梯度向量。计算其散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (u \nabla v)$$

利用乘积的散度法则 $\nabla \cdot (f \mathbf{G}) = \nabla f \cdot \mathbf{G} + f \cdot \nabla \cdot \mathbf{G}$ (f 为标量, \mathbf{G} 为向量场), 得:

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \nabla \cdot (\nabla v)$$

由于 $\nabla \cdot (\nabla v) = \Delta v$ (Laplace 算子的定义), 因此:

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = (\nabla u)^T (\nabla v) + u \cdot \Delta v$$

对 $\mathbf{F} = u \nabla v$ 应用散度定理, 左边边界积分中, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = u \cdot \nabla v \cdot \mathbf{n} = u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}$ (方向导数的定义: $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$), 因此:

$$\iint_{\partial \Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) dx$$

将散度的计算结果代入右边, 得:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) dx = \iiint_{\Omega} [(\nabla u)^T (\nabla v) + u \cdot \Delta v] dx$$

展开后即得:

$$\iint_{\partial \Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} u \cdot \Delta v dx + \iiint_{\Omega} (\nabla u)^T (\nabla v) dx$$

□

5.2 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

问题 5.2.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\partial \Omega$ 光滑。考虑 Laplace 方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial \Omega} = g \end{cases}$$

其中 $\Gamma(r, \infty)$ 是 Laplace 算子基本解。



解. 以下是 $n = 3$ 的情形。

由格林公式 (5.2):

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

令 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial \Omega} = \frac{1}{4\pi r(p, Q)} \end{cases} \quad (5.16)$$

其中 Q 是动点, p 是定点 (实际上, $v|_{\partial \Omega} = -\Gamma(p, Q)$)。

此时

$$\int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0$$

由位势积分公式 (3) 可知:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS_p - \int_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) dS_p \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{4\pi r} - v \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} - v \right) dS_p \end{aligned}$$

由于 $v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r}$, 则有 $-v \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial v}{\partial n} = 0$, 于是

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot u dS_p$$

 注. 这里的 $G(p, Q)$ 被称为格林函数.

其中 $G(p, Q) = -\frac{1}{4\pi r} + v$, 且满足:

1. $G(p, Q)|_{\partial\Omega} = 0$
2. $\Delta G(p, Q) = \Delta(\Gamma(p, Q) + v(p, Q)) = \delta(p, Q)$
3. 对于

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

有 $u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} g(p) dS_p$ (形式解)

 注. 实际上, 这说明: 对一般 Laplace 方程, 只需求出格林函数即可得到解。

□

 我们下面补充一下完整的格林函数的定义:

定义 5.2.1 (格林函数). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑. 对于 $Q \in \Omega$, 格林函数 $G(p, Q)$ 是满足如下条件的函数:

$$\begin{cases} \Delta_p G(p, Q) = \delta(p - Q), & p \in \Omega \\ G(p, Q)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

 注. 我们肯定会有疑问, 为什么 v 的选取要是这样的:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r(p, Q)} \end{cases}$$

在我们定义了格林函数后, 实际上这个 v 的选取是由格林函数的定义反推出来的:

♡ 由第一个条件, 因 $\Delta_p \Gamma = \delta(p - Q)$, 故需要:

$$\Delta_p v(p, Q) = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$

即 v 是调和函数。

♡ 由第二个条件:

$$G(p, Q)|_{\partial\Omega} = \Gamma(p, Q)|_{\partial\Omega} + v(p, Q)|_{\partial\Omega} = 0$$

所以:

$$v(p, Q)|_{\partial\Omega} = -\Gamma(p, Q)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r(p, Q)}$$

 下面我们给出一个用格林函数来求解的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的一个子问题:

问题 5.2.2. 设

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

求其解。

解. 和 () 相同, 我们令

$$v = \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = -\Gamma(p, Q) \end{cases}$$

⇒ 把 u, v 代入格林公式 (5.2):

$$\int_{\Omega} (u \cdot \Delta v - \Delta u \cdot v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_p$$

即有

$$\int_{\Omega} v \cdot \Delta u dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS_p = 0$$

再次利用位势积分公式 (5.13) ($n \geq 3$ 时通用的位势积分公式):

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_{\partial\Omega} (-\Gamma(p, Q)) \frac{\partial u}{\partial n} dS_p + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \Gamma(p, Q)}{\partial n} dS_p + \int_{\Omega} \Gamma(p, Q) \cdot \Delta u dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (-\Gamma) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} \Gamma(p, Q) \Delta u dx \quad (\text{因 } u|_{\partial\Omega} = 0) \end{aligned}$$

对其进行配平变换:

$$u(Q) = \int_{\Omega} (\Gamma(p, Q) + v(p, Q)) \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} (\Gamma(p, Q) + v) \left(-\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

由 $v|_{\partial\Omega} = -\Gamma(p, Q) \Rightarrow (\Gamma(p, Q) + v)|_{\partial\Omega} = 0$, 故

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(p, Q) \Delta u dx = \int_{\Omega} G(p, Q) \cdot f(p) dx$$

其中 Green 函数是 $G(p, Q) = \Gamma(p, Q) + v(p, Q)$, 这是形式解。 □

命题 5.2.1. 设

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

有形式解。

证明. 由 problem 5.2.1 和 problem 5.2.2 我们可得

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

对应的解分别记为 u, u_1, u_2 , 其中:

$$\begin{cases} u_1(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot u dS_p = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot g(p) dS_p \\ u_2(Q) = \int_{\Omega} G(p, Q) \Delta u dx = \int_{\Omega} G(p, Q) \cdot f(p) dx \end{cases}$$

故:

$$u = u_1 + u_2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot g(p) dS_p + \int_{\Omega} G(p, Q) \cdot f(p) dx$$

□

性质 5.2.1 (格林函数的交换性). $Q_1, Q_2 \in \Omega$, 则:

$$G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1)$$



证明. 令 $B_1 = B_\epsilon(Q_1)$, $B_2 = B_\epsilon(Q_2)$, 记

$$\Omega_\epsilon := \Omega \setminus (B_\epsilon(Q_1) \cup B_\epsilon(Q_2))$$

在 Ω_ϵ 中, $G(p, Q_1)$ 和 $G(p, Q_2)$ 均是调和函数。

对任意 $p \in \Omega_\epsilon$, 应用格林第二公式 (5.8):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\epsilon} [G(p, Q_1) \Delta G(p, Q_2) - G(p, Q_2) \Delta G(p, Q_1)] dx \\ &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[G(p, Q_1) \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} - G(p, Q_2) \frac{\partial G(p, Q_1)}{\partial n} \right] dS_p \end{aligned}$$

边界 $\partial\Omega_\epsilon$ 由三部分组成:

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} = \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_1} + \int_{\partial B_2}$$

在边界 $\partial\Omega$ 上, 由格林函数的定义有 $G(p, Q_1)|_{\partial\Omega} = 0$, $G(p, Q_2)|_{\partial\Omega} = 0$, 所以该部分积分为零。

因此:

$$\left(\int_{\partial B_1} + \int_{\partial B_2} \right) K(p) dS_p = 0 \quad \text{记作} \quad I_1 + I_2 = 0$$

其中 $K(p) = G(p, Q_1) \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} - G(p, Q_2) \frac{\partial G(p, Q_1)}{\partial n}$ 。

现在计算 I_1 。当 $P \in \partial B_1$ 时, 考虑第一项:

$$\int_{\partial B_1} G(p, Q_1) \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} dS_p \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

这是因为:

$$\sup_{\partial B_1} |G(p, Q_1)| = \sup_{\partial B_1} |\Gamma(p, Q_1) + V(p)| \leq C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-2}} + C_1$$

$$\sup \left| \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} \right| \leq C_2$$

其中 C_1, C_2 是常数, C_n 是基本解 $\Gamma(r)$ 的系数。

因此:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_1} G(p, Q_1) \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} dS_p \right| &\leq C_2 \left(C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-2}} + C_1 \right) \int_{\partial B_1} dS_p \\ &= S_n \cdot \epsilon^{n-1} \cdot C_2 \left(C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-2}} + C_1 \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

现在考虑第二项:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_1} -G(p, Q_2) \frac{\partial G(p, Q_1)}{\partial n} dS_p \\ &= - \int_{\partial B_1} G(p, Q_2) \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right) (\Gamma(p, Q_1) + V(p, Q_1)) dS_p \\ &= \int_{\partial B_1} G(p, Q_2) \left(\frac{\partial}{\partial r} \Gamma(p, Q_1) + \frac{\partial V}{\partial r} \right) dS_p \end{aligned}$$

由积分中值定理:

$$\begin{aligned} &= G(p^*, Q_2) \cdot (n-2) C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \cdot S_n \cdot \epsilon^{n-1} + \left(G \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right) (\tilde{p}, Q_1) \cdot S_n \cdot \epsilon^{n-1} \\ &\rightarrow (n-2) C_n \cdot S_n \cdot G(Q_1, Q_2) \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

其中 $p^*, \tilde{p} \in \partial B_1$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $p^*, \tilde{p} \rightarrow Q_1$ 。

故有:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 = (n-2) S_n \cdot C_n \cdot G(Q_1, Q_2)$$


完全同理可得:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = -(n-2) S_n \cdot C_n \cdot G(Q_2, Q_1)$$

由 $I_1 + I_2 = 0$, 得到:

$$(n-2) S_n \cdot C_n \cdot [G(Q_1, Q_2) - G(Q_2, Q_1)] = 0$$

因此 $G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1)$, 结论成立。

 **注.** 思路和我们在数分二中利用格林公式来证明积分 $=0$ 的原理是一样的, 都是通过挖掉一个小球后在剩余部分利用格林公式然后在小球上直接进行积分的放缩。

□

性质 5.2.2. 设 $G(p, Q)$ 是格林函数, 当 $n=3$ 时有如下性质:

1. $0 < -G(p, Q) < \frac{1}{r(p, Q)}$, 当 $p \neq Q$ 时
2. $\int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} dS_p = 1$



证明.

1. 格林函数可表示为:

$$G(p, Q) = \Gamma(p, Q) + \nu(p, Q) = -\frac{1}{4\pi r(p, Q)} + \nu(p, Q)$$

则

$$-G(p, Q) = \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \nu(p, Q)$$

其中 ν 满足:

$$\Delta \nu = 0, \quad x \in \Omega, \quad \nu|_{\partial\Omega} = -\Gamma(p, Q) = \frac{1}{4\pi r(p, Q)}$$

利用极值原理:

$$\min_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(p, Q)} \leq \nu \leq \max_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(p, Q)}$$

当 $p \in \partial\Omega$ 时, $p \neq Q$, $\frac{1}{4\pi r(p, Q)} > 0$ 。当 $p \rightarrow Q$ 时, $-G(p, Q) \rightarrow \infty$ 。

存在 $\delta > 0$, 令 $B_\delta(Q)$ 是以 Q 为中心、 δ 为半径的球, 在边界 $\partial B_\delta(Q)$ 上有:

$$-G(p, Q)|_{\partial B_\delta(Q)} > 0$$

考虑函数 $-G(p, Q)$, 它满足:

$$\begin{cases} \Delta(-G(p, Q)) = 0, & p \in \Omega \setminus B_\delta(Q) \\ -G(p, Q)|_{\partial\Omega} = 0 \\ -G(p, Q)|_{\partial B_\delta(Q)} > 0 \end{cases}$$

由极值原理可知:

$$-G(p, Q) > 0, \quad \forall p \in \Omega \setminus B_\delta(Q)$$

另一方面:

$$\begin{aligned} -G(p, Q) &= \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \nu(p, Q) \leq \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \min_{\partial\Omega} \nu(p, Q) \\ &= \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \min_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(p, Q)} < \frac{1}{4\pi r(p, Q)} < \frac{1}{r(p, Q)} \end{aligned}$$

因此 $0 < -G(p, Q) < \frac{1}{r(p, Q)}$ 。

2. 考虑调和方程:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega$$

由格林函数表示公式:

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} u(p) dS_p$$

取 $u \equiv 1$, 这是调和方程的解, 代入得:

$$1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} dS_p$$

这就证明了第二个性质。

□

 接下来我们来看在特定区域上的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题。我们先来看半平面上的:

问题 5.2.3 (半平面 Laplace 方程的 Dirichlet 问题). 在半平面上的 Dirichlet 问题, $n = 2$ 时, 解可表示为:

$$u(\alpha) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, \alpha)}{\partial n} f(p) dS_p$$

其中 $G(p, \alpha) = \Gamma(p, \alpha) + v(p)$ 。

令 v 满足如下条件:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = -\Gamma(p, \alpha) \end{cases}$$

并且 $G(p, \alpha)|_{\partial\Omega} = 0$ 。

$\Gamma(p, \alpha)$ 表示在点 Q 放置单位正电荷产生的电势, $v(p)$ 通过在 Q 的对称点 Q_1 处放置适量负电荷使得边界上电势为零。

设在半平面中点 α 处放置单位正电荷, 在对称点 $(x, -y)$ 处放置单位负电荷。

当 $n = 2$ 时, Laplace 算子的基本解为:

$$\Gamma(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

故格林函数为:

$$G(p, \alpha) = \Gamma(p, \alpha) + v(p) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(p, \alpha)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(p, \alpha_1)}$$

其中

$$r(p, \alpha) = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}, \quad r(p, \alpha_1) = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p + y)^2}$$

由对称性可知, 在边界上有 $r(p, \alpha) = r(p, \alpha_1)$, 即 $G(p, \alpha)|_{\partial\Omega} = 0$ 。

计算法向导数:

$$\frac{\partial G(p, \alpha)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial y_p} \ln \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial y_p} \ln \frac{1}{r_1} \right)$$

分别计算两项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_p} \ln \frac{1}{r} &= -\frac{\partial}{\partial y_p} \ln r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y_p} = -\frac{y_p - y}{r^2} \\ \frac{\partial}{\partial y_p} \ln \frac{1}{r_1} &= -\frac{\partial}{\partial y_p} \ln r_1 = -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial y_p} = -\frac{y_p + y}{r_1^2} \end{aligned}$$

因此:

$$\frac{\partial G(p, \alpha)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{y_p + y}{r_1^2} - \frac{y_p - y}{r^2} \right)$$

解表示为:

$$u(\alpha) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, \alpha)}{\partial n} f(x_p, y_p) dS_p$$

在边界 $\partial\Omega$ 上, 恒有 $y_p = 0$, 代入得:

$$u(\alpha) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y}{r^2} f(x_p) dS_p = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x_p) \cdot \frac{y}{(x - x_p)^2 + y^2} dx_p$$

得到最终的形式解:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \cdot \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$



命题 5.2.2. 若 u 满足 $u|_{\partial\Omega} = f$, 则 u 有以下形式:

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} f(p) dS_p$$

即 u 是方程组的解。



证明. 先证 $u(Q)$ 满足 Laplace 方程:

$$\begin{aligned} \Delta_Q u(Q) &= \Delta_Q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} f(p) dS_p = \int_{\partial\Omega} \Delta_Q \left(\frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \right) f(p) dS_p \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta_Q G(p, Q)) f(p) dS_p \end{aligned}$$

事实上:

$$\Delta_Q G(p, Q) = \delta(p - Q) = \begin{cases} 0, & p \neq Q \\ \infty, & p = Q \end{cases}$$

因此:

$$\Delta_Q u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (\delta(p - Q)) f(p) dS_p$$

注意到 Ω 是连通开集, 故 $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$. 另一方面, $p \in \partial\Omega$, $Q \in \Omega$, 故 $\delta(p - Q) \equiv 0$.

因此 $\Delta_Q u(Q) = 0$, 即 $u(Q)$ 满足 Laplace 方程。

对于边值条件的验证, 由于 $Q \in \Omega$, 无法直接达到边界。需要说明:

$$\lim_{Q \rightarrow \partial\Omega} u(Q) = f$$

这是由解的稳定性保证的。

 **注.** 我们来详细说明一下怎么由解的稳定性保证的。

1. 非负性与归一化 证明:

(a) $K(p, Q) \geq 0$ 对所有 $p \in \partial\Omega$, $Q \in \Omega$ 。

(b) $\int_{\partial\Omega} K(p, Q) dS_p = 1, \forall Q \in \Omega$ 。

这可由极大值原理和格林函数的性质得到。

2. 质量集中性质 对任意 $\delta > 0$, 定义 $B_\delta(Q_0) = \{p \in \partial\Omega : |p - Q_0| < \delta\}$, 则:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(Q_0)} K(p, Q) dS_p = 0$$

即当 Q 接近边界点 Q_0 时, 核 $K(p, Q)$ 的质量集中在 $p \approx Q_0$ 附近。

3. 连续性论证 由于 f 在 $\partial\Omega$ 上连续, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得:

$$|f(p) - f(Q_0)| < \varepsilon, \quad \forall p \in B_\delta(Q_0)$$

于是:

$$\begin{aligned} |u(Q) - f(Q_0)| &= \left| \int_{\partial\Omega} K(p, Q)[f(p) - f(Q_0)] dS_p \right| \\ &\leq \int_{B_\delta(Q_0)} K(p, Q)|f(p) - f(Q_0)| dS_p \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(Q_0)} K(p, Q)|f(p) - f(Q_0)| dS_p \\ &\leq \varepsilon \int_{B_\delta(Q_0)} K(p, Q) dS_p + 2M \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(Q_0)} K(p, Q) dS_p \end{aligned}$$

其中 $M = \sup_{\partial\Omega} |f|$ 。

4. 取极限 由归一性 $\int_{\partial\Omega} K(p, Q) dS_p = 1$, 得:

$$|u(Q) - f(Q_0)| \leq \varepsilon + 2M \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(Q_0)} K(p, Q) dS_p$$

令 $Q \rightarrow Q_0$, 由质量集中性质, 第二项趋于 0, 故:

$$\limsup_{Q \rightarrow Q_0} |u(Q) - f(Q_0)| \leq \varepsilon$$

由 ε 任意性, 得:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} u(Q) = f(Q_0)$$

在平面问题中:

$$u(Q) = u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

需要说明:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x)$$

当 $y \rightarrow 0^+$ 时:

$$(x - \xi)^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad (\xi \neq x)$$

但在 $\xi = x$ 时, 趋于 ∞ 。

因此:

$$\frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} \rightarrow \delta(x - \xi) \quad (y \rightarrow 0^+)$$

此时:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = \langle \delta(x - \xi), f(\xi) \rangle = f(x)$$

这就证明了边值条件的满足。 □

 接下来, 我们来看圆上的:

例 5.2.1 (圆上的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题). 与半平面上的求解方法类似, 取格林函数

$$G(p, \alpha) = \Gamma(p, \alpha) + V(p)$$

其中 $G(p, \alpha)|_{\partial\Omega} = 0$ 。



取反演点 Q_1 , 满足 $\triangle OPQ \sim \triangle OQ_1P$ 。

由相似三角形性质可知:

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{r_1}{\rho_1}, \quad \frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1} \\ \Rightarrow \frac{r}{r_1} &= \frac{R}{\rho_1} = \frac{\rho}{R}, \quad \text{故在 } Q_1 \text{ 处放置 } \frac{R}{\rho} \text{ 负电荷} \\ \Rightarrow G(p, \alpha) &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(p, \alpha)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R/\rho}{r(p, \alpha_1)} \end{aligned}$$

其中

$$r^2(p, \alpha) = (x_p - x_\alpha)^2 + (y_p - y_\alpha)^2$$

Q_1 是完全确定的。无论 P 在边界上何处, Q_1, Q 形成的电荷在 P 上的电势为 0。

设用极坐标, 设 $P(\rho_p, \theta_p)$, $Q(\rho, \theta)$, $Q_1(\rho_1, \theta)$, 则

$$r^2 = |PQ|^2 = \rho_p^2 + \rho^2 - 2\rho_p\rho \cos(\theta_p - \theta)$$

$$r_1^2 = |PQ_1|^2 = \rho_p^2 + \rho_1^2 - 2\rho_p\rho_1 \cos(\theta_p - \theta)$$

并且 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho}$ 。

对于狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

解为:

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} f(p) dS_p$$

其中

$$\ln \frac{R}{\rho r_1} = \ln \frac{R}{\rho} - \ln r_1$$

令 $\nu = \theta - \varphi$, 则

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\ln \frac{R}{\rho r_1} \right) = -\frac{\rho_p - \rho_1 \cos \nu}{r_1^2} = \frac{\rho^2 \rho_p - \rho_1^2 \rho_1 \cos \nu}{R^2 r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{\rho_p - \rho \cos \nu}{r^2}$$

代入得:

$$\frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\rho^2 R - \rho_1^2 \rho_1 \cos \nu}{R^2 r^2} + \frac{R - \rho \cos \nu}{r^2} \right)$$

由 $\rho_1 \rho = R^2$, 化简得:

$$= \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)}$$

则

$$u(\theta) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, \theta)}{\partial n} f(p) dS_p$$

使用坐标变换:

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta_p - \theta)} \cdot f(p) dS_p$$




$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta_p - \theta)} \cdot f(R, \theta_p) \cdot R d\theta_p \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta_p - \theta)} \cdot f(\theta_p) d\theta_p
 \end{aligned}$$

得到形式解:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)} f(\varphi) d\varphi$$

记 $\theta_p = \varphi$.

 注. 当 $n = 2$ 时是线积分, 在圆周 $L = \{p : \text{dist}(p, Q) = R\}$ 上积分. 对参数化

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

有

$$\int g(x, y) dl = \int g(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

这里

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

则

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = R^2, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

代入即得上述结果.

命题 5.2.3. 设 $u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi$, 则 u 是狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \rho \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f(\rho) \end{cases}$$

的解.

证明. 首先验证 u 满足 Laplace 方程:

$$\Delta_\alpha u(\theta) = \Delta_\alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, \alpha)}{\partial n} f(p) dS_p = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta_\alpha G(p, \alpha)) f(p) dS_p = 0$$

对于边界条件, 由于 α 是内点, 需要验证当 α 趋近于边界时的情况:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \partial\Omega} u(\theta) = f$$

即

$$\lim_{\rho \rightarrow R^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi = f(R, \theta)$$

 我们通过以下断言来完成我们的证明.

断言 5.2.4. 若 $F_\rho(\theta - \varphi)$ 是 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 的周期为 2π 的连续函数, 且满足:

1. 对任意 $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$, 有

$$\left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi \right| \leq C$$

2. 在 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 上,

$$\lim_{\rho \rightarrow R^-} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi = \begin{cases} 1, & \theta \in [\varphi_1, \varphi_2] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

则

$$\lim_{\rho \rightarrow R^-} F_\rho(\theta - \varphi) = \delta(\theta - \varphi)$$



断言证明. 首先, 记

$$F_\rho(\theta - \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} = \frac{R^2 - \rho^2}{r^2}$$

1. 由于 $\rho^2 < R^2$ 且 $r^2 > 0$, 则对任意 $\varphi \in [0, 2\pi]$,

$$F_\rho(\theta - \varphi) \geq 0 \quad (\text{a})$$

对任意 $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, 可以观察到

$$F_\rho(\theta - \varphi) = \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot R$$

并且

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} f(p) dS_p = 1$$

考虑如下方程:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases}$$

此时有

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} f(p) dS_p = \int_0^{2\pi} F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi = 1 \quad (\text{b})$$

由 (a) 和 (b) 可知:

$$0 \leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi \leq 1$$

2. 当 $\theta \notin [\varphi_1, \varphi_2]$ 时, 此时 $\cos(\theta - \varphi) < 1$ 。

由几何性质可知: $r^2 \geq \delta > 0$ 。

对分子, 当 $\rho \rightarrow R^-$ 时, $F_\rho(\theta - \varphi) \rightarrow 0$, 因此

$$\lim_{\rho \rightarrow R^-} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi = 0$$

当 $\theta \in [\varphi_1, \varphi_2]$ 时, 考虑积分:

$$I = \int_0^{2\pi} F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi = \left(\int_{[0, 2\pi] \setminus [\varphi_1, \varphi_2]} + \int_{[\varphi_1, \varphi_2]} \right) F_\rho(\theta - \varphi) d\varphi \triangleq I_1 + I_2$$

当 θ 不在积分区间时, $\lim_{\rho \rightarrow R^-} I_1 = 0$; 当 θ 在积分区间时, $\lim_{\rho \rightarrow R^-} I_2 = 1$ 。

综上,

$$\lim_{\rho \rightarrow R^-} F_\rho(\theta - \varphi) = \delta(\theta - \varphi)$$

□

 我们回到原命题 (解的验证上):

则当 $\rho \rightarrow R^-$ 时,

$$\int_0^{2\pi} F_\rho(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi = \langle \delta(\theta - \varphi), f(\varphi) \rangle = f(\theta)$$

故是方程的解。

□

5.3 调和函数的其他性质


定理 5.3.1 (平均值公式逆定理). 若 u 满足 $u \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, 且对任意 $B_R(Q) \subset \Omega$ 满足平均值公式:

$$u(Q) = \frac{1}{|B_R(Q)|} \int_{B_R(Q)} u(p) dp \quad (5.18)$$

或等价地满足球面平均值公式:

$$u(Q) = \frac{1}{|S_R(Q)|} \int_{S_R(Q)} u(p) dp \quad (5.19)$$

则 u 在 Ω 内调和。

 注. 其中 $|B_R(Q)| = m(B_R(Q))$, $|S_R(Q)| = m(S_R(Q))$.



证明. 在 Ω 中任取一小球 B , 满足 $B \subset \subset \Omega$ 。

令 v 为如下边值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & p \in B \\ v|_{\partial B} = u|_{\partial B} \end{cases}$$

由于 v 在 B 上调和, 则 v 在 B 内满足平均值公式。进而 v 在 \bar{B} 内满足极值原理。

已知 u 也满足平均值公式, 则 u 在 \bar{B} 内也满足极值原理。

考虑函数 $w = u - v$, 则 w 在 \bar{B} 内也满足平均值公式:

$$w(Q) = \frac{1}{|B_R(Q)|} \int_{B_R(Q)} w(p) dp$$

因此 w 在 \bar{B} 上满足极值原理。

又因为

$$w|_{\partial B} = u|_{\partial B} - v|_{\partial B} = 0$$

由极值原理可得:


$$w|_{\bar{B}} = 0$$

即 $u = v$ 在 \bar{B} 上恒成立。

由于 B 是 Ω 中任意小球, 可知 $u = v$ 在 Ω 上成立, 因此 u 在 Ω 内调和。 \square

定理 5.3.2 (可去奇点定理, $n = 2$). 若 $u(\alpha)$ 在 A 点附近调和 (A 处可能不调和), 并且

$$u(\alpha) = o(1) \cdot \ln r(A, Q)$$

则可以补充 $u(\alpha)$ 在 A 点处的值使得 u 在整个邻域中调和 (也包括 A)。 

证明. 由于

$$u(\alpha) = o(1) \cdot \ln r(A, Q)$$

则

$$\lim_{\alpha \rightarrow A} \frac{u(\alpha)}{\ln r(A, Q)} = 0$$

给定固定的 R , 使得 $B_R(A) \subset \Omega$, 对任意 $\delta < R$, 考虑球环区域 $B_R(A) \setminus B_\delta(A)$ 。

定义比较函数:

$$V_\epsilon = \epsilon \left(\ln \frac{1}{r(A, Q)} - \ln \frac{1}{R} \right)$$

可知:

$$\Delta V_\epsilon = 0, \quad Q \in B_R(A) \setminus B_\delta(A)$$

且

$$V_\epsilon|_{\partial B_R(A)} = \epsilon \left(\ln \frac{1}{R} - \ln \frac{1}{R} \right) = 0$$

现在定义 u_1 为如下边值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in B_R(A) \\ u_1|_{\partial B_R(A)} = u|_{\partial B_R(A)} \end{cases}$$

考虑函数 $w = u_1 - u$, 则 w 满足:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & B_R(A) \setminus B_\delta(A) \\ w|_{\partial B_R(A)} = u_1|_{\partial B_R(A)} - u|_{\partial B_R(A)} = 0 \end{cases}$$

只需要比较 V_ϵ 和 w 。

对任意固定的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{\alpha \rightarrow A} \frac{u(\alpha)}{\ln r(A, \alpha)} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow A} \frac{u_1(\alpha)}{\ln r(A, \alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow A} \frac{|w|}{\ln r(A, \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow A} \frac{|u_1 - u|}{\ln r(A, \alpha)} = 0$$

则存在 $\delta_0 > 0$, 在 ∂B_{δ_0} 上有 $|w| \leq V_\epsilon$ 。

考虑函数 $w - V_\epsilon$, 它在区域 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中满足:

$$\begin{cases} \Delta(w - V_\epsilon) = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A) \\ (w - V_\epsilon)|_{\partial B_R(A)} = 0 \\ (w - V_\epsilon)|_{\partial B_{\delta_0}(A)} \leq 0 \end{cases}$$

由极值原理, 在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中有:

$$w - V_\epsilon \leq 0 \quad \text{即} \quad w \leq V_\epsilon$$

同理, 考虑函数 $w + V_\epsilon$, 可得:

$$\begin{cases} \Delta(w + V_\epsilon) = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A) \\ (w + V_\epsilon)|_{\partial B_R(A)} = 0 \\ (w + V_\epsilon)|_{\partial B_{\delta_0}(A)} \geq 0 \end{cases}$$

由极值原理, 在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中有:

$$w + V_\epsilon \geq 0 \quad \text{即} \quad w \geq -V_\epsilon$$

因此, 在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中成立:


$$|w| \leq V_\epsilon$$

令 $\delta_0 \rightarrow 0^+$, 依然成立 $|w| \leq V_\epsilon$, 即 $|w| \leq V_\epsilon$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 上成立。

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 则 $V_\epsilon \rightarrow 0$, 于是:

$$|u_1 - u| = 0 \quad \text{在} B_R(A) \setminus \{A\} \text{ 上}$$

即 $u_1 = u$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中。由于 u_1 在 $B_R(A)$ 中调和, 可以通过定义 $u(A) = u_1(A)$ 来补充 u 在 A 点的值, 使得 u 在整个 $B_R(A)$ 中调和。

 **注.** 证明的想法就是: 我们要证明我们可以通过补充点的值来证明在整个邻域内都是调和的, 那我们就可以构造一个满足的函数来验证二者极限相等就可以证明结论。

□

 **注.** $n = 3$ 的说明请参见 8.2.6 节。

性质 5.3.1 (调和函数的解析性). 对于 $\Delta u = 0$ 的解 u 不仅属于 C^2 , 还是实解析的。若 u 是 $\Delta u = 0$ 的 \mathcal{D}' 解 (分布意义解), 即对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle u, \Delta \varphi \rangle = 0$ 成立, 则 u 称为 \mathcal{D}' 意义下的解。



 下面我们来介绍 (或者说是回顾) 我们在复变函数中学到的刘维尔定理。

 **感觉可能考证明.**

定理 5.3.3 (Liouville 定理). 在全空间 \mathbb{R}^n 上调和并有界的函数为常值。



证明. 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 取两个球 $B_R(0)$ 和 $B_R(x)$, 其中 $R > |x|$.

由调和函数的平均值公式:

$$u(0) = \frac{1}{|B_R(0)|} \int_{B_R(0)} u \, dV$$

$$u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u \, dV$$

计算差值的估计:

$$|u(x) - u(0)| = \frac{1}{|B_R|} \left| \int_{B_R(0)} u \, dV - \int_{B_R(x)} u \, dV \right|$$

$$\leq \frac{1}{|B_R|} \left(\int_{B_R(0) \setminus B_R(x)} |u| \, dV + \int_{B_R(x) \setminus B_R(0)} |u| \, dV \right)$$

设 $|u| \leq M$, 则:

$$|u(x) - u(0)| \leq \frac{M}{|B_R|} (|B_R(0) \setminus B_R(x)| + |B_R(x) \setminus B_R(0)|)$$


 注. $[B_R(0) \setminus B_R(x)] \cup [B_R(x) \setminus B_R(0)] = B_R(x) \Delta B_R(0)$

注意到对称差集的体积:

$$|B_R(0) \setminus B_R(x)| + |B_R(x) \setminus B_R(0)| \leq C_n [(R + |x|)^n - (R - |x|)^n]$$

而球体积 $|B_R| = \omega_n R^n$, 因此:

$$|u(x) - u(0)| \leq \frac{M}{\omega_n R^n} \cdot C_n [(R + |x|)^n - (R - |x|)^n]$$

 注. $\deg [(R + |x|)^n - (R - |x|)^n] = n - 1$

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 右边趋于 0, 故 $u(x) = u(0)$. 由 x 的任意性, u 为常值函数. □

 下面我们来介绍几个和 Harnack 定理相关的结论.

定理 5.3.4 (Harnack 定理). 设 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是区域 Ω 中的调和函数序列, 且在 Ω 中内闭一致收敛于 $u(x)$, 则 $u(x)$ 也是 Ω 中的调和函数。



证明. 任取闭球 $B \subset\subset \Omega$, 则 u_n 在 ∂B 上一致收敛于 u . 对每个 u_n 有:

$$u_n(\alpha) = \int_{\partial B} \frac{\partial G(p, \alpha)}{\partial n} \cdot u_n(p) \, dS_p$$

其中 $G(p, \alpha)$ 是相应区域的格林函数。

令 $f_n(p) = u_n(p)$, 则 $f_n(p)$ 在 ∂B 上一致收敛于 $f(p) = u(p)$.

因此:

$$u_n(\alpha) = \int_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot f_n(p) \, dS_p \rightarrow \int_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot f(p) \, dS_p = u(\alpha)$$

由于格林函数的法向导数在 B 内部是光滑的, 且 f_n 一致收敛, 极限与积分可交换。

得到的极限函数 $u(\alpha)$ 满足 $\Delta u = 0$, 且由 B 的任意性可知 u 在整个 Ω 上调和. □

 感觉可能考证明.

命题 5.3.5. 设 $n = 2$, u 在 $B_R(Q)$ 中非负调和, 且 $u \in C(\overline{B_R})$, 对 $\forall P \in B_R$, $\rho = |PQ|$, 则

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q) \quad (5.20)$$

 注. 一般的 Harnack 不等式: 对紧集 $K \subset \subset \Omega$, 取调和函数 u , 有 (5.22)

$$\sup_K u \leq C \inf_K u$$

其中 C 是常数。

实际上: 若取 $C = \frac{R+\rho}{R-\rho}$, 由

$$u(P) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q), \quad Q \text{ 是球心}$$

可得

$$\sup_B u(P) \leq Cu(Q)$$

同理又由

$$\frac{1}{C}u(Q) \leq u(P) \Rightarrow \frac{1}{C}u(Q) \leq \inf_B u(P)$$

因此

$$\sup_B u(P) \leq Cu(Q) \leq C^2 \inf_B u(P)$$

证明. 由圆形边界可知:

$$u(P) = u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi$$

其中 $f(\varphi) = u(R, \varphi)$ 是边界值。

由 $-1 \leq \cos(\theta - \varphi) \leq 1$, 可得

$$\frac{R^2 - \rho^2}{(R + \rho)^2} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho)^2}$$

即

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} \leq \frac{R + \rho}{R - \rho}$$

因此

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \leq u(P) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

由调和函数的平均值性质, 当 $\rho = 0$ 时:

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

代入即得:

$$\frac{R - \rho}{R + \rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho}u(Q)$$

□

命题 5.3.6 (Harnack 不等式). 设 u 在 Ω 中非负调和, $B_{4R} \subset \Omega$, 则

$$\sup_{B_R} u \leq 3^n \inf_{B_R} u \quad (5.21)$$

证明. 取 $p_1, p_2 \in B_R$, 由平均值公式:

$$u(p_1) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(p_1)} u dV, \quad u(p_2) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(p_2)} u dV$$

由几何关系: $B_R(p_1) \subset B_{3R}(p_2) \subset B_{4R}$, 并且:

$$|B_{3R}| = 3^n |B_R|$$

由于 u 非负调和, 则:

$$\int_{B_R(p_1)} u dV \leq \int_{B_{3R}(p_2)} u dV \leq 3^n \int_{B_R(p_2)} u dV$$

因此:

$$u(p_1) \cdot |B_R| \leq 3^n u(p_2) \cdot |B_R|$$

即:

$$u(p_1) \leq 3^n u(p_2)$$

由 p_1, p_2 的任意性可知:

$$\sup_{B_R} u(p) \leq 3^n \inf_{B_R} u(p)$$

□

命题 5.3.7. 对紧集 $K \subset \subset \Omega$, 取调和函数 u , 有

$$\sup_K u \leq C \inf_K u \quad (5.22)$$

其中 C 是常数。

证明. 取 $R = \frac{1}{4} \text{dist}(K, \partial\Omega)$, 此时保证对 $\forall p \in K$, 均有

$$B_{4R}(p) \subset \Omega$$

由于 K 是紧集, 则是全有界的, 即存在有限个点 $\{p_1, \dots, p_N\} \subset K$, 使得

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N B_R(p_n)$$

对任意 $p_\alpha, p_\beta \in K$, 设 $p_\alpha \in B_R(p_{i_1})$, $p_\beta \in B_R(p_{i_2})$, 则存在有限个点 p_{j_1}, \dots, p_{j_m} , 使得

$$B_R(p_{j_1}) \cap B_R(p_{i_1}) \neq \emptyset, \quad B_R(p_{j_2}) \cap B_R(p_{j_1}) \neq \emptyset, \quad \dots, \quad B_R(p_{i_2}) \cap B_R(p_{j_m}) \neq \emptyset$$

由上一个命题反复迭代, 可知存在常数 C 使得:

$$u(p_\alpha) \leq C u(p_\beta)$$

由 p_α, p_β 的任意性可知:

$$\sup_K u(p) \leq C \inf_K u(p)$$

□

5.4 亚椭圆

 其实我这部分搞得不是很懂... 但我感觉这部分不可能考吧~ urv 也没留作业讲这部分也一笔带过感觉是介绍性的...

 我们先来定义 singsupp .

定义 5.4.1 (奇异支集 (Singular Support)). 设 u 是分布 (广义函数), $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. u 的**奇异支集**, 记作 $\text{singsupp}(u)$, 定义为 \mathbb{R}^n 中满足以下条件的最大开集的补集: 在该开集上 u 是一个 C^∞ 函数。

等价地, $x_0 \notin \text{singsupp}(u)$ 当且仅当存在 x_0 的邻域 U 使得 u 在 U 上等于某个 C^∞ 函数。

即:

$$\text{singsupp}(u) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{U \subset \mathbb{R}^n \text{ 开集} : u|_U \in C^\infty(U)\}$$

例 5.4.1. ♡ 对于 Dirac δ 函数: $\text{singsupp}(\delta) = \{0\}$

♡ 对于 Heaviside 函数 $H(x)$: $\text{singsupp}(H) = \{0\}$

♡ 对于 $f(x) = |x|$: $\text{singsupp}(f) = \{0\}$

♡ 对于光滑函数 $g \in C^\infty$: $\text{singsupp}(g) = \emptyset$

定义 5.4.2. 线性偏微分算子 $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$, 其中 $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$. 若满足对 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 有 $\text{singsupp } u \subseteq \text{singsupp } Pu$, 则称 P 是亚椭圆的。

即: P 是亚椭圆的 \iff 对 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 若 $Pu \in C^\infty(\Omega)$, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$.

证明. 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 若 $Pu \in C^\infty(\Omega)$, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$ 。

这意味着 u 光滑的区域要大于 Pu 光滑的区域, 即

$$\text{singsupp } u \subseteq \text{singsupp } Pu$$

另一方面, 已知 P 是亚椭圆的, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 且 $Pu \in C^\infty(\Omega)$ 。

由于 $\text{singsupp } u \subseteq \text{singsupp } Pu$, 且 $Pu \in C^\infty(\Omega) \implies \text{singsupp } Pu = \emptyset$, 因此 $\text{singsupp } u = \emptyset$, 即 $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

定理 5.4.1. 对于 $C^\infty(\Omega)$ 系数线性偏微分算子 P , 设 E 是基本解, 则

$$PE = \delta(x)$$

且

$$\text{singsupp } PE = \text{singsupp } \delta = \{0\}$$

若 P 是亚椭圆的, 则有

$$\text{singsupp } E \subseteq \text{singsupp } PE = \{0\}$$

即

$$\text{singsupp } E = \{0\}$$

证明. 设 E 是 P 的基本解, 满足 $PE = \delta$ 。

由于 δ 的奇性支集为 $\{0\}$, 即 $\text{singsupp } \delta = \{0\}$ 。

若 P 是亚椭圆的, 由定义有:

$$\text{singsupp } E \subseteq \text{singsupp } PE = \text{singsupp } \delta = \{0\}$$

又因为 E 在原点处必有奇性 (否则 PE 将光滑), 所以

$$\text{singsupp } E = \{0\}$$

即 C^∞ 系数线性偏微分算子 P 若为亚椭圆, 则其基本解的奇性支集为 $\{0\}$ 。 □

定理 5.4.2. 设 P 是常系数线性偏微分算子, 则

$$P \text{ 是亚椭圆的} \iff \text{基本解 } E \text{ 满足 } PE = \delta \text{ 且 } \text{singsupp } E = \{0\}.$$

其中:

1. $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$ 是常系数算子;
2. $\text{singsupp } E = \{0\}$ 是常系数线性偏微分算子为亚椭圆的充要条件。



定理 5.4.3. Laplace 算子 Δ 是亚椭圆的。

1. Δ 是常系数、偏微分、线性算子;
2. 基本解 $E(r)$ 满足 $\text{singsupp } E(r) = \{0\}$ 。



定理 5.4.4. $\Delta u = 0$ 的 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 解均是 C^∞ 解, 进而是实解析的。



证明. Δ 是亚椭圆算子, u 是 $\Delta u = 0$ 的 \mathcal{D}' 解。

由 $0 \in C^\infty$ 可得 $u \in C^\infty$, 因此 u 是 C^2 的经典解。

由于 Laplace 方程的解具有解析性, 故 u 是解析的。

 注. 这里的正则性结论均针对区域内部, 在边界上可能有奇性。

□

6. 抛物型方程

6.1	热传导方程的导出	83
6.2	热传导方程的边初值问题	90

👩 我们在这一章节主要研究下面三个问题:

热方程:

$$\partial_t u - a^2 \Delta u = f(x, t) \quad (6.1)$$

柯西问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \Delta u = f(t, x), & t > 0 \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases} \quad (6.2)$$

初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \Delta u = f(t, x), & t > 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = s(x, t) \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases} \quad (6.3)$$

6.1 热传导方程的导出

👩 我们先导出热传导方程:

问题 6.1.1 (热传导方程的导出 $n = 3$). 热传导算子的基本解 ($t > 0$).

对于 $t > 0$, 有

$$E(x, t) = (4\pi a^2 t)^{-n/2} H(t) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) \quad (6.4)$$

设 $E(x, t)$ 是基本解, 则

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta E(x, t) = \delta(x, t) \quad (*)$$

对 (*) 式两边同时对 x 作 Fourier 变换:

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta E(x, t) \right) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(\delta(x, t))$$

化简之后得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = \delta(t)$$

即关于 $\hat{E}(\xi, t)$ 的一阶非齐次常微分方程。

$$\Rightarrow \hat{E}(\xi, t) = H(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

利用 Fourier 逆变换:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{E}(\xi, t) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} H(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-a^2 |\xi|^2 t} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} H(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 t |\xi|^2 + ix \cdot \xi} d\xi \end{aligned}$$

利用高斯积分公式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-A|\xi|^2 + ix \cdot \xi} d\xi = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4A}}$$

取 $A = a^2 t$, 得:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= (2\pi)^{-n} H(t) \left(\frac{\pi}{a^2 t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \\ &= H(t) \cdot (4\pi a^2 t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) \end{aligned}$$

因此:

$$E(x, t) = H(t) \cdot (4\pi a^2 t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$$

 **注.** 我们对化简步骤进行补充一下:

1. **线性性:** 利用 Fourier 变换的线性性, 将左边拆分为两项:

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right) - a^2 \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(\Delta E(x, t))$$

2. **时间导数项:** 由于 Fourier 变换只对空间变量 x 进行, 时间导数可以移到变换外面:

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t)$$

其中 $\hat{E}(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[E(x, t)]$ 。

3. 拉普拉斯算子的 *Fourier* 变换: 利用 *Fourier* 变换的性质, 对于拉普拉斯算子有:

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[\Delta E(x, t)] = -|\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)$$

这是因为在 *Fourier* 空间中, $\frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow i\xi_j$, 所以

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \rightarrow \sum_{j=1}^n (i\xi_j)^2 = -|\xi|^2$$

根据 *Fourier* 变换的微分性质:

一阶偏导 $\frac{\partial E}{\partial x_j}$ 的 *Fourier* 变换为 $i\xi_j \hat{E}(\xi, t)$, 因此二阶偏导 $\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}$ 的 *Fourier* 变换为 $(i\xi_j)^2 \hat{E}(\xi, t) = -\xi_j^2 \hat{E}(\xi, t)$ 。

拉普拉斯算子 $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 的 *Fourier* 变换即为对所有方向求和: $\sum_{j=1}^n -\xi_j^2 \hat{E}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)$, 其中 $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2$ 。

4. 右边项的 *Fourier* 变换:

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[\delta(x)\delta(t)] = \delta(t)\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[\delta(x)] = \delta(t) \cdot 1 = \delta(t)$$

因为 *Dirac* δ 函数的 *Fourier* 变换是常数 1。

将以上结果代入原式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t) - a^2 \left(-|\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) \right) = \delta(t)$$

整理后得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = \delta(t)$$



下面我们来分析一般的非齐次热传导方程 *Cauchy* 问题:

问题 6.1.2. 一般的非齐次热传导方程 *Cauchy* 问题:

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (6.5)$$



方法一. 利用 **叠加原理**, 将问题分解为两个方程:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (P_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

由于 P 是线性问题, 若 u_1 是 P_1 的解, u_2 是 P_2 的解, 则 $u = u_1 + u_2$ 是 P 的解。

Step 1 : 求解 P_1

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

我们对 x 进行 Fourier 变换, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, t)|_{t=0} = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

化为了一阶常系数常微分方程的初值问题, 求解得到

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

对 $\hat{u}(\xi, t)$ 进行 Fourier 逆变换

$$u(x, t) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi) \exp(-a^2 |\xi|^2 t))$$

由卷积定理: $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$, 则 $f * g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g})$ 。

令 $\hat{f}_1 = \exp(-a^2 |\xi|^2 t)$, $\hat{f}_2 = \hat{\varphi}(\xi)$, 则

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2) = f_1(x, t) * f_2(x)$$

其中 $f_2(x) = \varphi(x)$, 只需计算 $f_1(x, t)$:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}(\exp(-a^2 |\xi|^2 t)) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-a^2 |\xi|^2 t} d\xi \\ &= (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x) * f_1(x, t) \\ &= (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy \\ &= H(t) \cdot (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy \\ &= E(x, t) * \varphi(x) \end{aligned}$$

其中 $E(x, t) = H(t)(4\pi a^2 t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$ 是热方程的基本解。

上述步骤表明, 当 $u(x, t)$ 满足 (P_1) 时,

$$u(x, t) = E(x, t) * \varphi(x)$$

下面我们验证 $u(x, t)$ 满足 (P_1) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u(x, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) (E(x, t) * \varphi(x)) \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) E(x, t) \right] * \varphi(x) \\ &= \delta(x, t) * \varphi(x) \\ &= \langle \delta(t, y), \varphi(x - y) \rangle_y \end{aligned}$$

断言 6.1.1.

$$\langle \delta(x, t), f(x) \rangle = \delta(t)f(0) \quad (6.6)$$

断言的证明. 我们使用磨光核逼近: 设 $\delta_\varepsilon(t, x) = \delta_\varepsilon(t)\delta_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

对 $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 则有

$$\begin{aligned} \langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \rangle, \phi(t) &\rightarrow \langle \langle \delta(t, x), f(x) \rangle, \phi(t) \rangle \\ &= \int \phi(t) dt \int \delta_\varepsilon(t, x) f(x) dx \\ &= \int \int \phi(t) \delta_\varepsilon(t, x) f(x) dx dt \\ &= \langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \phi(t) \rangle \\ &\rightarrow \langle \delta(t, x), f(x) \phi(t) \rangle \\ &= f(0) \phi(0) = f(0) \langle \delta(t), \phi(t) \rangle = \langle f(0) \delta(t), \phi(t) \rangle \end{aligned}$$

从而有 $\langle \delta(t, x), f(x) \rangle = f(0) \delta(t)$. □

由断言结果:

$$\langle \delta(t, y), \varphi(x - y) \rangle_y = \varphi(x) \delta(t)$$

由于 $t > 0$, 有 $\delta(t) = 0$, 则 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta\right) u(x, t) = 0$.

下面我们验证初值条件:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x)$$

由于 $u(x, t) = E(x, t) * \varphi(x)$, 实际上需要验证 $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(x, t) = \delta(x)$

则有

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x)$$

满足初值条件。

Step 2 : 求解 P_2

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

考虑齐次化原理 (Duhamel 原理), 将 P_2 化为齐次方程并受边界问题。

 注. 关于 Duhamel 原理具体可参见 theorem 6.2.3.

设 $U(x, t, \tau)$ 是方程

$$(P_3) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \Delta U = 0, & t > \tau \\ U(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

的解, 则

断言 6.1.2.

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau \quad (6.7)$$


是方程 P_2 的解。



断言的证明.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= U(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial U(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau \\ &= f(x, t) + \int_0^t a^2 \Delta U(x, t, \tau) d\tau \quad (\Delta \text{ 只与 } x \text{ 有关}) \\ &= f(x, t) + a^2 \Delta \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \Delta u \end{aligned}$$

对初值问题, 积分上下限均为 0, 则 $u(x, t)|_{t=0} = 0$. □

 注. 实际上我们就是通过 Duhamel 原理把 (P_2) 化成一个形式上与 (P_1) 相似的 (P_3) , 然后再根据 (P_1) 的解表示成 (P_3) 最后带回 (P_2) .

利用 (P_1) 的解写出方程组 (P_3) 的解:

$$\begin{aligned} U(x, t, \tau) &= U(x, t - \tau) \\ &= (4\pi(t - \tau)a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4a^2(t - \tau)}\right) dy \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \left[(4\pi(t - \tau)a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4a^2(t - \tau)}\right) dy \right] d\tau \end{aligned}$$

直接写成 \mathbb{R}^n 上的积分:

$$\begin{aligned} &= \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} (4\pi(t - \tau)a^2)^{-\frac{n}{2}} f(y, \tau) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4a^2(t - \tau)}\right) H(\tau) H(t - \tau) dy d\tau \\ &= E(x, t) * (H(t)f(x, t)) \triangleq u_2 \end{aligned}$$

需要验证 u_2 是 (P_2) 的解。

齐次化原理时已经验证 u_2 是 (P_2) 的解, 并且对方程 (P_3) 实际上是验证 $U(x, t - \tau)$ 是类似于 P_1 的解。实际上已经验证最终 (P) 的解只需 $u_1 + u_2$ 。

□

解: 方法二. 我们采用一种新的思路, 用基本解 $E(x, t)$ 直接求形式解:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$p = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$$

前提: 若算子 p 的基本解是 $E(x, t)$, 则 $u = E * f$ 是 $pu = f$ 的 D' 解。

对于方程 (p) 直接代入无弦展边值信息, 需进一步处理

令 $\tilde{u}(x, t) = H(t)u(x, t)$, 其中 $u(x, t)$ 是方程 p 的解

$$\tilde{u}(x, t)|_{t>0} = H(t)u(x, t)|_{t>0} = u(x, t)$$

则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta\right)\tilde{u}(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta\right)H(t)u(x, t) = F(x, t)$$

此时

$$\tilde{u}(x, t) = E(x, t) * F(x, t) \stackrel{t \geq 0}{=} u(x, t)$$

这里是对所有未知数的进行卷积。

对于 $F(x, t) = (\partial_t - a^2 \Delta)H(t) \cdot u(x, t)$

$$\begin{aligned} &= \partial_t H(t)u(x, t) - a^2 \Delta H(t) \cdot u(x, t) \\ &= \delta(t)u(x, t) + H(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - H(t) \cdot a^2 \Delta u(x, t) \\ &= \delta(t)u(x, t) + H(t) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u\right) \\ &= \delta(t)u(x, t) + H(t) \cdot f(x, t) \\ &= \delta(t)\varphi(x) + H(t) \cdot f(x, t) \end{aligned}$$

其中, 对 $\forall \xi \in C_0^\infty(R^1)$, 则有

$$\begin{aligned} \langle \delta(t)u(x, t), \xi(t) \rangle &= \langle \delta(t), u(x, t)\xi(t) \rangle \\ &= u(x, 0) \cdot \xi(0) = u(x, 0)\langle \delta(t), \xi(t) \rangle \quad \text{或} \quad \delta(t)u(x, t) = \delta(t)\varphi(x) \\ &= \langle \delta(t)u(x, 0), \xi(t) \rangle = \langle \delta(t)\varphi(x), \xi(t) \rangle \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) &= E(x, t) * F(x, t) \\ &= E(x, t) * (\delta(t) \cdot \varphi(x) + H(t) \cdot f(x, t)) \end{aligned}$$

其中 $E(x, t) = H(t) \cdot (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$

(i) $\delta(t) \cdot \varphi(x) * E(x, t)$

使用度为极距, 则 $\delta_\epsilon(t) = \delta(t) * \Phi_\epsilon(t) \in C_0^\infty(R)$

故 $\delta_\epsilon(t) \cdot \varphi(x) * E(x, t) = \iint_{R^{n+1}} \delta_\epsilon(T)\varphi(y)E(x-y, t-T)dydT$

由于 $\delta_\epsilon(t) \in C_0^\infty(R)$, $\varphi(x)$ 是有界连续

$E(x, t)$ 在空间方向 x 上是急减的, 从而积分有意义

$$\begin{aligned} \text{故 } \delta_\epsilon(t) \cdot \varphi(x) * E(x, t) &= \int_{R^n} \varphi(y)dy \int_R \delta_\epsilon(T)E(x-y, t-T)dT \\ &= \langle \varphi(y), \langle \delta_\epsilon(T), E(x-y, t-T) \rangle_T \rangle_y \end{aligned}$$

两边同时取极限, 有

$$\begin{aligned} \delta(t) \cdot \varphi(x) * E(x, t) &= \langle \varphi(y), \langle \delta(T), E(x-y, t-T) \rangle_T \rangle_y \\ &= \langle \varphi(y), E(x-y, t) \rangle_y \\ &= E(x, t) * \varphi(x) \\ &= H(t)(4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \varphi(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}\right) dy \end{aligned}$$

 注. 9 $\delta(t) \cdot \varphi(x) * E(x, t) = \varphi(x) * E(x, t)$

与法一中 $(P_1) \begin{cases} \partial_t u - a^2 \Delta u = 0, & (t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ 的结果相同。


(ii) $(H(t) \cdot f(x, t)) * E(x, t)$

$$(H(t) \cdot f(x, t)) * E(x, t) = \iint_{R^{n+1}} H(T) f(y, T) H(t-T) [4\pi a^2 (t-T)]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-T)}} dy dT$$

注意该等式, $H(T) = 1 \Rightarrow T > 0$

$H(t-T) = 1 \Rightarrow t-T > 0$, 故 $0 < T < t$

$$= \int_{R^n} \int_0^t f(y, T) (4\pi a^2 (t-T))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-T)}\right) dT dy$$

 注. $(H(t) \cdot f(x, t)) * E(x, t)$ 与 $p_2 \begin{cases} \partial_t u - a^2 \Delta u = f(x, t), t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解相同。

综上: $\hat{u}(x, t) = \varphi(x) * E(x, t) + (H(t) \cdot f(x, t)) * E(x, t)$

这仍是形式解。需要进一步验证, 这一步已在方法一中验证。

□

6.2 热传导方程的边初值问题

 下面我们来看热传导方程的初边值问题:

问题 6.2.1 (热传导方程的初边值问题). 考虑热传导方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - \alpha^2 \Delta u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = f(x) \\ u|_{\Gamma} = g(x, t) \end{cases} \quad (6.8)$$

其中 Γ 表示空间区域的边界。**抛物边界**是指空间边界在时间区间 $[0, T]$ 上进行推移形成的边界。设 Γ_T 表示 $[0, T]$ 上的抛物边界, 则有 $u|_{\Gamma_T} = g(x, t)$ 。

当 $n = 1$ 时, 抛物边界为 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 两条直线; 当 $n = 2$ 时, 抛物边界是柱体侧面 (除去上底面)。



 注. 无内部热源的热传导过程对应于齐次热传导方程。



 下面我们给出热传导方程的初边值问题的极值原理.

定理 6.2.1 (极值原理). 设 $u(x, t)$ 在区域 $R_T = \{\alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq t \leq T\}$ 上满足齐次热传导方程 $\partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = 0$, 则 $u(x, t)$ 在 R_T 上的最大值和最小值必在抛物边界 Γ_T 上取得, 即:

$$\max_{R_T} u(x, t) = \max_{\Gamma_T} u(x, t), \quad \min_{R_T} u(x, t) = \min_{\Gamma_T} u(x, t)$$

 **注.** 实际上这类极值原理都和复变函数中的最大模原理类似. 

证明. 我们仅证明最大值情形.

 **注.** 考虑函数 $w(x, t) = -u(x, t)$, 则 w 也满足热传导方程. 由最大值情形:

$$\max_{R_T} w = \max_{\Gamma_T} w \quad \Rightarrow \quad -\min_{R_T} u = -\min_{\Gamma_T} u$$

因此 $\min_{R_T} u = \min_{\Gamma_T} u$.

设 $M = \max_{R_T} u(x, t)$, $m = \max_{\Gamma_T} u(x, t)$, 显然 $M \geq m$. 采用**反证法**, 假设 $m < M$, 即 $u(x, t)$ 在 R_T 内部某点 (x^*, t^*) 取得最大值 M , 其中 $\alpha < x^* < \beta$, $0 < t^* \leq T$.

构造辅助函数:

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2}(x - x^*)^2$$

其中 $L = \beta - \alpha$. 在抛物边界 Γ_T 上考察 $v(x, t)$:

$$v(x, t)|_{\Gamma_T} = u(x, t)|_{\Gamma_T} + \frac{M - m}{4L^2}(x - x^*)^2|_{\Gamma_T} \leq m + \frac{M - m}{4} < M$$


因为 $(x - x^*)^2 \leq L^2$ 且在边界上严格小于 L^2 . 然而在内部点 (x^*, t^*) 处:

$$v(x^*, t^*) = u(x^*, t^*) = M$$

因此 $v(x, t)$ 在 R_T 内部某点 (x_1, t_1) 取得最大值.

而在极大值点 (x_1, t_1) 处有:

$$\partial_{xx} v(x_1, t_1) \leq 0, \quad \partial_t v(x_1, t_1) \geq 0$$

 **注.** 若函数 $v(x, t)$ 在区域 R_T 内部一点 (x_1, t_1) 处取得极大值, 且在该点处可微, 则必须满足:

$$\partial_{xx} v(x_1, t_1) \leq 0, \quad \partial_t v(x_1, t_1) \geq 0$$

这是由于: 对于空间变量 x , 在极大值点处二阶导数非正 (凹函数); 对于时间变量 t , 在极大值点处若 $t_1 < T$, 则时间导数为零 (极值点必要条件), 若 $t_1 = T$, 则时间导数非负 (否则在 $t > T$ 时函数值会更大, 与最大值假设矛盾).

当 $0 < t_1 < T$ 时, $\partial_t v(x_1, t_1) = 0$; 当 $t_1 = T$ 时, $\partial_t v(x_1, t_1) \geq 0$. 因此:

$$(\partial_t - a^2 \partial_{xx})v(x_1, t_1) \geq 0$$

但直接计算得:

$$(\partial_t - a^2 \partial_{xx})v = (\partial_t - a^2 \partial_{xx})u - a^2 \cdot \frac{M - m}{2L^2} = -a^2 \cdot \frac{M - m}{2L^2} < 0$$

这就产生了矛盾, 故假设不成立, 必有 $m = M$. □

 下面我们来研究初边值问题解的唯一性和稳定性.

问题 6.2.2 (初边值问题唯一性与稳定性). 考虑热传导方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = f(x, t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u(\alpha, t) = \mu_1(t), \quad u(\beta, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (6.9)$$

解.

唯一性 设 u_1, u_2 均是上述初边值问题的解, 令 $w(x, t) = u_1 - u_2$, 则 $w(x, t)$ 满足:

$$\begin{cases} (\partial_t - a^2 \partial_{xx})w = 0 \\ w|_{\Gamma_T} = 0 \end{cases}$$

由极值原理可知 $w \equiv 0$, 从而 $u_1 = u_2$.

稳定性 设 u_1, u_2 分别满足两个初边值问题:

$$(P_1) \begin{cases} (\partial_t - a^2 \partial_{xx})u = f(x, t) \\ u|_{\Gamma_T} = g_1(x, t) \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} (\partial_t - a^2 \partial_{xx})u = f(x, t) \\ u|_{\Gamma_T} = g_2(x, t) \end{cases}$$


若在抛物边界 Γ_T 上满足 $\max |g_1 - g_2| \leq \epsilon$, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足:

$$(P) \begin{cases} (\partial_t - a^2 \partial_{xx})w = 0 \\ w|_{\Gamma_T} = g_1 - g_2 \end{cases}$$

由极值原理可得:

$$|u_1 - u_2| \leq \max_{\Gamma_T} |g_1 - g_2| \leq \epsilon$$

□

 **注.** 这里证明的是热传导方程解关于边界条件的连续依赖性. 具体而言, 若两个解的边界数据 g_1 和 g_2 在抛物边界 Γ_T 上相差不超过 ϵ , 则在整个区域 R_T 内, 两个解的差 $|u_1 - u_2|$ 也不超过 ϵ .

这意味着边界条件的微小扰动只会引起解的微小变化, 体现了热传导问题的**稳定性**. 从物理角度看, 这符合热传导过程的平滑特性: 边界温度的微小变化不会导致内部温度分布的剧烈改变.


 接下来我们考虑热传导方程初值问题的极值原理.

问题 6.2.3 (初值问题的极值原理). 考虑热传导方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = 0, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

有界函数类条件: 存在常数 $B > 0$, 对 $\forall t \geq 0, -\infty < x < +\infty$, 满足 $|u(x, t)| < B$.



 **注.** 物理角度理解: u 表示物体的温度, 在实际物理过程中温度总会存在最大值或上界。

解. 我们通过初边值问题的极值原理来说明初值问题解的唯一性和稳定性:

唯一性 设 u_1, u_2 均满足该方程, 令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

并且 u 有界: $|u| \leq |u_1| + |u_2| \triangleq M$.

取任意给定点 (x_0, t_0) , $t_0 > 0$, 考虑区域 $R_0 = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$.

构造辅助函数:

$$v(x, t) = \frac{4B}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right)$$

则:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4Ba^2}{L^2} - a^2 \cdot \frac{4B}{L^2} = 0$$

在抛物边界 Γ_T 上:

$$\heartsuit \text{ 底边 } t = 0: v(x, 0) = \frac{2B}{L^2} (x - x_0)^2 \geq 0 = u(x, 0)$$


$$\heartsuit \text{ 侧边 } x = x_0 \pm L: v(x_0 \pm L, t) = 2B + \frac{4Ba^2}{L^2} t \geq 2B \geq u(x_0 \pm L, t)$$

因此 $v(x, t)|_{\Gamma_T} \geq u(x, t)|_{\Gamma_T}$ 成立, 且满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v|_{\Gamma_T} \geq u|_{\Gamma_T} \end{cases}$$

则在构造的抛物区域 R_0 上均成立:

$$v(x, t) \geq u(x, t)$$

 **注.** 考虑函数 $w(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$, 则 $w(x, t)$ 满足:

(a) **在区域内部:** 由于 $(\partial_t - a^2 \partial_{xx})v = 0$ 且 $(\partial_t - a^2 \partial_{xx})u = 0$, 因此

$$(\partial_t - a^2 \partial_{xx})w = 0$$

(b) **在抛物边界 Γ_T 上:** 由前面验证可知

$$w|_{\Gamma_T} = v|_{\Gamma_T} - u|_{\Gamma_T} \geq 0$$

(c) **应用极值原理:** 对于热传导方程, 如果函数在抛物边界上非负, 且在内部满足方程, 则在整个区域上函数值保持非负, 即

$$w(x, t) \geq 0 \text{ 在 } R_0 \text{ 上恒成立}$$

因此得到 $v(x, t) \geq u(x, t)$ 在 R_0 上成立。这是热传导方程极值原理的直接推论：解在区域内的值不会超过其在抛物边界上的最大值。（最大最小值都在抛物边界上取到）

即：

$$u(x, t) \leq \frac{4B}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right)$$

同理可证：

$$u(x, t) \geq -\frac{4B}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right)$$

综上所述：

$$|u(x, t)| \leq \frac{4B}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right)$$

在点 (x_0, t_0) 处：

$$|u(x_0, t_0)| \leq \frac{4Ba^2}{L^2} \cdot t_0$$

令 $L \rightarrow \infty$ ，则 $u(x_0, t_0) = 0$ 。由 (x_0, t_0) 的任意性， $u(x, t) \equiv 0$ ，即 $u_1 = u_2$ 。

稳定性 设 u_1, u_2 分别满足：

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - a^2 \partial_{xx} u_1 = 0, & t > 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t u_2 - a^2 \partial_{xx} u_2 = 0, & t > 0 \\ u_2|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

并且 $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \eta$ ，只需证明 $|u_1 - u_2| < \eta$ 。

令 $w = u_1 - u_2$ ，则 w 满足方程：

$$\begin{cases} \partial_t w - a^2 \partial_{xx} w = 0, & t > 0 \\ w|_{t=0} = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}$$

且 w 有界： $|w| \leq |u_1| + |u_2| \leq 2B$ 。

取任意给定点 (x_0, t_0) ， $t_0 > 0$ ，考虑区域 $R_0 = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$ 。

构造辅助函数：

$$v(x, t) = \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

则：

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4B^2 a^2}{L^2} - a^2 \cdot \frac{4B^2}{L^2} = 0$$

在抛物边界 Γ_T 上：

♡ 底边 $t = 0$ ： $v(x, 0) = \frac{2B^2}{L^2}(x - x_0)^2 + \eta \geq \eta > |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = w(x, 0)$ ，因为 $|\varphi_1 - \varphi_2| < \eta$ 且 $(x - x_0)^2 \geq 0$ 。

♡ 侧边 $x = x_0 \pm L$ ： $v(x_0 \pm L, t) = 2B^2 + \frac{4B^2 a^2}{L^2} t + \eta \geq 2B^2 + \eta \geq 2B \geq |w(x_0 \pm L, t)|$ ，因为 $|w| \leq 2B$ 且 $2B^2 + \eta \geq 2B$ （取 $B \geq 1$ 时成立）。

因此 $v(x, t)|_{\Gamma_T} \geq w(x, t)|_{\Gamma_T}$ 成立。此时我们令 $h = v - u$ ，则有 $h|_{\Gamma_T} \geq 0$ 。又由极值原理， h 的最大最小值在抛物边界上取到，而 $h|_{\Gamma_T} \geq 0$ ，故在 R_0 上成立：

$$h \geq 0 \Rightarrow v(x, t) \geq w(x, t)$$

即

$$w(x, t) \leq \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

同理可证:

$$w(x, t) \geq -\frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) - \eta$$

因此:

$$|w(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

在点 (x_0, t_0) 处:

$$|w(x_0, t_0)| \leq \frac{4B^2 a^2}{L^2} t_0 + \eta$$

令 $L \rightarrow \infty$, 则 $|w(x_0, t_0)| \leq \eta$. 由 (x_0, t_0) 的任意性, $|u_1 - u_2| \leq \eta$.

□

 接下来我们考虑热传导方程初边值问题的求解.

问题 6.2.4 (热传导方程初边值问题的求解).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (6.10)$$



法一 (叠加原理 + Duhamel 原理) .

Step1 : 化为零边值条件问题

构造 $v(x, t)$ 使得

$$\begin{cases} v(0, t) = \mu_1(t) \\ v(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

我们取 $v(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, 令 $\bar{u} = u - v$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = f(x, t) - \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) := \bar{f}(x, t) \\ \bar{u}(0, t) = \bar{u}(l, t) = 0 \\ \bar{u}(x, 0) = \varphi(x) - v(x, 0) := \bar{\varphi}(x) \end{cases}$$

即得到零边值条件问题.

Step2 : 只考虑零边值条件问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (P0)$$

我们考虑叠加原理:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (\text{P1})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{P2})$$

Step3 : 求解齐次方程非零初值问题(P1)

设解具有变量分离形式 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入齐次方程可得:

$$X(x)T'(t) - a^2 T(t) \cdot X''(x) = 0$$

分离变量得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\mu$$

由边界条件:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{对} \quad \forall t, \quad u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \quad \text{对} \quad \forall t$$

得到特征值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

(a) 当 $\mu < 0$ 时, 特征方程为 $\lambda^2 + \mu = 0$, 即 $\lambda = \pm\sqrt{-\mu}$, 通解为:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}x}$$

代入边界条件:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\mu}L} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}L} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

则 $X(x) \equiv 0$, 此时 $u(x, t) = 0$, 不符合初值条件, 舍去。

(b) 当 $\mu = 0$ 时, $X(x) = C_1 x + C_2$, 代入边界条件:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

仍然只有零解, 不符合要求。

(c) 当 $\mu > 0$ 时, 通解为:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\mu}x + C_2 \sin \sqrt{\mu}x$$

代入边界条件:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(L) = C_2 \sin \sqrt{\mu}L = 0 \end{cases}$$

当 $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ 时, C_2 可以不为 0。

得到特征函数:

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{L}x$$

 注. 其中 $\{\mu_k\}$ 的特征值, $\{\sin \frac{k\pi}{L}x\}$ 为特征函数系。

 注. 这实际上是确定 μ 的值使得上述线性 ODE 有非平凡解 (特征值问题)。

而这样的求常数 μ 使得常微分方程初值问题有非零解, 称为 **Sturm-Liouville 问题**

定理 6.2.2 (Sturm-Liouville 问题的正交性). S - L 问题的特征函数系 $\{X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{L}x\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2[0, L]$ 中的完全正交系。

上述定理的证明. 我们只证明正交性: 对任意 $k \neq m$, 有

$$\int_0^L X_k(x) \cdot X_m(x) dx = 0$$

这是由于特征函数满足:

$$\begin{cases} X_k''(x) + \mu_k X_k(x) = 0 \\ X_k(0) = X_k(L) = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} X_m''(x) + \mu_m X_m(x) = 0 \\ X_m(0) = X_m(L) = 0 \end{cases}$$

将第一个方程乘以 $X_m(x)$, 第二个方程乘以 $X_k(x)$, 然后相减得:

$$X_k''(x) \cdot X_m(x) - X_m''(x) \cdot X_k(x) = (\mu_m - \mu_k) X_k(x) X_m(x)$$

两边在 $[0, L]$ 上积分:

$$\int_0^L [X_k''(x) X_m(x) - X_m''(x) X_k(x)] dx = (\mu_m - \mu_k) \int_0^L X_m(x) X_k(x) dx$$

左边利用分部积分:

$$\begin{aligned} \int_0^L X_k''(x) X_m(x) dx &= X_k'(x) X_m(x) \Big|_0^L - \int_0^L X_k'(x) X_m'(x) dx \\ \int_0^L X_m''(x) X_k(x) dx &= X_m'(x) X_k(x) \Big|_0^L - \int_0^L X_m'(x) X_k'(x) dx \end{aligned}$$

相减得:

$$[X_k'(x) X_m(x) - X_m'(x) X_k(x)] \Big|_0^L - \int_0^L [X_k'(x) X_m'(x) - X_m'(x) X_k'(x)] dx = 0$$

由边界条件 $X_k(0) = X_k(L) = 0$, $X_m(0) = X_m(L) = 0$, 可知:

$$[X_k'(x) X_m(x) - X_m'(x) X_k(x)] \Big|_0^L = 0$$


因此:


$$(\mu_m - \mu_k) \int_0^L X_m(x) X_k(x) dx = 0$$

由于 $\mu_m \neq \mu_k$, 故:

$$\int_0^L X_m(x) X_k(x) dx = 0$$

故正交性得证。

 注. 关于 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2[0, L]$ 中的完全正交系 (即正交且张成整个空间), *uvr* 没证明。

 注. 实际上, 由于 $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{L}x$ 为三角函数系显然是正交的. 上述证明提供了证明一般性结果的方法。

□

承接我们对于 () 的求解: 我们此时得到了特征值 $\mu_k = -\frac{T'_k(t)}{a^2 T_k(t)} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ 。

针对时间部分 $T(t)$, 有:

$$T'_k(t) + a^2 \mu_k T_k(t) = 0$$

解得:


$$T_k(t) = B_k \exp\left(-a^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

于是得到基本解:

$$u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = A_k \cdot \exp\left(-a^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

则原问题的形式解为:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \exp\left(-a^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

 注. 使用级数形式求解是基于以下事实: $\{\sin \frac{k\pi}{L}x\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2[0, L]$ 的完全正交系且满足零边值条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 。

每个 $u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, 其中:

♡ $X_k(x)$ 满足:

$$\begin{cases} X_k''(x) + \mu_k X_k(x) = 0 \\ X_k(0) = X_k(L) = 0 \end{cases}$$

♡ $T_k(t)$ 满足:

$$T'_k(t) + a^2 \mu_k T_k(t) = 0$$

因此每个 $u_k(x, t)$ 也满足:

$$\begin{cases} \partial_t u_k - a^2 \partial_{xx} u_k = 0 \\ u_k(0, t) = u_k(L, t) = 0 \end{cases}$$

由于这是零边值的线性齐次方程，线性组合

$$u(x, t) = \sum_k A_k u_k(x, t)$$

仍然满足该方程。

接下来我们以下需要确定 $u(x, t)$ 中的系数 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 。形式解为：

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp\left(-a^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

由初值条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ，代入得：

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

这实际上是 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, L]$ 上的正弦级数展开。由于 $\{\sin(\frac{k\pi}{L} x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2[0, L]$ 中的完全正交系，且：

$$\int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{km}$$

因此系数 A_k 可由正交性确定：

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx$$

这样就完全确定了热传导方程初边值问题的形式解。

最后，我们验证 $u(x, t)$ 是原初边值问题的解。

设 $\varphi(x)$ 在 $[0, L]$ 上连续有界，对任意 $\delta > 0$ ，当 $t \geq \delta$ 时，对任意 $p > 0$ ，考虑：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|^p \exp\left(-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right)$$

由于指数衰减因子 $\exp\left(-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t\right)$ 在 $t \geq \delta$ 时对 k 是指数衰减的，该级数一致收敛。

将解写为：

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) e^{-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t}$$

其中 $u_k(x)$ 有界连续，即存在常数 $K > 0$ 使得 $|u_k(x)| \leq K$ ，则：

$$|u(x, t)| \leq K \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} t}$$

由优势判别法，该级数对 x 一致收敛，因此 $u(x, t)$ 有意义且具有良好的收敛性。

Step4 : 求解非齐次方程零初值问题(P2)

定理 6.2.3 (Duhamel 原理 (齐次化原理)). 若 $w(t, x; \tau)$ 为初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, t > \tau \\ w(t, x; \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \\ w(t, 0; \tau) = w(t, l; \tau) = 0 \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x, t) = \int_0^t w(t, x, -\tau) d\tau$$

为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{P2})$$

的解.

根据(P1)的解, 我们写出:

$$w(t, x; \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (t-\tau)} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

故

$$u_2(x, t) = \int_0^t w(t, x, -\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (t-\tau)} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) d\tau$$

Step5 : 故我们的最终解为

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + v(x, t)$$

□

法二 (常数变易法) .

Step 1 : 把问题转化为零边值条件问题

$$\text{取 } v(x, t) = g_0(t) + \frac{x}{l}(g_l(t) - g_0(t))$$

令 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, 则 w 满足方程 (Pw)

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x, t) \triangleq f_w(x, t) \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \\ w|_{t=0} = \varphi(x) - v(x, 0) \triangleq \varphi_w(x) \end{cases} \quad (\text{Pw})$$

Step 2 : 先求解齐次问题

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, t > 0 \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \\ w|_{t=0} = \varphi_w(x) \end{cases}$$

Fourier 方法 \Rightarrow S-L 问题

$$\begin{cases} x_k''(x) + \mu_k x_k(x) = 0 \\ x(0) = x(l) = 0 \end{cases}$$

其特征值是 $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, \dots$

可知其特征函数 $\{x_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\}_{k=1}^{\infty}$ 且为 $L^2[0, l]$ 的完全正交系。

Step 3 : 使用常数变易法求解

利用 法一 的 **Step 2** 中求得的完全正交系 $L^2[0, l]$,

$$\Rightarrow w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

其中 $w_k(t)$ 是未知的

$$f_w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

$$\varphi_w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi}{l}x$$

把 $w(x, t)$, $f_w(x, t)$, $\varphi_w(x)$ 的展开式代入方程中求取 $w_k(t)$ 。故

$$\begin{cases} w_k'(t) + a^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 w_k(t) = f_k(t) \\ w_k(0) = \varphi_k \end{cases}$$

这是关于 t 的 ODE。

$$\Rightarrow w_k(t) = \left(\varphi_k + \int_0^t f_k(s) \exp\left(a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} s\right) ds \right) \cdot \exp\left(-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} t\right)$$

$$\Rightarrow w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

Step 4 : 求解方程

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t).$$

 注. 事实上, 对于常数变易法, 实际上齐次方程

$$\begin{cases} \partial_t \omega - a^2 \partial_x^2 \omega = 0 \\ \omega(0, t) = \omega(l, t) = 0 \\ \omega|_{t=0} = \varphi_\omega(x) \end{cases}$$

的解 $\omega(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp\left(-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} t\right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$

直接进行常数变易, 即 $\omega^*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \cdot \exp\left(-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} t\right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$

代入方程 (), 即

$$\begin{cases} \partial_t \omega^* - a^2 \partial_x^2 \omega^* = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A'_k(t) + a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} A_k(t) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x, t) \\ \omega^*|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x) \end{cases}$$

只需要使 $f(x, t)$ 与 $\varphi(x)$ 关于 x 的正弦级数各系数均相等, 即

$$\begin{cases} A'_k(t) + a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} A_k(t) = f_k(t) \\ A_k(0) = \varphi_k \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \\ \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi}{l} x \end{aligned}$$

由此即可求得 $\omega(x, t)$ 。

□

 按照我们上面的求解方法, 我们来求解一个类似的例子.

例 6.2.1. 求解下列初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_x^2 u = x(t-x), 0 < x \leq l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = l \\ u(x, 0) = \sin(\pi x/l) \end{cases}$$

解. 化为齐次边值问题, 取 $v(x, t)$ 满足以下条件:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = l$$

故 $v(x, t) = x$ 。

令 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t) = u(x, t) - x$, 则 w 满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = x(t-x) \\ \begin{cases} w(0, t) = 0, & w(l, t) = 0 \\ w(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - x \end{cases} \end{cases}$$

其中注意到:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = 0$$

先求解齐次线性方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0 \end{cases}$$

记其解为 $w_h(x, t)$, 且满足:

$$w(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - x$$

使用分离变量法, 取 $w(x, t) = X(x)T(t)$, 计算齐次边值问题可得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\mu$$

其中 $X(x)$ 满足以下 Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

这来源于边界条件:

$$\begin{cases} \forall t > 0, \quad X(0) \cdot T(t) = 0 \\ \forall t > 0, \quad X'(l) \cdot T(t) = 0 \end{cases}$$

现在分情况讨论特征值问题:

♡ 当 $\mu < 0$,

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}x}$$

根据边值条件:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \sqrt{-\mu} e^{\sqrt{-\mu}l} - C_2 \sqrt{-\mu} e^{-\sqrt{-\mu}l} = 0 \end{cases}$$

可知 $C_1 = C_2 = 0$, 无非零解。

♡ 当 $\mu = 0$ 时,

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

由边值条件可知: $C_1 = C_2 = 0$, 舍去。

♡ 当 $\mu > 0$ 时,

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}x)$$

由边值条件:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X'(l) = \sqrt{\mu} \cdot C_2 \cos(\sqrt{\mu}l) = 0 \end{cases}$$

要使 $C_2 \neq 0$, 则需:

$$\cos(\sqrt{\mu}l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mu}l = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$


即:

$$\mu_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

对应的特征函数为:

$$X_k(x) = C_k \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)$$

这是 $L^2[0, l]$ 的完全正交系。

 注. 接下来, 我们仿照上面求解的两种方法: 叠加原理 + Duhamel 原理、常数变易法 两种方法来解决这个问题.

法一 (叠加原理 + Duhamel 原理).

由 $T(t)$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned} T_k'(t) + a^2 \mu_k T_k(t) &= 0 \\ \Rightarrow T_k(t) &= B_k \exp\left(-a^2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 t\right) \end{aligned}$$

令

$$\omega_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = A_k \exp\left(-a^2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

则齐次方程的解为:

$$\omega_h(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp\left(-a^2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

其中系数由初始条件确定:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - x\right] \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right) dx$$

使用 Duhamel 齐次化原理求解非齐次方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = x(L-x) \\ \omega(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x}(L, t) = 0 \\ \omega(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - x \end{cases}$$

设非齐次方程的解为:

$$\omega(x, t) = \omega_h(x, t) + \omega_p(x, t)$$

其中 $\omega_h(x, t)$ 为齐次解, $\omega_p(x, t)$ 为特解。

最终原问题的解为:

$$u(x, t) = \omega(x, t) + x$$

□

法二 (常数变易法).

我们用特征函数系 $\left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ 将 $w(x, t)$, $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - x$, $x(L-x)$ 展开。

设非齐次项展开为:

$$x(L-x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

其中系数为:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right) dx$$

初始条件展开为:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

其中系数为:

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - x \right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right) dx$$

设解的形式为:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

代入方程得到关于 $w_k(t)$ 的常微分方程组:

$$\begin{cases} w_k'(t) + a^2 \cdot \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 w_k(t) = a_k \\ w_k(0) = b_k \end{cases}$$

解得:

$$w_k(t) = \left[b_k + \int_0^t a_k \exp\left(a^2 \cdot \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 s\right) ds \right] \exp\left(-a^2 \cdot \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 t\right)$$

因此解为:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

最终原问题的解为:

$$u(x, t) = w(x, t) + x$$

□

□

7. 波动方程



👩‍🎓 我们一般把下式称为波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (7.1)$$

👩‍🎓 下面我们先来求解波动方程 (7.1) 的基本解：

解. 设波动方程的基本解为 $E(x, t)$ ，则有

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x, t)$$

对两边同时进行 Fourier 变换 (对 x 进行)：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \cdot \hat{E}(\xi, t) = \delta(t)$$

先看齐次方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \cdot \hat{E}(\xi, t) = 0$$

其基本解组为：

$$\hat{E}_1(\xi, t) = \sin(a|\xi|t), \quad \hat{E}_2(\xi, t) = \cos(a|\xi|t)$$

对非齐次方程, 设 $\hat{E}(\xi, t) = k_1(t)\hat{E}_1(\xi, t) + k_2(t)\hat{E}_2(\xi, t)$, 代入可得:

$$\begin{cases} k_1'(t) \sin(a|\xi|t) + k_2'(t) \cos(a|\xi|t) = 0 \\ k_1'(t)a|\xi| \cos(a|\xi|t) - k_2'(t)a|\xi| \sin(a|\xi|t) = \delta(t) \end{cases}$$

将第一式乘以 $a|\xi| \cos(a|\xi|t)$, 第二式乘以 $\sin(a|\xi|t)$, 然后相减:

$$k_2'(t)a|\xi|(\cos^2(a|\xi|t) + \sin^2(a|\xi|t)) = 0$$

即 $k_2'(t)a|\xi| = 0$, 所以 $k_2'(t) = 0$ 。

取 $k_2(t) = 0$, 代入原方程组:

$$\begin{cases} k_1'(t) \sin(a|\xi|t) = 0 \\ k_1'(t)a|\xi| \cos(a|\xi|t) = \delta(t) \end{cases}$$

由第二式得:

$$k_1'(t) = \frac{\delta(t)}{a|\xi| \cos(a|\xi|t)} = \frac{\delta(t)}{a|\xi|}$$

故:

$$k_1(t) = \begin{cases} \frac{H(t)}{a|\xi|}, & t > 0 \\ \frac{-H(-t)}{a|\xi|}, & t < 0 \end{cases}$$

最终可得:

$$\hat{E}(\xi, t) = \begin{cases} \hat{E}_+(\xi, t) = \frac{H(t) \cdot \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t > 0 \\ \hat{E}_-(\xi, t) = \frac{-H(-t) \cdot \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t < 0 \end{cases}$$

 注. 下面我们简单来说一下为什么求解热传导算子不考虑 $t < 0$ 情况:

$$E(x, t) = H(t)(4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right), \quad t > 0.$$

当 $t < 0$ 时, 基本解 $E(x, t)$ 无法与 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 进行有效的 Fourier 变换 (换言之, $E(x, t) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)。这一数学特性反映了热传导过程的内在物理规律——热传导方程描述的是一个不可逆的耗散过程, 其解在时间上具有单向性, 无法追溯 $t = 0$ 之前的热状态。

 我们得到了 $E(x, t)$ 的 Fourier 变换后的结果 $\hat{E}(x, t)$, 那我们要求 $E(x, t)$ 只需通过 Fourier 逆变换将 $\hat{E}(x, t)$ 变回去即可。

下面我们用两种方法来证明:

法一: 书上方法。

设曲面 $S = \{x \mid p(x) = 0, dp(x) \neq 0, p \in C^\infty\}$, 定义广义函数 $\delta(p(x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\langle \delta(p(x)), \varphi(x) \rangle = \int_{p(x)=0} \varphi(x) ds$$

由此可得 $\text{sing supp } \delta(p(x)) = \text{supp } \delta(p(x)) = \{x \mid p(x) = 0\}$ 。

 注. 若 $\{p(x) = 0\}$ 是紧集, 则 $\delta(p(x)) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'$, 于是

$$\widehat{\delta(p(x))} = \langle \delta(p(x)), e^{-i\xi \cdot x} \rangle = \int_{\{p(x)=0\}} e^{-i\xi \cdot x} ds$$

我们以 $n = 3$ 为例, 设 $p(x) = r - |x|$, $r > 0$, 则 $S = \{x \mid p(x) = 0\} = \{x \mid |x| = r\}$ 是以原点为圆心、 r 为半径的球面。利用球坐标变换, 设 x_3 轴沿 ξ 方向, 则 $x \cdot \xi = |x| \cdot |\xi| \cdot \cos \theta$, $dS_x = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ 。

对 $\delta(r - |x|)$ 作 Fourier 变换:

$$\begin{aligned} \int_{|x|=r} e^{-ix \cdot \xi} dS_x &= \int_{|x|=r} e^{-ir|\xi| \cos \theta} dS_x \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ir|\xi| \cos \theta} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi e^{-ir|\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

令 $y = \cos \theta$, 则

$$= 2\pi r^2 \int_{-1}^1 e^{-ir|\xi|y} dy = 2\pi r^2 \cdot \frac{e^{-ir|\xi|} - e^{ir|\xi|}}{-ir|\xi|} = 4\pi r \cdot \frac{\sin(r|\xi|)}{|\xi|}$$

故有 $\delta(at - |x|) = 4\pi r \cdot \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \right)$ 。

$$\text{观察 } \hat{E}(\xi, t) = \begin{cases} \frac{H(t) \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t > 0 \\ -\frac{H(-t) \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t < 0 \end{cases}$$

令上述式中 $r = at$, 故 $\delta(at - |x|) = 4\pi at \cdot \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \right)$ 。

因此当 $t > 0$ 时:

$$E(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{E}(\xi, t))(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi at} \delta(at - |x|)$$

而当 $t < 0$ 时, 令 $r = -at$, 则有:

$$E(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{E}(\xi, t))(x, t) = \frac{-H(-t)}{4\pi at} \delta(-at - |x|)$$

根据定义 $\delta(p(x))$ 只与 $p(x) = 0$ 有关, 故

$$\delta(at - |x|) = \delta(at + |x|) = \frac{-H(-t)}{4\pi a^2 t} \delta(at + |x|) \triangleq E_-(x, t)$$

 注.

$$\text{sing supp } E_+(x, t) = \text{supp } E_+(x, t) = \{x \mid |x| = at\}$$

$$\text{sing supp } E_-(x, t) = \text{supp } E_-(x, t) = \{x \mid |x| = -at\}$$

可知 (x, t) 构成的是锥面。

□

法二: 一种更具普适性的方法.

$$\hat{E}(\xi, t) = \begin{cases} \hat{E}_+(\xi, t) = \frac{H(t) \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t > 0 \\ \hat{E}_-(\xi, t) = -\frac{H(-t) \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t < 0 \end{cases}$$

1. 当 $t > 0$ 时, 我们直接对 $\hat{E}_+(\xi, t)$ 进行 Fourier 逆变换:

$$E_+(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \hat{E}_+(\xi, t) \frac{d\xi}{(2\pi)^3} = \frac{H(t)}{a} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(a|\xi|t)}{|\xi|} \frac{d\xi}{(2\pi)^3}$$

采用球坐标变换, 令 $\rho = |\xi|$, 并取 x 方向为极轴. 在球坐标系中, 体积元为 $d\xi = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} E_+(x, t) &= \frac{H(t)}{a(2\pi)^3} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta e^{i\rho|x|\cos\theta} \sin(a\rho t) \rho^2 \sin\theta \\ &= \frac{H(t)}{a(2\pi)^3} \int_0^\infty \rho \sin(a\rho t) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{i\rho|x|\cos\theta} \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

先计算方位角积分: $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

再计算极角积分, 令 $y = \cos\theta$, 则 $dy = -\sin\theta d\theta$, 积分限变为 $y: 1 \rightarrow -1$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{i\rho|x|\cos\theta} \sin\theta d\theta &= \int_1^{-1} e^{i\rho|x|y} (-dy) = \int_{-1}^1 e^{i\rho|x|y} dy \\ &= \left[\frac{e^{i\rho|x|y}}{i\rho|x|} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{i\rho|x|} - e^{-i\rho|x|}}{i\rho|x|} = \frac{2\sin(\rho|x|)}{\rho|x|} \end{aligned}$$

代入原式:

$$\begin{aligned} E_+(x, t) &= \frac{H(t)}{a(2\pi)^3} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\infty \rho \sin(a\rho t) \cdot \frac{2\sin(\rho|x|)}{\rho|x|} d\rho \\ &= \frac{H(t)}{4\pi^2 a|x|} \int_0^\infty 2\sin(a\rho t) \sin(\rho|x|) d\rho \end{aligned}$$

利用三角恒等式进行积化和差:

$$2\sin(a\rho t) \sin(\rho|x|) = \cos[\rho(at - |x|)] - \cos[\rho(at + |x|)]$$

于是:

$$E_+(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi^2 a|x|} \int_0^\infty [\cos(\rho(at - |x|)) - \cos(\rho(at + |x|))] d\rho$$

考虑广义积分极限. 对于任意测试函数 $\phi(\alpha)$, 有:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos(\alpha\rho) d\rho = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin(A\alpha)}{\alpha}$$

在广义函数意义下, 该极限收敛于 $\pi\delta(\alpha)$, 即:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin(A\alpha)}{\alpha} = \pi\delta(\alpha)$$

应用此结果:

$$\begin{aligned} E_+(x, t) &= \frac{H(t)}{4\pi^2 a|x|} [\pi\delta(at - |x|) - \pi\delta(at + |x|)] \\ &= \frac{H(t)}{4\pi a|x|} [\delta(at - |x|) - \delta(at + |x|)] \end{aligned}$$

由于 $t > 0$ 且 $|x| \geq 0$, $at + |x| > 0$, 因此 $\delta(at + |x|) = 0$. 再利用 δ 函数的缩放性质:

$$\delta(at - |x|) = \frac{1}{a} \delta\left(t - \frac{|x|}{a}\right) = \frac{1}{a^2 t} \delta(at - |x|)$$

其中最后一个等号利用了 $\delta(f(t)) = \delta(t - t_0)/|f'(t_0)|$, 这里 $f(t) = at - |x|$, $f'(t) = a$ 。

最终得到:

$$E_+(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t} \delta(at - |x|)$$

2. 当 $t < 0$ 时:

$$E_-(x, t) = -\frac{H(-t)}{a} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(a|\xi|t)}{|\xi|} \frac{d\xi}{(2\pi)^3}$$

注意到 $t < 0$ 时, $\sin(a|\xi|t) = -\sin(a|\xi||t|)$, 因此:

$$E_-(x, t) = \frac{H(-t)}{a} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(a|\xi||t|)}{|\xi|} \frac{d\xi}{(2\pi)^3}$$

采用与 $t > 0$ 情形完全相同的球坐标变换和积分计算:

$$\begin{aligned} E_-(x, t) &= \frac{H(-t)}{4\pi^2 a |x|} \int_0^\infty \sin(a\rho|t|) \sin(\rho|x|) d\rho \\ &= \frac{H(-t)}{8\pi^2 a |x|} \int_0^\infty [\cos(\rho(a|t| - |x|)) - \cos(\rho(a|t| + |x|))] d\rho \\ &= \frac{H(-t)}{8\pi a |x|} [\delta(a|t| - |x|) - \delta(a|t| + |x|)] \end{aligned}$$

由于 $a|t| = -at > 0$ 且 $|x| \geq 0$, $\delta(a|t| + |x|) = 0$ 。再利用 δ 函数的性质:

$$\delta(a|t| - |x|) = \delta(-at - |x|) = \frac{1}{a^2|t|} \delta(-at - |x|) = -\frac{1}{a^2 t} \delta(at + |x|)$$

代入得:

$$E_-(x, t) = -\frac{H(-t)}{4\pi a^2 t} \delta(at + |x|)$$

综上, 我们可得波动方程的基本解为:

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{H(t)\delta(at - |x|)}{4\pi a^2 t}, & t > 0 \\ -\frac{H(-t)\delta(at + |x|)}{4\pi a^2 t}, & t < 0 \end{cases}$$

□

 注. 其中, 基本解的奇性支集与支集均为光锥面:

$$\text{sing supp } E_+(x, t) = \text{supp } E_+(x, t) = \{(x, t) \mid |x| = at\}$$

$$\text{sing supp } E_-(x, t) = \text{supp } E_-(x, t) = \{(x, t) \mid |x| = -at\}$$

这表明波动在空间中以速度 a 向外传播 ($t > 0$) 或向内收敛 ($t < 0$), 且扰动仅存在于光锥面上, 符合波动方程的特征。

□

 下面我们来解决一维弦振动方程的 Cauchy 问题:

问题 7.0.1 (一维弦振动方程的 Cauchy 问题).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$



解. 由叠加原理, 方程可以转化为以下两个方程解之和.

$$(P1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \end{cases} \quad (P2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

1. 先求解齐次波动方程 (P1)

$$(P1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

为了求解这个齐次波动方程, 我们引入特征坐标变换. 令 $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, 这个变换将方程化为更简单的形式.

计算一阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

计算二阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

代入波动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ &\quad - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = -4a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

因此得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

这意味着 $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ 与 ξ 无关, 即 $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \alpha(\eta)$, 其中 $\alpha(\eta)$ 是只依赖于 η 的函数.

对 η 积分得:

$$u = \int \alpha(\eta) d\eta + F(\xi) = G(\eta) + F(\xi)$$

其中 $F(\xi)$ 是积分常数 (关于 ξ 的函数). 因此通解为:

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x - at) + G(x + at)$$

现在利用初始条件确定函数 F 和 G 。

代入初始条件 $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$, 可得:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ -aF'(x) + aG'(x) = g(x) \end{cases}$$

对第二式从 x_0 到 x 积分得:

$$-a[F(x) - F(x_0)] + a[G(x) - G(x_0)] = \int_{x_0}^x g(y)dy$$

令 $C = -aF(x_0) + aG(x_0)$, 则:

$$-aF(x) + aG(x) = C + \int_{x_0}^x g(y)dy$$

联立方程组:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ -aF(x) + aG(x) = C + \int_{x_0}^x g(y)dy \end{cases}$$


解得:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(y)dy + \frac{C}{2a} \\ G(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(y)dy - \frac{C}{2a} \end{aligned}$$

代入通解 $u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$, 得到:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} g(y)dy + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} g(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y)dy \end{aligned}$$

这里我们利用了积分的性质: $\int_{x_0}^{x+at} g(y)dy - \int_{x_0}^{x-at} g(y)dy = \int_{x-at}^{x+at} g(y)dy$, 并且常数 C 在相减过程中消去了。

 注. 下面我们来详细解释 $F(x - at)$ 与 $G(x + at)$ 的物理意义:

考虑函数 $F(x - at)$ 。假设在初始时刻 $t = 0$, 在位置 x_0 有一个扰动, 即 $F(x_0)$ 。在时刻 t , 这个扰动传播到了位置 x , 满足 $x - at = x_0$, 即 $x = x_0 + at$ 。

扰动的传播速度为:

$$\frac{x - x_0}{t - 0} = a > 0$$

由于速度 $a > 0$, 这个波向右传播, 称为**正波**或**右行波**。

类似地, 考虑函数 $G(x + at)$ 。假设在初始时刻 $t = 0$, 在位置 x_0 有一个扰动 $G(x_0)$ 。在时刻 t , 这个扰动传播到了位置 x , 满足 $x + at = x_0$, 即 $x = x_0 - at$ 。

扰动的传播速度为:


$$\frac{x - x_0}{t - 0} = -a < 0$$

由于速度 $-a < 0$, 这个波向左传播, 称为**反波**或**左行波**。

因此, 在无外力的情况下, 弦的振动可以分解为向右传播的正波和向左传播的反波的叠加, 这就是达朗贝尔公式的物理意义。

2. 下面我们来求解 (P2):

$$(P2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

 注. 齐次化原理的基本思想是: 将非齐次项 $f(x, t)$ 看作在时间 τ 时刻瞬间作用的一个源, 然后对这些瞬间作用的源产生的响应进行时间积分。

定义辅助函数 $U(x, t, \tau)$ 为如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, t > \tau \\ U(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

 注. 这个辅助问题描述的是: 在时刻 τ 给系统一个瞬时冲击 $f(x, \tau)$, 然后系统在 $t > \tau$ 时自由演化。

根据齐次化原理 theorem 6.2.3, 原问题 (P2) 的解为:

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau$$

对于辅助问题, 我们可以直接使用达朗贝尔公式。注意初始时刻是 τ 而不是 0, 初始位移为 0, 初始速度为 $f(x, \tau)$ 。

由达朗贝尔公式得:

$$U(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy$$

因此原问题 (P2) 的解为:


$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

这个积分表示对所有时刻 $\tau \in [0, t]$ 的瞬时冲击响应的叠加。

最后, 根据叠加原理, 原问题的完整解为 (P1) 和 (P2) 的解之和:

综上所述, 弦振动方程 Cauchy 问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy$$

 注. 这就是著名的达朗贝尔公式, 它给出了弦振动方程柯西问题的显式解。第一项表示初始位移产生的左右行波的叠加, 第二项表示初始速度产生的影响, 第三项表示外力项产生的影响。

□

 下面我们来解决一维弦振动方程的初边值问题:

问题 7.0.2 (一维弦振动方程的初边值问题).

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$



解. 我们使用叠加原理拆分成齐次方程非零初值问题和零初值非齐次方程问题

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

1. 我们首先求解 (P1):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

使用 Fourier 方法 (分离变量法), 令 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 。

代入方程得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\mu$$

这里 μ 是分离常数。由于等式左边只依赖于 x , 右边只依赖于 t , 所以两边必须等于同一个常数。接着我们利用边界条件 $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$, $u(l, t) = X(l)T(t) = 0$, 且 $T(t) \neq 0$, 得 $X(0) = X(l) = 0$ 。

因此 $X(x)$ 满足如下 Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

这是一个标准的特征值问题。通过求解得到:

特征值为 $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \dots$, 特征函数为 $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x$ 。

这些特征函数构成完全正交系 $\{\sin \frac{k\pi}{l}x\}$, 满足正交性关系:

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi}{l}x \cdot \sin \frac{m\pi}{l}x dx = \frac{l}{2} \delta_{km}$$

将特征值 μ_k 代入时间部分的方程:

$$T_k''(t) + a^2 \mu_k T_k(t) = 0$$

这是一个简谐振动方程, 解得:

$$T_k(t) = \bar{A}_k \sin \frac{ak\pi}{l}t + \bar{B}_k \cos \frac{ak\pi}{l}t$$

因此第 k 个模态的解为:

$$u_k(x, t) = T_k(t) \cdot X_k(x) = \left(\bar{A}_k \sin \frac{ak\pi}{l}t + \bar{B}_k \cos \frac{ak\pi}{l}t \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

由线性叠加原理, 通解为所有模态的叠加:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l}t \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

其中 $A_k = \bar{B}_k$, $B_k = \bar{A}_k$ 为待定系数。

现在利用初始条件确定系数 A_k 和 B_k :

$$\begin{cases} u(x, t)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{ak\pi}{l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi}{l}x = g(x) \end{cases}$$

利用特征函数的正交性, 将初始函数按特征函数系展开:

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x dx$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi}{l}x dx$$

2. 下面我们求解 (P2):

$$(P2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & 0 < x < l \\ u|_{t=0} = 0, & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

应用齐次化原理 (Duhamel 原理), 边值问题不影响转化。

齐次化原理的基本思想是: 将非齐次项 $f(x, t)$ 看作在时间 τ 时刻瞬间作用的源, 然后对这些瞬时作用的源产生的响应进行时间积分。

定义辅助函数 $w(x, t, \tau)$ 为如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & t > \tau \\ w|_{t=\tau} = 0, & \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=\tau} = f(x, \tau) \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \end{cases}$$

根据齐次化原理 theorem 6.2.3, 原问题 (P2) 的解为:

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$$

对于辅助问题, 我们可以使用分离变量法求解。设:

$$w(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t, \tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

代入辅助问题的方程和初始条件, 得到:

$$w(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \sin \frac{ak\pi}{l} (t - \tau)$$

其中系数 $B_k(\tau)$ 由初始速度条件确定:


$$B_k(\tau) = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l f(x, \tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

因此原问题 (P2) 的解为:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \cdot \sin \frac{ak\pi}{l} (t - \tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x d\tau$$

最后, 根据叠加原理, 原初边值问题的完整解为 (P1) 和 (P2) 的解之和:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \cdot \sin \frac{ak\pi}{l} (t - \tau) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x d\tau$$

 **注.** 这个解具有清晰的物理意义: 第一项是初始条件引起的自由振动, 第二项是外力引起的受迫振动。每个模态都以特征频率 $\frac{ak\pi}{l}$ 振动, 体现了弦振动的驻波特性。

□

问题 7.0.3 (一端固定的半无界自由振动问题).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, 0 < x < \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$



解. 设 $x < 0$ 时仍有弦, 只是在振动过程中保持 $x = 0$ 处固定。我们用 $\Phi(x)$ 、 $G(x)$ 分别表示 $\varphi(x)$ 、 $g(x)$ 延拓后的函数。

则达朗贝尔公式给出:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\Phi(x - \alpha t) + \Phi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} G(y) dy$$

将 $u(x, t)$ 代入边界条件 $u(0, t) = 0$ 得:

$$\frac{1}{2} (\Phi(-\alpha t) + \Phi(\alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha t}^{\alpha t} G(y) dy = 0$$

为使上述恒成立, 令 $\Phi(x)$ 、 $G(x)$ 为 $\varphi(x)$ 、 $g(x)$ 的奇延拓函数:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

此时代入 $u(x, t)$ 中, 需分情况讨论:

1. 情况 : $x - \alpha t \geq 0$

此时 $x + \alpha t \geq 0$, 有:

$$\Phi(x - \alpha t) = \varphi(x - \alpha t), \quad \Phi(x + \alpha t) = \varphi(x + \alpha t), \quad G(y) = g(y)$$

代入得:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - \alpha t) + \varphi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(y) dy$$

2. 情况 : $x - \alpha t < 0$ 且 $x + \alpha t \geq 0$

此时:

$$\Phi(x - \alpha t) = -\varphi(\alpha t - x), \quad \Phi(x + \alpha t) = \varphi(x + \alpha t), \quad G(y) = \begin{cases} g(y), & y \geq 0 \\ -g(-y), & y < 0 \end{cases}$$

代入得:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (-\varphi(\alpha t - x) + \varphi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} G(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (-\varphi(\alpha t - x) + \varphi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \left[\int_{x-\alpha t}^0 G(y) dy + \int_0^{x+\alpha t} G(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2} (-\varphi(\alpha t - x) + \varphi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \left[\int_{x-\alpha t}^0 -g(-y) dy + \int_0^{x+\alpha t} g(y) dy \right] \end{aligned}$$

对第一个积分作变量代换 $z = -y$, 则当 $y = x - \alpha t$ 时 $z = \alpha t - x$, 当 $y = 0$ 时 $z = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{x-\alpha t}^0 -g(-y) dy &= \int_{\alpha t-x}^0 -g(z)(-dz) \\ &= \int_{\alpha t-x}^0 g(z) dz = - \int_0^{\alpha t-x} g(z) dz \end{aligned}$$

代入得:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (-\varphi(\alpha t - x) + \varphi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \left[- \int_0^{\alpha t-x} g(z) dz + \int_0^{x+\alpha t} g(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(x + \alpha t) - \varphi(\alpha t - x)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{\alpha t-x}^{x+\alpha t} g(y) dy \end{aligned}$$

综上, 一端固定的半无界自由振动的解为:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\varphi(x - \alpha t) + \varphi(x + \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(y) dy, & x \geq \alpha t \\ \frac{1}{2} (\varphi(x + \alpha t) - \varphi(\alpha t - x)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{\alpha t-x}^{x+\alpha t} g(y) dy, & 0 \leq x < \alpha t \end{cases}$$

□

命题 7.0.1. 弦振动方程的 *Cauchy* 问题的达朗贝尔解与弦振动方程的初边值问题 *Fourier* 方法之间的关系: 在适当的延拓意义下, 两者是等价的。



证明. 考虑有限区间 $[0, l]$ 上具有固定端点条件的弦振动方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Fourier 方法求解:

将初值函数进行正弦级数展开:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

其中 Fourier 系数为:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

由分离变量法可得解为:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \left(\frac{k\pi a}{l} t \right) + \frac{b_k l}{k\pi a} \sin \left(\frac{k\pi a}{l} t \right) \right] \sin \frac{k\pi x}{l}$$

达朗贝尔方法求解:

达朗贝尔公式给出:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy$$

为满足边界条件 $u(0, t) = u(l, t) = 0$, 需将 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 进行奇延拓和周期延拓. 具体地, 将 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 延拓为以 $2l$ 为周期的奇函数:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ -\varphi(-x), & -l \leq x < 0 \\ \Phi(x+2l) = \Phi(x) \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & 0 \leq x \leq l \\ -g(-x), & -l \leq x < 0 \\ G(x+2l) = G(x) \end{cases}$$

将延拓后的函数代入达朗贝尔公式:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(y) dy$$

等价性证明:

将延拓后的函数用 Fourier 级数表示. 由于 $\Phi(x)$ 和 $G(x)$ 是奇函数且周期为 $2l$, 它们的 Fourier 级数只含正弦项:

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

代入达朗贝尔公式:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi(x+at)}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi(x-at)}{l} \right] \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi y}{l} dy \end{aligned}$$

利用三角恒等式 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, 第一项化为:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\sin \frac{k\pi(x+at)}{l} + \sin \frac{k\pi(x-at)}{l} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi a}{l} t$$

第二项计算积分:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi y}{l} dy &= \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{x-at}^{x+at} \sin \frac{k\pi y}{l} dy \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left[-\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi y}{l} \right]_{y=x-at}^{y=x+at} \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{l}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi(x-at)}{l} - \cos \frac{k\pi(x+at)}{l} \right] \end{aligned}$$

再利用三角恒等式 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$\begin{aligned} \cos \frac{k\pi(x-at)}{l} - \cos \frac{k\pi(x+at)}{l} &= -2 \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(-\frac{k\pi a}{l} t \right) \\ &= 2 \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} t \end{aligned}$$

代入得:

$$\frac{1}{2a} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{l}{k\pi} \cdot 2 \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k l}{k\pi a} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} t$$

因此达朗贝尔解最终化为:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi a}{l} t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k l}{k\pi a} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} t$$


这与 Fourier 方法得到的解完全相同, 从而证明了两种方法的等价性. \square

 接下来我们来看高维波动方程的 Cauchy 问题:

问题 7.0.4 (三维波动方程的 Cauchy 问题).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0, \\ u|_{t=0} = g_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_1(x), \end{cases}$$

其中 $f(x, t) \in C^2, g_0(x) \in C^3, g_1(x) \in C^2$. 作这些规定是因为我们想求 C^2 解. 

 注. 我们的基本思路是: 定义 $\tilde{u}(x, t) = H(t)u(x, t)$, 其中 $u(x, t)$ 是原方程的解、 $H(t)$ 是 Heaviside 函数, 则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) \tilde{u}(x, t) = F(x, t),$$

且

$$\tilde{u}(x, t) = E(x, t) * F(x, t),$$

其中 $E(x, t)$ 是波动算子的基本解。

证明.

$$\begin{aligned}
 F(x, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) [H(t)u(x, t)] \\
 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} H(t) \right) u(x, t) + 2 \frac{\partial H(t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + H(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) \\
 &= H(t)f(x, t) + \delta'(t)u(x, t) + 2\delta(t) \frac{\partial u}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty$, 有

$$\begin{aligned}
 \langle \delta'(t)u(x, t), \varphi \rangle_t &= \langle \delta'(t), u\varphi \rangle \\
 &= - \left\langle \delta(t), \frac{\partial}{\partial t}(u\varphi) \right\rangle \\
 &= - \langle \delta(t), u_t \varphi + u\varphi_t \rangle \\
 &= (-1) \langle \delta(t), (\partial_t u)\varphi \rangle + (-1) \langle \delta(t), u(x, t)\varphi'(t) \rangle \\
 &= (-1) \left\langle \delta(t) \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle + (-1) \langle \delta(t)u(x, t), \varphi'(t) \rangle \\
 &= (-1) \left\langle \delta(t) \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u(x, t)), \varphi(t) \right\rangle \\
 &= \left\langle -\delta(t) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u(x, t)), \varphi(t) \right\rangle
 \end{aligned}$$

即广义函数意义下成立:

$$\delta'(t)u(x, t) = -\delta(t) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u(x, t))$$

因此,

$$F(x, t) = H(t)f(x, t) + \delta(t) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u(x, t)).$$

其中对任意 $\varphi \in C_0^\infty$, 有

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u), \varphi \right\rangle &= (-1) \langle \delta(t)u(x, t), \varphi'(t) \rangle \\
 &= (-1) \langle \delta(t), u(x, t)\varphi'(t) \rangle \\
 &= (-1)u(x, 0)\varphi'(0) \\
 &= (-1)g_0(x) \langle \delta(t), \varphi'(t) \rangle \\
 &= (-1) \langle \delta(t)g_0(x), \varphi'(t) \rangle \\
 &= \langle \partial_t(\delta(t)g_0(x)), \varphi(t) \rangle \\
 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u) = \partial_t(\delta(t)g_0(x))
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 \left\langle \delta(t) \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle &= \langle \delta(t), u_t \varphi \rangle \\
 &= u_t(x, 0)\varphi(x, 0) \\
 &= g_1(x) \langle \delta(t), \varphi \rangle \\
 &= \langle g_1(x)\delta(t), \varphi \rangle. \\
 &\Rightarrow \delta(t) \frac{\partial u}{\partial t} = g_1(x)\delta(t)
 \end{aligned}$$

因此得到:

$$F(x, t) = H(t)f(x, t) + \partial_t(g_0(x)\delta(t)) + g_1(x)\delta(t).$$

若 $E(x, t)$ 是算子 $\partial_t^2 - a^2\Delta$ 的基本解, 则

$$\tilde{u}(x, t) = E(x, t) * F(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= E(x, t) * (H(t)f(x, t)), \\ I_2 &= E(x, t) * [\partial_t(g_0(x)\delta(t))], \\ I_3 &= E(x, t) * (g_1(x)\delta(t)). \end{aligned}$$

对于 I_2

$$\begin{aligned} &\langle E_+(x, t) * \partial_t(g_0(x)\delta(t)), \varphi(x, t) \rangle_{x,t} \\ &= \langle \partial_t [E_+(x, t) * (g_0(x) \cdot \delta(t))], \varphi(x, t) \rangle_{x,t} \\ &= \left\langle \partial_t E_+(x, t), \langle \delta(\tau) \cdot g_0(y), \varphi(x + y, t + \tau) \rangle_{y,\tau} \right\rangle_{x,t} \\ &= \left\langle \partial_t E_+(x, t), \langle g_0(y), \varphi(x + y, t) \rangle_y \right\rangle_{x,t} \\ &= \langle \partial_t [E_+(x, t) * g_0(x)], \varphi(x, t) \rangle \end{aligned}$$

故在分布意义下:

$$I_2 = E_+(x, t) * \partial_t(g_0(x)\delta(t)) = \partial_t [E(x, t) * g_0(x)].$$

对于 I_3

$$\begin{aligned} &\langle E_+(x, t) *_{(x,t)} (g(x)\delta(t)), \varphi(x, t) \rangle_{x,t} \\ &= \left\langle E_+(x, t), \langle \delta(\tau)g(y), \varphi(x + y, t + \tau) \rangle_{y,\tau} \right\rangle_{x,t} \\ &= \left\langle E_+(x, t), \langle g(y), \varphi(x + y, t) \rangle_y \right\rangle_{x,t} \\ &= \langle E_+(x, t) *_{x,t} g(x), \varphi(x, t) \rangle_{x,t} \end{aligned}$$

故在分布意义下:

$$I_3 = E_+(x, t) *_{(x,t)} (g(x)\delta(t)) = E_+(x, t) *_{x,t} g(x)$$

故:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= E(x, t) * F(x, t) \\ &= E(x, t) * (H(t)f(x, t)) + E(x, t) * [\partial_t(g_0(x)\delta(t))] + E(x, t) * (g_1(x)\delta(t)) \\ &= E(x, t) * (H(t)f(x, t)) + \partial_t [E(x, t) * g_0(x)] + E_+(x, t) *_{x,t} g(x) \\ &= I'_1 + I'_2 + I'_3 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I'_1 &= E(x, t) * (H(t)f(x, t)), \\ I'_2 &= \partial_t [E(x, t) * g_0(x)], \\ I'_3 &= E_+(x, t) *_{x,t} g(x). \end{aligned}$$

对于 I'_1

$$I'_1 = \int_{\mathbb{R}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} H(\tau)f(y, \tau) \cdot E(x - y, t - \tau) dy$$

代入三维波动方程的基本解:

$$E(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t} \delta(at - |x|)$$

得到:

$$I'_1 = \int_{\mathbb{R}} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} H(\tau) f(y, \tau) \cdot \frac{H(t-\tau)}{4\pi a^2 (t-\tau)} \delta(a(t-\tau) - |x-y|) dy$$

而

$$\begin{cases} H(\tau) > 0 \iff \tau > 0 \\ H(t-\tau) > 0 \iff t-\tau > 0 \iff \tau < t \end{cases} \Rightarrow 0 < \tau < t, H(\tau)H(t-\tau) = 1$$

利用 δ 函数的性质, 它只在 $a(t-\tau) = |x-y|$ 时有取值, 于是:

$$I'_1 = \int_0^t d\tau \int_{a(t-\tau)=|x-y|} f(y, \tau) \cdot \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} dy$$

由于在球面 $a(t-\tau) = |x-y|$ 上, 有 $|x-y| = a(t-\tau)$, 代入得:

$$\begin{aligned} I'_1 &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t d\tau \int_{a(t-\tau)=|x-y|} \frac{f(y, \tau)}{|x-y|} dy \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|x-y|=a(t-\tau)} \frac{f(y, \tau)}{|x-y|} dS_y \end{aligned}$$

 注. 这实际上可以看成在半径为 $r = a(t-\tau)$ 的球面上进行积分。

通过变量替换 $\tau = t - \frac{|x-y|}{a}$, 我们可将积分转化为空间区域上的三重积分:

$$I'_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \leq at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy$$

对于 I'_3

$$I'_3 = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} g_1(y) \delta(at - |x-y|) dy$$

由于 $H(t) = 1$ 当且仅当 $t > 0$, 在 $t > 0$ 时有:

$$I'_3 = \frac{1}{4\pi a^2 t} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} g_1(y) \delta(at - |x-y|) dy$$

利用 δ 函数的球面积分性质, 在球面 $|x-y| = at$ 上积分得:

$$I'_3 = \frac{1}{4\pi a^2 t} \cdot \int_{|x-y|=at} g_1(y) dS_y$$

其中积分在半径为 $r = at$ 的球面上进行。

将表达式改写为:

$$I'_3 = t \cdot \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} g_1(y) dS_y$$

定义球面平均值算子:

$$M\{g_i\} \triangleq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} g_i(y) dS_y$$

其中 $M\{g_i\}$ 表示函数 g_i 在球面 $\{y : |x-y| = at\}$ 上的球面平均值。

因此最终得到:

$$I_3' = t \cdot M\{g_1\}$$

对于 I_2'

同 I_3' , 我们可得:

$$I_2' = \partial_t [E(x, t) * g_0(x)] = \partial_t [t \cdot M\{g_0\}]$$

把 I_1', I_2', I_3' 代回原式, 我们得到原问题的解为:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t)|_{t>0} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y|\leq at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy + \frac{\partial}{\partial t} [t \cdot M\{g_0\}] + t \cdot M\{g_1\}.$$

 下面我们来验证 $u(x, t)$ 是否满足波动方程的柯西问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \quad (\text{波动方程}) \\ u|_{t=0} = g_0(x), & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_1(x) \quad (\text{初值条件}) \end{cases}$$

首先说明 $u(x, t)$ 满足波动方程。由之前的推导:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\right) [H(t)u(x, t)] = H(t)f(x, t) + \partial_t(g_0(x) \cdot \delta(t)) + g_1(x) \cdot \delta(t)$$

在 $t > 0$ 时, $H(t) = 1$ 且 $\delta(t) = 0$, 因此:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\right) u(x, t) = f(x, t)$$

即 $u(x, t)$ 满足波动方程。

再验证 $u(x, t)$ 满足初值条件:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y|\leq at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy + \partial_t (tM\{g_0\}) + tM\{g_1\}$$

记作:

$$u(x, t) = I_1 + I_2 + I_3$$

实际上就是需要验证:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g_0(x) \\ \text{(b)} \quad & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = g_1(x) \end{aligned}$$

这等价于验证以下六个条件:

- (i) $\lim_{t \rightarrow 0^+} I_1 = 0$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} I_2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t (tM\{g_0\}) = g_0(x)$
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} I_3 = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot M\{g_1\} = 0$

$$(iv) \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t I_1 = 0$$

$$(v) \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t I_2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t^2 (t \cdot M\{g_0\}) = 0$$

$$(vi) \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t I_3 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t (t \cdot M\{g_1\}) = g_1(x)$$

 注. 条件 (i)-(iii) 保证初值位移条件, 条件 (iv)-(vi) 保证初值速度条件.

验证 (i)(iv)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t a\tau \cdot \int_{|x-y|=a(t-\tau)} \frac{f(y, \tau)}{|x-y|} dS_y d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \leq at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy \end{aligned}$$

使用球坐标变换, 令 $y = (y_1, y_2, y_3)$, 其中 $0 \leq r \leq at$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r \sin \varphi \cos \theta \\ y_2 = x_2 + r \sin \varphi \sin \theta \\ y_3 = x_3 + r \cos \varphi \end{cases}$$

雅可比行列式为:

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \varphi$$

令 $\tau = t - \frac{r}{a}$, 我们可得:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f\left(y_1, y_2, y_3, t - \frac{r}{a}\right) r \sin \varphi d\theta d\varphi dr$$

当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $r \rightarrow 0$, $|f(x + r \sin \varphi \cos \theta, t - \frac{r}{a})| \leq M$ (有界).

对 I_1 关于 t 求导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f\left(y_1, y_2, y_3, t - \frac{r}{a}\right) at \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^3 f'_{y_k}\left(y_1, y_2, y_3, t - \frac{r}{a}\right) \frac{\partial y_k}{\partial t} r \sin \varphi d\theta d\varphi dr \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow 0^+$ 时, at 与 t 都趋于零, 因此:


$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0$$

综上所述可得:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I_1 = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0$$

验证 (iii)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} tM\{g_1\} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{4\pi(at)^2} \int_{|x-y|=at} g_1(y) dS_y \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{4\pi(at)^2} \cdot g_1(y_1^*) \cdot 4\pi(at)^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot g_1(y_1^*) = 0 \end{aligned}$$

 注. 其中 $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(y_1^*) = 0 \iff |x - y_1^*| \leq at$.

验证 (ii)(vi)

$$\partial_t(t \cdot M\{g_1\}) = M\{g_1\} + t \cdot \partial_t(M\{g_1\})$$

其中由积分中值定理我们可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} M\{g_1\} = g_1(x).$$

而

$$t \cdot \partial_t(M\{g_1\}) = t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} g_1(y) dS_y \right)$$

作球面坐标变换, $y = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + at \cos \theta \sin \varphi \\ y_2 = x_2 + at \cos \theta \cos \varphi \\ y_3 = x_3 + at \sin \theta \end{cases}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2 t^2 |\xi(\theta, \varphi)|$$

故

$$\begin{aligned} t \cdot \partial_t(M\{g_1\}) &= t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g_1(y_1, y_2, y_3) \xi(\theta, \varphi) d\varphi d\theta \right) \\ &= \frac{t}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{k=1}^3 g'_{y_k}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial y_k}{\partial t} \cdot \xi(\theta, \varphi) d\varphi d\theta \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

故

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t(tM\{g_1\}) = g_1(x)$$

同理

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t(tM\{g_0\}) = g_0(x)$$

验证 (v)

法 1

$$\partial_t^2(t \cdot M\{g_0\}) = t \cdot \partial_t^2(M\{g_0\}) + 2 \cdot \partial_t(M\{g_0\})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t(M\{g_0\}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^3 g'_{y_k}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial y_k}{\partial t} \cdot \xi(\theta, \varphi) d\varphi d\theta$$

由于

$$\partial_t(M\{g_0\}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{k=1}^3 g'_{y_k}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial y_k}{\partial t} \cdot \xi(\theta, \varphi) d\varphi d\theta$$

则

$$\partial_t^2(M\{g_0\}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{i,j=1}^3 g''_{y_i y_j}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial y_j}{\partial t} \cdot \xi(\theta, \varphi) d\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \partial_t^2(M\{g_0\}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t^2(t \cdot M\{g_0\}) = 0.$$

法 2

令 $t \cdot M\{g_0\} = v(x, t)$ 可知

由于

$$v(x, t) = E_+(x, t) * g_0(x)$$

则

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) (E_+(x, t) * g_0(x)) &= \delta(x, t) * g_0(x) \\ &= \langle \delta(y, \tau), g_0(x - y) \rangle = \delta(t) \cdot g_0(x) = 0 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t^2 v(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) v(x, t) + a^2 \Delta v(x, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} a^2 \cdot \Delta v(x, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} a^2 \Delta_x (E_+(x, t) * g_0(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} a^2 \cdot E_+(x, t) * \Delta g_0(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} a^2 \cdot t \cdot M\{\Delta g_0\} = 0. \end{aligned}$$

□

 下面我们用降维法 (利用 $n=3$ 的情形求解 $n=2$):

问题 7.0.5.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0, \\ u|_{t=0} = g_0(x_1, x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g_1(x_1, x_2). \end{cases}$$



解. 考虑二维波动方程的 Cauchy 问题如下:

由于 $g_0(x_1, x_2)$ 和 $g_1(x_1, x_2)$ 中不含 x_3 分量, 且 $f(x, t) = 0$, 我们可以将二维问题嵌入到三维空间中求解. 此时解的形式为:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) + t M_{at}^{g_1},$$

其中 M_{at}^g 表示函数 g 在以 $(x_1, x_2, 0)$ 为中心、半径为 at 的球面上的平均值.

先考虑第二项 $t M_{at}^{g_1}$. 在三维空间中, 球面平均值为:

$$t M_{at}^{g_1} = \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} g_1(y_1, y_2) dS_y.$$

由于 g_1 不依赖于 y_3 , 可将球面积分化为平面上的二重积分. 注意到球面微元 dS_y 在 $y_1 y_2$ 平面上的投影满足:

$$\cos \theta \cdot dS_y = dy_1 dy_2,$$

其中 θ 是球面法向量与 y_3 轴方向的夹角, 且

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}{at}.$$

于是,

$$\begin{aligned} t M_{at}^{g_1} &= \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} \frac{g_1(y_1, y_2)}{\cos \theta} \cos \theta dS_y \\ &= \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \cdot 2 \int_{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2 \leq a^2 t^2} \frac{g_1(y_1, y_2)}{\cos \theta} dy_1 dy_2 \quad (\text{上下半球面的叠加}) \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{|x_1-y_1|^2+(x_2-y_2)^2 \leq a^2 t^2} \frac{g_1(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

类似地, 第一项为:

$$\frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x_1-y_1|^2+(x_2-y_2)^2 \leq a^2 t^2} \frac{g_0(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2.$$

两式相加, 即得到二维波动方程 Cauchy 问题的解:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-y| \leq at} \frac{g_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy + \int_{|x-y| \leq at} \frac{g_1(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right],$$

其中 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $|x-y|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$. □

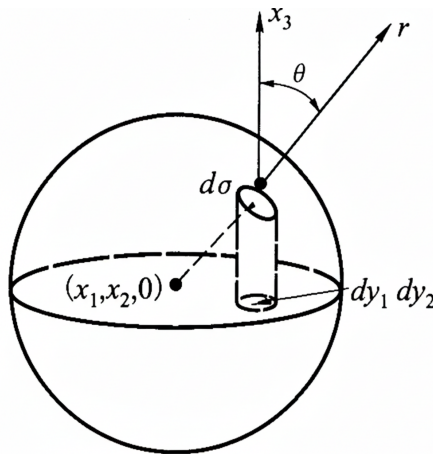


图 7.1: 示意图

 下面我们用降维法求解 $n = 1$ 维波动方程:

问题 7.0.6. 考虑一维齐次波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u|_{t=0} = g_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g_1(x). \end{cases}$$

解. 我们通过降维法, 将三维空间中的球面平均公式投影到一维直线上来求解。

在三维空间中, 齐次波动方程的解为 Kirchhoff 公式:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) + t M_{at}^{g_1},$$

其中 M_{at}^g 表示函数 g 在以 x 为中心、半径为 at 的球面上的平均值。

对于一维情况，我们将三维球面投影到 x_1 轴上。考虑以 $(x_1, 0, 0)$ 为中心、半径为 at 的球面。球面上对应于 y_1 坐标的微元 dy_1 所对应的球面带状区域的面积微元为：

$$dS = 2\pi r dy_1,$$

其中 $r = \sqrt{(at)^2 - (x_1 - y_1)^2}$ 是球面在 y_1 处的截面圆半径。

球面法向量与 y_1 轴方向的夹角 θ 满足：

$$\cos \theta = \frac{r}{at}.$$

因此，球面微元 dS 与 dy_1 的关系为：

$$dS = \frac{2\pi at}{\cos \theta} dy_1 = 2\pi at dy_1.$$

现在计算 $t M_{at}^{g_1}$ ：

$$\begin{aligned} t M_{at}^{g_1} &= \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} g_1(y_1) dS \\ &= \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \int_{x_1-at}^{x_1+at} g_1(y_1) \cdot 2\pi at dy_1 \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x_1-at}^{x_1+at} g_1(y_1) dy_1. \end{aligned}$$

类似地，计算第一项：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2a} \int_{x_1-at}^{x_1+at} g_0(y_1) dy_1 \right] \\ &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1-at}^{x_1+at} g_0(y_1) dy_1. \end{aligned}$$

利用含参变量积分的求导公式 (Leibniz 规则)：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1-at}^{x_1+at} g_0(y_1) dy_1 &= \frac{\partial}{\partial t} [G(x_1 + at) - G(x_1 - at)] \\ &= a g_0(x_1 + at) - (-a) g_0(x_1 - at) \\ &= a [g_0(x_1 + at) + g_0(x_1 - at)], \end{aligned}$$

其中 $G'(y) = g_0(y)$ 。

因此，

$$\frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) = \frac{1}{2a} \cdot a [g_0(x_1 + at) + g_0(x_1 - at)] = \frac{1}{2} [g_0(x + at) + g_0(x - at)].$$

两式相加，得到一维齐次波动方程的解：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g_0(x + at) + g_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_1(y) dy.$$

 注. 这正是我们所熟知的 d'Alembert 公式。

□

 下面我们来看波传播的物理意义：

$n = 3$ (1) $f \neq 0, g_0 = g_1 = 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \leq at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy$$

其中 $\frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}$ 表示弦在 t 时刻 x 位置时的振动是受到外力 f 在 y 点 $t - \frac{|x-y|}{a}$ 时刻作用的影响. 其中 $t - \frac{|x-y|}{a}$ 表示振动的影响推迟了.

(2) $f = 0, g_0 = 0, g_1 \neq 0$

 注. 我们只考虑 g_1 对 u 的影响, g_0 同理.

此时:

$$u(x, t) = tM\{g_1\} = \frac{t}{4\pi a^2 t} \cdot \int_{|x-y|=at} g_1(y) dS_y$$

设 x 为 $\text{supp}g_1$ 外的一点, 记 r 为振动 (波) 的前端与 x 的距离, 记 R 为振动 (波) 的末端与 x 的距离.

i. 当 $at < r$ 时, 即 $t < \frac{r}{a}$ 时, 满足

$$\{y : |x - y| = at\} \cap \text{supp}g_1 = \emptyset,$$

这意味着在时刻 t , 从点 x 出发、半径为 at 的球面与初始扰动区域不相交. 因此, 此时扰动尚未传播到 x 点, x 点保持 **平静**, 解在该点处的值 $u(x, t) \equiv 0$.

ii. 当 $r < at < R$ 时, 即 $\frac{r}{a} < t < \frac{R}{a}$ 时, 波前 (即扰动的领先部分) 已经通过点 x , 但波后 (即扰动的尾部) 尚未完全通过. 此时, 球面 $\{y : |x - y| = at\}$ 与 $\text{supp}g_1$ 有非空交集, 初始扰动对点 x 产生影响, **振动**, $u(x, t) \neq 0$.

iii. 当 $at > R$ 时, 即 $t > \frac{R}{a}$ 时, 满足

$$\text{supp}g_1 \cap \{y : |x - y| = at\} = \emptyset,$$

这是因为半径为 at 的球面已经完全超出了初始扰动区域的范围. 因此, 扰动已经完全离开点 x , 此后 x 点重新恢复 **平静**, 即 $u(x, t) \equiv 0$.

 $n = 2$

对于 $n = 2$ 的情况, 解由对圆盘 (而非球面) 的积分给出. 因此当时间 t 满足 $t > \frac{r}{a}$ 且 $t < \frac{R}{a}$ 时, 圆盘 $\{y : |x - y| \leq at\}$ 与初始扰动区域 $\text{supp}g_1$ 的交集逐渐扩大. 特别地, 当 $t > \frac{R}{a}$ 时,

$$\{y : |x - y| \leq at\} \cap \text{supp}g_1 = \Omega$$

其中 Ω 表示 $\text{supp}g_1$ 的整个区域. 这意味着整个初始扰动区域都对点 x 有贡献, 因此即使在 $t > \frac{R}{a}$ 后, 点 x 处的解仍然不会立即变为零, 而是会在一段时间内 **持续波动**, 不会像三维情形那样迅速恢复平静. 这是二维波动方程与三维情形的本质区别.

其余两种时间阶段 ($at < r$ 和 $r < at < R$) 的行为与 $n = 3$ 时完全一致.

 $n = 1$

对于 $n = 1$ 的情况, 在扰动未到达阶段 ($at < r$) 和扰动完全影响阶段 ($r < at < R$) 的行为与高维情况类似.

关键区别出现在 $t > \frac{R}{a}$ 时。此时，初始位移 $g_0(x)$ 的影响已经消失（在一维波动公式中， g_0 的贡献仅来自两个端点，且随时间衰减），但初始速度 g_1 的影响仍然存在。由于一维波的传播沿两条特征线 $x \pm at$ 进行，当 t 充分大时，点 x 处的解依赖于区间 $[x - at, x + at]$ 上 g_1 的积分。只要该区间与 $\text{supp } g_1$ 的交集非空，即

$$[x - at, x + at] \cap \text{supp } g_1 \neq \emptyset,$$

解就不为零。由于一维情况下波的传播没有几何衰减，且扰动会来回反射（若有边界）或持续扩散（在无限直线上），因此点 x 在扰动首次到达后，**通常无法恢复平静（振动）**，解可能会持续振荡或趋于一个非零的渐近状态。

命题 7.0.2 (弦振动方程的基本解). 定义函数 $E(x, t)$ 如下:

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & a^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

则 $E(x, t)$ 是弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x, t)$ 的基本解，即它在分布意义下满足 $(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)E(x, t) = \delta(x, t)$ 。

证明. 为了验证 $E(x, t)$ 是基本解，对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ，证明以下分布意义下的等式成立：

$$\langle (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)E(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \langle \delta(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \varphi(0, 0).$$

根据分布导数的定义，我们有：

$$\langle (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)E(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \langle E(x, t), (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) \rangle.$$

因为 $E(x, t)$ 是局部可积函数，右侧可写为积分形式：

$$\langle E(x, t), (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} E(x, t) \cdot (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) dx dt.$$

由 $E(x, t)$ 的定义，其支集在区域 $\{a^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0\}$ 上，且在该区域内取常数值 $\frac{1}{2a}$ 。因此，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} E(x, t) (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) dx dt = \frac{1}{2a} \iint_{a^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) dx dt.$$

为了计算这个积分，作变量替换以简化区域。令

$$y = x + at, \quad z = at - x,$$

则逆变换为

$$x = \frac{y - z}{2}, \quad t = \frac{y + z}{2a}.$$

在此变换下，原积分区域 $a^2 t^2 - x^2 \geq 0$ 且 $t \geq 0$ 等价于 $y \geq 0$ 且 $z \geq 0$ 。同时，计算 Jacobi 行列式：

$$\left| \frac{D(x, t)}{D(y, z)} \right| = \frac{1}{2a}.$$

函数 φ 在新变量下记为 $\tilde{\varphi}(y, z) = \varphi\left(\frac{y-z}{2}, \frac{y+z}{2a}\right)$ 。

现在计算微分算子在新变量下的表达式。直接计算可得：

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{4a} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t).$$

因此,

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2) \varphi(x, t) = 4a \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z}.$$

将积分转换到 (y, z) 变量下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \iint_{a^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2) \varphi(x, t) dx dt &= \frac{1}{2a} \iint_{y \geq 0, z \geq 0} \left(4a \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} \right) \cdot \frac{1}{2a} dy dz \\ &= \iint_{y \geq 0, z \geq 0} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} dy dz. \end{aligned}$$

对上述重积分依次进行积分:

$$\begin{aligned} \iint_{y \geq 0, z \geq 0} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} dy dz &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} dz \right] dy \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \Big|_{z=0}^{z \rightarrow \infty} \right] dy \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}(y, 0) \right) dy \quad (\text{因为 } \varphi \text{ 紧支, 当 } z \rightarrow \infty \text{ 时导数为零}) \\ &= -[\tilde{\varphi}(y, 0)]_0^\infty = \tilde{\varphi}(0, 0). \end{aligned}$$

由于 $\tilde{\varphi}(0, 0) = \varphi(0, 0)$, 我们得到:

$$\langle (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2) E(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \varphi(0, 0).$$

这正好等于 $\langle \delta(x, t), \varphi(x, t) \rangle$ 。因此, 在分布意义下,

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2) E(x, t) = \delta(x, t).$$

故 $E(x, t)$ 是弦振动方程的基本解。 □

 下面我们来验证波动方程初边值问题解的唯一性与稳定性 ($n = 2$):

问题 7.0.7 (二维波动方程初边值问题解的唯一性与稳定性).

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u(x, y, t) = f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t > 0. \\ u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = g(x, y). \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

证明. 在物理上, 系统的动能 T 和势能 V 分别定义为:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u_t^2 dx dy \\ V &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} T(u_x^2 + u_y^2) dx dy \end{aligned}$$

其中 ρ 为密度, T 为张力. 不计常数因子, 总能量定义为:

$$E(t) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy, \quad \text{其中 } a^2 = \frac{T}{\rho}.$$

唯一性 令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足齐次方程及齐次初边值条件:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

首先, 考虑无外力情况 ($f = 0$), 并证明此时系统的总能量守恒, 即 $\frac{dE(t)}{dt} = 0$. 计算能量 $E(t)$ 对时间的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\ &= \int_{\Omega} [2u_t u_{tt} + 2a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})] dx dy. \end{aligned}$$

利用分部积分公式:

$$\begin{aligned} u_x u_{xt} &= \partial_x(u_x u_t) - u_{xx} u_t, \\ u_y u_{yt} &= \partial_y(u_y u_t) - u_{yy} u_t. \end{aligned}$$

代入上式得:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_{\Omega} [2u_t u_{tt} + 2a^2(\partial_x(u_x u_t) - u_{xx} u_t + \partial_y(u_y u_t) - u_{yy} u_t)] dx dy \\ &= \int_{\Omega} 2u_t (u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})) dx dy + 2a^2 \int_{\Omega} (\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)) dx dy. \end{aligned}$$

由 u 满足齐次波动方程 $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, 第一项为零. 对第二项应用散度定理:

$$\int_{\Omega} (\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)) dx dy = \int_{\partial\Omega} (u_x u_t \cos(\alpha, \vec{n}) + u_y u_t \cos(\gamma, \vec{n})) dS,$$

其中 \vec{n} 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 由于边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 故在边界上 $u_t|_{\partial\Omega} = 0$, 从而整个边界积分为零. 因此,

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0.$$

 **注.** 我们将 $\int_{\Omega} (\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)) dx dy$ 视为向量场 $\vec{F} = (u_x u_t, u_y u_t)$ 的散度积分, 由散度定理:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

这里 $\vec{F} \cdot \vec{n} = u_x u_t n_x + u_y u_t n_y = u_t (u_x n_x + u_y n_y)$, 其中 (n_x, n_y) 是单位外法向量 \vec{n} 的分量. 而 $u_x n_x + u_y n_y$ 恰好是 u 沿法向的方向导数.

这意味着总能量 $E(t)$ 不随时间变化, 即 $E(t) = E(0)$ 对任意 $t > 0$ 成立.

现在计算初始能量 $E(0)$. 由初始条件:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = 0 &\Rightarrow u_x(x, y, 0) = 0, u_y(x, y, 0) = 0, \\ u_t(x, y, 0) &= 0. \end{aligned}$$

代入能量表达式得:

$$E(0) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] |_{t=0} dx dy = 0.$$

由于能量守恒, 对任意 $t > 0$, 有:

$$E(t) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = E(0) = 0.$$

被积函数 $u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)$ 非负, 故在整个区域 Ω 及任意时刻 t 上, 必须有:

$$u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) = 0.$$

这迫使:

$$u_t = u_x = u_y = 0.$$

因此, $u(x, y, t)$ 是一个常数函数。又因为 $u(x, y, 0) = 0$, 所以该常数必须为零, 即:

$$u(x, y, t) \equiv 0.$$

从而 $u_1(x, y, t) \equiv u_2(x, y, t)$, 唯一性得证。

稳定性

Step 1 外力 $f(x, y, t)$ 对 $E(t)$ 的影响, 此时 $f(x, y, t) \neq 0$ 。

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\ &= 2 \int_{\Omega} u_t (u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})) dx dy \\ &\quad + 2a^2 \int_{\partial\Omega} [u_x u_t \cos(\alpha, \vec{n}) + u_y u_t \cos(\gamma, \vec{n})] dS \\ &= 2 \int_{\Omega} u_t \cdot f dx dy \end{aligned}$$

这里利用了边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 和 $u_t|_{\partial\Omega} = 0$ 。

由不等式 $2u_t f \leq u_t^2 + f^2$ 可得:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx dy + \int_{\Omega} f^2 dx dy \\ &\leq \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy + \int_{\Omega} f^2 dx dy \\ &= E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx dy. \end{aligned}$$

总结有:

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx dy.$$

上式乘以 e^{-t} 并整理:

$$\begin{aligned} e^{-t} \cdot \frac{dE(t)}{dt} - e^{-t} E(t) &\leq e^{-t} \cdot \int_{\Omega} f^2 dx dy, \\ \frac{d}{dt} (e^{-t} \cdot E(t)) &\leq e^{-t} \cdot \int_{\Omega} f^2 dx dy. \end{aligned}$$

两边从 0 到 t 积分:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{-\tau} E(\tau)) d\tau &\leq \int_0^t e^{-\tau} \left(\int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy \right) d\tau, \\ e^{-t} E(t) - E(0) &\leq \int_0^t e^{-\tau} \cdot \int_{\Omega} f^2 dx dy d\tau. \end{aligned}$$

于是:

$$E(t) \leq e^t \left[E(0) + \int_0^t e^{-\tau} d\tau \cdot \int_{\Omega} f^2 dx dy \right], \quad t \in [0, T].$$

由于 $t \in [0, T]$, 则 $e^t \leq e^T$, $e^{-\tau} \leq 1$, 代入得:

$$E(t) \leq C_0 \left[E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \right].$$

Step 2 定义 $E_0(t) = \int_{\Omega} u^2(x, y, t) dx dy$.

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2(x, y, t) dx dy \\ &= 2 \int_{\Omega} u \cdot u_t dx dy. \end{aligned}$$

由不等式 $2uu_t \leq u^2 + u_t^2$ 可得:

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(t)}{dt} &\leq \int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} u_t^2 dx dy \\ &\leq E_0(t) + E(t). \end{aligned}$$

于是有:

$$\frac{dE_0(t)}{dt} \leq E_0(t) + E(t).$$

解得:

$$E_0(t) \leq e^t \left[E_0(0) + \int_0^t e^{-\tau} E(\tau) d\tau \right].$$

而:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\tau} E(\tau) d\tau &= -[e^{-\tau} E(\tau)]_0^t + \int_0^t e^{-\tau} dE(\tau) \\ &= -e^{-t} E(t) + E(0) + \int_0^t e^{-\tau} dE(\tau) \\ &\leq E(0) + \int_0^t e^{-\tau} dE(\tau) \quad (e^{-t} E(t) \geq 0) \\ &\leq E(0) + \int_0^t dE(\tau) \quad (e^{-\tau} \leq 1) \\ &= E(0) + E(t) - E(0) \\ &= E(t) \end{aligned}$$

故:

$$E_0(t) \leq C_1 [E_0(0) + E(t)].$$

将 $E(t)$ 的估计代入:

$$E_0(t) \leq \tilde{C} \left[E_0(0) + E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \right].$$



下面我们来正式证明稳定性:

若 u_1, u_2 分别满足以下方程:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u_i(x, y, t) = f_i(x, y, t), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u_i(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_i(x, y), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = g_i(x, y), & (i = 1, 2), \\ u_i|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u(x, y, t) = f_1 - f_2, \\ u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_1 - \varphi_2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = g_1 - g_2, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

其中初始数据和外力扰动满足:

$$\begin{cases} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, & \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, & \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, \\ \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, \\ \|f_1 - f_2\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq \eta. \end{cases}$$

那么:

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}^2 &= \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 dx dy = \int_{\Omega} u^2 dx dy = E_0(t) \\ &\leq \tilde{C} \left[E_0(0) + E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \right] \end{aligned}$$

则对于能量范数, 有:

$$\begin{aligned} E_0(0) &= \int_{\Omega} u^2(x, y, 0) dx dy \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ E(0) &= \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]|_{t=0} dx dy \\ &\leq \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + a^2\|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)}^2 + a^2\|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} (f_1 - f_2)^2 dx dy d\tau \leq \|f_1 - f_2\|_{L^2([0, T] \times \Omega)}^2 \end{aligned}$$

代入 $E_0(t)$ 和 $E(t)$ 的估计式, 得到:

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}^2 \leq K(\eta^2 + \eta^2 + \eta^2 + \eta^2) = 4K\eta^2.$$

同理, 对于 $a^2\|u_{1x} - u_{2x}\|_{L^2(\Omega)}^2$, 有:

$$\begin{aligned} a^2\|u_{1x} - u_{2x}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} a^2 u_x^2 dx dy \\ &\leq E(t) \\ &\leq C_0 \left[E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} (f_1 - f_2)^2 dx dy d\tau \right] \\ &\leq K(\|g_1 - g_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_1 - f_2\|_{L^2([0, T] \times \Omega)}^2) \\ &\leq 4K\eta^2. \end{aligned}$$

因此, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, $\|u_1 - u_2\|_{L^2}$ 和 $\|u_{1x} - u_{2x}\|_{L^2}$ 均趋于零, 对于 $\|u_{1y} - u_{2y}\|_{L^2}$ 也相同, 稳定性得证。

□

例 7.0.1. 考虑具有总摩擦力且端点固定的有界弦振动方程:

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 为阻尼系数。证明齐次方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu_t = 0$ 的能量随时间减少。并证明上述问题解的唯一性: 若 u_1, u_2 均是问题 (P) 的解, 则 $u_1 \equiv u_2$ 。



证明.

能量减少 定义能量函数:

$$E(t) = \int_0^l [u_t^2 + a^2 u_x^2] dx.$$

计算能量对时间的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^l [u_t^2 + a^2 u_x^2] dx \\ &= \int_0^l [2u_t u_{tt} + 2a^2 u_x u_{xt}] dx \\ &= 2 \int_0^l u_t u_{tt} dx + 2a^2 \int_0^l u_x u_{xt} dx. \end{aligned}$$

对第二项使用分部积分:

$$\int_0^l u_x u_{xt} dx = \int_0^l \partial_x (u_x u_t) dx - \int_0^l u_{xx} u_t dx = u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l u_{xx} u_t dx.$$

由边界条件 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ 可得 $u_t(0, t) = u_t(l, t) = 0$, 因此:

$$u_x u_t \Big|_0^l = u_x(l, t) u_t(l, t) - u_x(0, t) u_t(0, t) = 0.$$

于是:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= 2 \int_0^l u_t u_{tt} dx + 2a^2 \left(- \int_0^l u_{xx} u_t dx \right) \\ &= 2 \int_0^l u_t (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx. \end{aligned}$$

代入齐次方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = -cu_t$ (当 $f = 0$ 时):

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= 2 \int_0^l u_t (-cu_t) dx \\ &= -2c \int_0^l u_t^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

由于 $c > 0$ 且 $u_t^2 \geq 0$, 故 $\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$, 且等号成立当且仅当 $u_t \equiv 0$. 这表明能量 $E(t)$ 随时间非增, 即能量减少。

唯一性 令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足齐次初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

定义 u 的能量:

$$E(t) = \int_0^l [u_t^2 + a^2 u_x^2] dx.$$

由上述命题可知 $\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$, 故 $E(t)$ 非增. 特别地, 对任意 $t \geq 0$, 有:

$$E(t) \leq E(0).$$

计算初始能量:

$$E(0) = \int_0^l [u_t^2(x, 0) + a^2 u_x^2(x, 0)] dx.$$

由初始条件 $u(x, 0) = 0$ 得 $u_x(x, 0) = 0$, 由 $u_t(x, 0) = 0$, 故 $E(0) = 0$.

因此对任意 $t \geq 0$, 有:

$$E(t) \leq E(0) = 0.$$

但根据定义 $E(t) \geq 0$ (被积函数非负), 故必有 $E(t) = 0$. 进而可得:

$$\int_0^l [u_t^2 + a^2 u_x^2] dx = 0.$$

由于被积函数非负, 这意味着在 $[0, l]$ 上几乎处处有:

$$u_t^2(x, t) = 0 \quad \text{且} \quad u_x^2(x, t) = 0.$$

因此:

$$u_t(x, t) = 0 \quad \text{且} \quad u_x(x, t) = 0 \quad \text{a.e. } x \in [0, l], t \geq 0.$$

由 $u_t = 0$ 知 u 与时间无关, 即 $u(x, t) = h(x)$. 再由 $u_x = 0$ 知 $h'(x) = 0$, 故 $h(x)$ 为常数, 即 $u(x, t) = C$ (常数).

利用边界条件 $u(0, t) = 0$, 得 $C = 0$, 故 $u(x, t) \equiv 0$. 从而 $u_1 \equiv u_2$, 唯一性得证.

□

例 7.0.2. 考虑变系数波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} p(x)u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x) + q(x)u = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中系数满足: $k(x) \geq k_0 > 0$, $q(x) \geq q_0 > 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$, k_0, p_0, q_0 为正常数。



利用能量积分公式:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [k(x)u_x^2 + p(x)u_t^2 + q(x)u^2] dx,$$

证明该方程的解 $u \equiv 0$ 。



证明. 定义能量函数:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [k(x)u_x^2 + p(x)u_t^2 + q(x)u^2] dx.$$

计算能量对时间的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [k(x)u_x^2 + p(x)u_t^2 + q(x)u^2] dx \\ &= \int_0^L [k(x)u_x u_{xt} + p(x)u_t u_{tt} + q(x)u u_t] dx. \end{aligned}$$

对第一项进行分部积分:

$$\begin{aligned} \int_0^L k(x)u_x u_{xt} dx &= \int_0^L k(x)u_x \frac{\partial}{\partial t}(u_x) dx \\ &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x u_t) dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x) u_t dx \\ &= k(x)u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x) u_t dx. \end{aligned}$$

由边界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$, 可得 $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$, 因此:

$$k(x)u_x u_t \Big|_0^L = k(L)u_x(L, t)u_t(L, t) - k(0)u_x(0, t)u_t(0, t) = 0.$$

将分部积分结果代回能量导数表达式:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L \left[-\frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x) u_t + p(x)u_t u_{tt} + q(x)u u_t \right] dx \\ &= \int_0^L u_t \left[p(x)u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x) + q(x)u \right] dx. \end{aligned}$$

由方程 $p(x)u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x) + q(x)u = 0$, 方括号内表达式为零, 故:

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0.$$

这意味着能量守恒: $E(t) = E(0)$ 对所有 $t \geq 0$ 成立。

计算初始能量:

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [k(x)u_x^2(x, 0) + p(x)u_t^2(x, 0) + q(x)u^2(x, 0)] dx.$$

由初始条件 $u(x, 0) = 0$ 得 $u_x(x, 0) = 0$, 由 $u_t(x, 0) = 0$, 故:

$$E(0) = 0.$$

因此, 对任意 $t \geq 0$:

$$E(t) = E(0) = 0.$$

由能量表达式 $E(t) = 0$ 可得:

$$\int_0^L [k(x)u_x^2 + p(x)u_t^2 + q(x)u^2] dx = 0.$$

由于系数 $k(x) \geq k_0 > 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq q_0 > 0$, 且被积函数非负, 故必须有:

$$u_x^2(x, t) = 0, \quad u_t^2(x, t) = 0, \quad u^2(x, t) = 0 \quad \text{对几乎处处的 } x \in [0, L].$$

从而:

$$u_x(x, t) = 0, \quad u_t(x, t) = 0, \quad u(x, t) = 0 \quad \text{a.e. } x \in [0, L], t \geq 0.$$

由于 u 连续 (作为微分方程的解), 故 $u(x, t) \equiv 0$. □

 以下部分是 *vrw* 在 2025 年 12 月 11 日周四晚上第 2 节课讲的东西, 之前笔记都没有:

例 7.0.3. 设 $u(x, y, t)$ 是以下问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & x \in \Omega, a^2 = \frac{T}{\xi} \\ (T \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial \Omega} = 0, & T > 0, \sigma > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其能量

$$E(t) = \int_{\Omega} \frac{\xi}{2} u_t^2 + \frac{T}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

$$E_0(t) = \int_{\Omega} u^2 dx dy$$

证明能量不等式:

$$E_0(t) \leq e^t E_0(t) + \frac{2}{\xi} (e^t - 1) E(0)$$

证明.

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_{\Omega} \frac{\xi}{2} \cdot 2u_t u_{tt} + \frac{T}{2} \cdot 2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt}) dx dy + \int_{\partial \Omega} \frac{\sigma}{2} \cdot 2u u_t ds \\ &= \int_{\Omega} [\xi u_t u_{tt} + T(\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t) - u_{xx} u_t - u_{yy} u_t)] dx dy + \int_{\partial \Omega} \sigma u u_t ds \\ &= \int_{\Omega} u_t (f u_{tt} - T(u_{xx} + u_{yy})) dx dy + \int_{\partial \Omega} T(u_x u_t \cos(n, x) + u_y \cos(n, y)) ds - \int_{\partial \Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_t ds \end{aligned}$$

由 $a^2 = \frac{T}{\rho}$, 我们可得:

$$\int_{\Omega} [f u_{tt} - T(u_{xx} + u_{yy})] = 0$$

故

$$= \int_{\partial \Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_t ds - \int_{\partial \Omega} T \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_t ds = 0$$

$$E(t) = E(0), t > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d(E_0(t))}{dt} &= 2 \int_{\Omega} u u_t dx dy \leq \int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} u_t^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} u^2 dx dy + \frac{2}{\xi} \int_{\Omega} \frac{\xi}{2} u_t^2 dx dy \\ &\leq E_0(t) + \frac{2}{\xi} E(t) = E_0(t) + \frac{2}{\xi} E(0) \end{aligned}$$

两边同乘 e^{-t} , 再 $(0, t)$ 上积分:

$$E_0(t) \leq e^t E_0(0) + \frac{2}{\xi} e^t \int_0^t e^{-\tau} E(0) d\tau = e^t E_0(t) + \frac{2}{\xi} (e^t - 1) E(0)$$

□

问题 7.0.8 (柯西问题的能量方法). 对 $n = 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$



考虑一维齐次波动方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$$\Omega_t = \{(x, t) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2(t_0 - t)^2\}$$

$$\Omega_0 = \{(x, t) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t_0^2\}$$

证明. 无外力时 ($f \equiv 0$):

能量递减

$$E_1(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dx dy \leq E_1(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

只要证明: 在 $0 \leq t \leq t_0$ 时:

$$\frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \leq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq a^2(t_0-t)^2} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{a(t_0-t)} \int_0^{2\pi r} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) ds dr \\ &= \int_0^{a(t_0-t)} \int_0^{2\pi r} 2u_t u_{tt} + 2a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt}) ds dr - a \int_0^{2\pi a(t_0-t)} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) ds \\ &= 2 \int_0^{a(t_0-t)} \int_0^{2\pi r} u_t u_{tt} + a^2(\partial_x(u_x u_t) - u_{xx} u_t + \partial_y(u_y u_t) - u_{yy} u_t) ds dr \\ &\quad - a \int_{\partial\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) ds \\ &= 2 \int_0^{a(t_0-t)} \int_0^{2\pi r} u_t (u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})) ds dr + 2a^2 \int_0^{a(t_0-t)} \int_0^{2\pi r} \partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t) ds dr \\ &\quad - a \int_{\partial\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) ds \\ &= 2a^2 \int_{\partial\Omega_t} u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y) ds - a \int_{\partial\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) ds \\ &= -a \int_{\partial\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) - 2a u_x u_t \cos(n, x) - 2a u_y u_t \cos(n, y) ds \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) - 2au_xu_t \cos(n, x) - 2au_yu_t \cos(n, y) \\
 &= u_t^2 \cos^2(n, x) + u_t^2 \cos^2(n, y) + a^2(u_x^2 + u_y^2) - 2au_xu_t \cos(n, x) - 2au_yu_t \cos(n, y) \\
 &= (u_t \cos(n, x) - au_x)^2 + (u_t \cos(n, y) - au_y)^2 \geq 0 \\
 &\Rightarrow \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \leq 0 \\
 &\Rightarrow E_1(\Omega_t) \leq E_1(\Omega_0)
 \end{aligned}$$

唯一性 设 u_1, u_2 均为方程的解, 令 $u = u_1 - u_2$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$E_1(\Omega_t) \leq E_1(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)|_{t=0} dx dy$$

由 $u|_{t=0} = 0$ 我们可知: $u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 0$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$

$$\Rightarrow 0 = E_1(\Omega_0) = E_1(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

$$\Rightarrow u_t = u_x = u_y = 0 \Rightarrow u \equiv \text{const}$$

又由 $u|_{t=0} = 0$ 我们可知

$$u \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$$

稳定性

$$E_0(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} u^2 dx dy$$

证: 在 $t \in [0, t_0]$ 上有:

$$E_0(\Omega_t) \leq c(E_1(\Omega_0) + E_0(\Omega_0))$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_0(\Omega_t)}{dt} &= 2 \int_{\Omega_t} u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy - a \int_{\partial \Omega_t} u^2 ds \\
 &\leq 2 \int_{\Omega_t} u \frac{\partial u}{\partial t} dx dy \\
 &\leq \int_{\Omega_t} u^2 dx dy + \int_{\Omega_t} u_t^2 dx dy \\
 &\leq E_1(\Omega_0) + E_0(\Omega_0)
 \end{aligned}$$

两边同乘 e^{-t} 再关于 t 作积分可得:

$$\begin{aligned}
 E_0(\Omega_t) &\leq e^{-t} E_0(\Omega_0) + \int_0^t e^{t-\tau} E_1(\Omega_\tau) d\tau \\
 &\leq e^{-t} E_0(\Omega_0) + \int_0^t e^{t-\tau} E_1(\Omega_0) d\tau \\
 &\Rightarrow E_0(\Omega_t) \leq c(E_1(\Omega_0) + E_0(\Omega_0))
 \end{aligned}$$

接着就易证稳定性.

□

8. 习题

8.1	期末习题	142
8.2	作业	167
8.2.1	作业 1	167
8.2.2	作业 2	170
8.2.3	作业 3	173
8.2.4	作业 4	175
8.2.5	作业 5	180
8.2.6	作业 6	184
8.2.7	作业 7	188
8.2.8	作业 8	190
8.2.9	作业 9	194
8.2.10	作业 10	196

8.1 期末习题

习题 8.1.1. 设 $f(x)$ 在 Ω 上连续, 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都有

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

证明: $f \equiv 0$.

 (反证)

假设 $\exists x_0 \in \Omega, f(x_0) > 0$, 取 x_0 的邻域 U_{x_0} (充分小), 取 $\varphi(x) > 0 \in C_0^\infty(U_{x_0})$

 注. 能取到这样的 $\varphi(x) > 0$ 是由 φ 的连续性所保证的.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \int_{U_{x_0}} f(x)\varphi(x)dx > 0$$

这与

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

矛盾!

习题 8.1.2.

1. 写出磨光核 $\varphi_{\varepsilon}(x)$ 的定义
2. 令 $f_{\varepsilon}(x) = \int \varphi_{\varepsilon}(x-y)dy$ (截断函数), 证明:

$$|\partial_x^{\alpha} f_{\varepsilon}(x)| \leq C(\alpha, n)\varepsilon^{-|\alpha|}$$



1. 取 $g(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\text{supp } g \subset \{x : |x| \leq 1\}$ 且 $c = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \neq 0$, 作 $\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n}g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 有

$$\int \varphi_{\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{c} \int g(x) dx = 1.$$

2. 把磨光核的定义代入直接展开, 再利用其具有紧支集的进行放缩.

习题 8.1.3. 设 $f(x) \in C^R(\Omega)$, 对 Ω 内的任意紧子集 K 必存在一族 C_0^{∞} 函数列 $f_{\varepsilon}(x)$ 在 K 上成立一致收敛:

$$f_{\varepsilon}(x) \rightarrow f(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

对 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, |\alpha| < k$, 有:

$$\partial_x^{\alpha} f_{\varepsilon}(x) \rightarrow \partial_x^{\alpha} f(x)$$



1. $K \subset \Omega, \exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $K_{\varepsilon_0} \subset \Omega$.

 注. 紧集在开集中可以被稍大的紧集所包含

$$\text{令 } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_{\varepsilon_0} \\ 0, & x \notin K_{\varepsilon_0} \end{cases}, \text{ 则 } \text{supp } \tilde{f} \in K_{\varepsilon_0}.$$

对 \tilde{f} 进行磨光, 由 $\tilde{f}_{\varepsilon}(x) = \varphi_{\varepsilon}(x) * \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_{\varepsilon}(x) \in C^{\infty}(\Omega) \supseteq \text{supp } \tilde{f}_{\varepsilon}(x)$.

 注. 这样的 f_{ε} 就是想要的 C_0^{∞} 函数列.

代入验证最终可得到:

$$|\tilde{f}_{\varepsilon}(x) - f(x)| \leq \max_{|x-y| \leq \varepsilon, x \in K} |f(y) - f(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\varepsilon}(x-y)dy \right| \rightarrow 0$$

紧集上的连续函数必然一致连续, 故 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon \rightarrow 0$ ↑ = 1

2. 构造和上面一模一样:

 注.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y)(\partial_x^{\alpha} \varphi_{\varepsilon}(x-y))dy = \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} (\partial_y^{\alpha} \tilde{f}(y))\varphi_{\varepsilon}(x-y)dy$$

我觉得这个可以理解为：

$$\langle \tilde{f}(y), \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \rangle = \langle \tilde{f}(y), (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \varphi(x-y) \rangle = \langle \partial_y^\alpha \tilde{f}(y), \varphi(x-y) \rangle$$

严谨的还是利用分部积分 + 紧支集性质.

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha f_\varepsilon(x) - \partial_x^\alpha f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) (\partial_x^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y)) dy - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha f(x)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n \& K_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega} (\partial_y^\alpha \tilde{f}(y)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha f(x)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &\leq \max_{|x-y| \leq \varepsilon, x \in K} |\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

仍然沿用：紧集上的连续函数必然一致连续，结合 $\partial_x^\alpha f(x)$ 为连续函数

$$\text{故 } |\partial_y^\alpha \tilde{f}(y) - \partial_x^\alpha f(x)| = |\partial_y^\alpha f(y) - \partial_x^\alpha f(x)| < \varepsilon \rightarrow 0$$

$\uparrow = 1$

习题 8.1.4. 证明

$$\mathcal{L}'_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

要证明 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ，我们只需验证线性性和连续性

注.

(i) 线性性

c_1, c_2 实数，

$$\langle f, c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle f, \varphi_2 \rangle \quad (8.1)$$

(ii) 连续性

若 $\varphi_j \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上，则 $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$.

(iii) 连续的等价定义

对任一紧集 $K \subset \Omega$ ，必存在 c 和非负整数 k 使得 $\forall \varphi \in C_0^\infty(K)$ 都有：

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi| \quad (8.2)$$

这题线性性显然（积分的线性性），我们只需验证连续性：

对紧集 $K \subset \Omega, \varphi \in C_0^\infty(K)$,

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_K f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x) \varphi(x)| dx \\ &\leq \sup_K |\varphi(x)| \int_K |f(x)| dx \\ &\leq c \cdot \sup_K |\varphi(x)| \quad \uparrow = c \end{aligned}$$

习题 8.1.5. 设 $\{f_n(x)\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$, 满足:

(i) 对 $\forall M > 0, |a|, |b| < M$, 有:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq c$$

(ii) 固定 a, b , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b \end{cases}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$, 在 \mathcal{D}' 意义下.



令

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(y) dy \rightarrow H(x)$$



注. 这里要证明的相等指的是广义相等! 即 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \langle f_1 - f_2, \varphi \rangle = 0$

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n'(x), \varphi(x) \rangle = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n(x) \varphi'(x) dx = (-1) \int (\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)) \varphi'(x) dx \\ &= (-1) \int H(x) \varphi'(x) dx = (-1) \langle H(x), \varphi'(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Lebesgue 控制收敛定理

故我们可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$.

习题 8.1.6. 若 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 在 Ω 上为 0, 则 f 在 Ω 上的任意开子集上均为 0. 反之, 若 Ω 有一开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 则对 $\forall \alpha$, 有 $f|_{U_\alpha} = 0$, 则可知 f 在 Ω 上为 0.



零延拓 + 单位分解

1. 已知 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \langle f, \varphi \rangle = 0$, u 是 Ω 的任一开子集. 对于 $\forall \psi \in C_0^\infty(u)$, 作零延拓,

$$\text{令 } \tilde{\psi} = \begin{cases} \psi(x) & x \in u \\ 0 & x \in \Omega - u \end{cases}, \text{ 有 } \tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega) \text{ 则 } \langle f, \psi \rangle|_u = \langle f, \tilde{\psi} \rangle|_\Omega = 0$$

2. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 记 $K = \text{supp} \varphi$ 则 K 为紧集, 由 $K \subseteq \Omega$ 可知 $\{U_\alpha\}$ 是 K 的开覆盖, 从而必定有有限子覆盖: $\{U_k\}_{k=1}^n$

作从属于 $\{U_k\}$ 的单位分解: ψ_1, \dots, ψ_n 则: $\varphi = \varphi \cdot 1 = \varphi \sum_{k=1}^n \psi_k = \sum_{k=1}^n \varphi \cdot \psi_k$, 其中 $\varphi \cdot \psi_k \in C_0^\infty(\Omega), \text{supp} \varphi \cdot \psi_k \subseteq \text{supp}(\psi_k) \subseteq U_k$.

此时 $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \sum_{k=1}^n \varphi \cdot \psi_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi \cdot \psi_k \rangle = 0$.

习题 8.1.7.

1. 写出磨光核 $\varphi_\varepsilon(x)$ 的定义

2. 证明:

$$\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{在 } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ 中}$$

 展开验证即可:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) d(\varepsilon y) = \frac{1}{c\varepsilon^n} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) \varepsilon^n d(y) = \frac{1}{c} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) d(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \varphi_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{c} \int g(y) \varphi(\varepsilon y) d(y) = \frac{1}{c} \int g(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\varepsilon y) d(y) \\ &= \frac{1}{c} \int g(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\varepsilon y) d(y) = \frac{1}{c} \varphi(0) \int g(y) d(y) = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Lebesgue 控制收敛定理 \uparrow

习题 8.1.8. 证明 $\delta * f = f$

1. $f \in C(\mathbb{R}^n)$

2. $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$



1. 普通连续函数直接证明普通相等即可:

$$\delta * f = f(x), \quad (\delta * f)(x) = \langle \delta(y), f(x-y) \rangle = f(x)$$

2. 广义函数证明广义相等:

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \Rightarrow \delta * f = f$$

习题 8.1.9. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 其中至少有两个具有紧支集, 证明:

1. $(f * g) * h = f * (g * h)$

2. $\partial^\alpha (f * g) = \partial^{\alpha_1} f * \partial^{\alpha_2} g$, 其中 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$



1. 展开证明相等即可:

$$\langle (f * g) * h, \varphi \rangle = \langle (f * g)(x), \langle h(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f(x), \langle g(z), \langle h(y), \varphi(x+z+y) \rangle \rangle \rangle$$

$$\langle f * (g * h), \varphi \rangle = \langle f(x), \langle (g * h)(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f(x), \langle g(z), \langle h(z), \varphi(x+z+y) \rangle \rangle \rangle$$

2. 展开证明相等即可:

$$\begin{aligned}\langle \partial_x^\alpha (f * g)(x), \varphi(x) \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle (f * g)(x), \partial_x^\alpha \varphi(x) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ \langle \partial_x^{\alpha_1} f * \partial_y^{\alpha_2} g(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \partial_x^{\alpha_1} f(x), \langle \partial_y^{\alpha_2} g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|} \langle f(x), \langle \partial_y^{\alpha_2} g(y), \partial_x^{\alpha_1} \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1|+|\alpha_2|} \langle f(x), \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle\end{aligned}$$

习题 8.1.10. 证明:

1. 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成立, 则

$$\widehat{D^\alpha f} = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

2. 若 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 成立, 则

$$\widehat{D^\alpha f} = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

其中 $D_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}$, $(-D_x)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} = \xi^\alpha e^{-ix \cdot \xi}$

1.

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \mathcal{F}(\varphi) &= \xi^\alpha \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \int \xi^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \int (-D_x)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \cdot \varphi(x) dx \quad (\text{在无穷远处等同于 } 0, \text{ 边界项消失}) \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (D_x^\alpha \varphi)(x) dx + 0 \\ &= \mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi) \\ (-D_\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi) &= (-D_\xi)^\alpha \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-D_\xi)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (x^\alpha \varphi(x)) dx \\ &= \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)\end{aligned}$$

2. 对 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\langle \widehat{D^\alpha f}, \varphi \rangle &= \langle D^\alpha f, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\xi^\alpha \varphi(\xi)) \rangle = \langle \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle \\ \langle \widehat{x^\alpha f}, \varphi(\xi) \rangle &= \langle x^\alpha f, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, x^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{D_\xi^\alpha \varphi(\xi)} \rangle = \langle \hat{f}(\xi), D_\xi^\alpha \varphi(\xi) \rangle = \langle (-D_\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle\end{aligned}$$

习题 8.1.11. 设 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

1. $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$
2. $\widehat{f \cdot g} = (2\pi)^{-n}(\hat{f} * \hat{g})$



1. 定义 + Fubini 定理

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f * g) &= \int e^{-ix \cdot \xi} (f * g)(x) dx \\
 &= \int e^{-ix \cdot \xi} dx \int f(y) g(x - y) dy \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int f(y) dy \int e^{-ix \cdot \xi} g(x - y) dx \\
 &= \int f(y) dy \int e^{-i(x - y + y) \cdot \xi} g(x - y) dx \\
 &= \int f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy \int e^{-i(x - y) \cdot \xi} g(x - y) dx \\
 &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)
 \end{aligned}$$

2. 逆变换的定义:

$$\begin{aligned}
 \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) g(x) dx &= \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \cdot \int (2\pi)^{-n} e^{ix \cdot \eta} \hat{g}(\eta) d\eta \\
 &= (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\eta) d\eta \cdot \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) e^{ix \cdot \eta} dx \\
 &= (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\eta) d\eta \cdot \int e^{-ix \cdot (\xi - \eta)} f(x) dx \\
 &= (2\pi)^{-n} (\hat{f} * \hat{g})(\xi)
 \end{aligned}$$

习题 8.1.12. 求 $P = \frac{d}{dx} + a, a \in \mathbb{R}$ 的基本解.



先解齐次的, 再利用常数变易法, 最后再对 a 是否大于 0 进行讨论, 最后的结果:

$$y(x) = [H(x) + C]e^{-ax}$$

$$E(x) = \begin{cases} H(x)e^{-ax}, & a > 0 \\ -H(-x)e^{-ax}, & a < 0 \end{cases} = \frac{a}{|a|} H\left(\frac{a}{|a|}x\right) e^{-ax}$$

习题 8.1.13. 求 Δ 算子的基本解.



1. 先验证

$$\Delta E(r) = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE}{dr}$$

换元令 $W(r) = \frac{dE(r)}{dr}$ 代入可得 $\frac{d}{dr}(r^{n-1}W(r)) = 0 \Rightarrow W(r) = \frac{C}{r^{n-1}} \Rightarrow \frac{dE(r)}{dr} = \frac{C}{r^{n-1}}$
故可得:

$$E(r) = \begin{cases} C_n r^{2-n}, & n \geq 3 \\ C_2 \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases}$$

2. 一般来说是证明 $n = 3$:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle \Delta E(x), \varphi(x) \rangle = \langle E(x), \Delta \varphi(x) \rangle \\ &= C_3 \left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi(x) \right\rangle = C_3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx \end{aligned}$$

3. 由位势积分公式:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx$$

取 $u = \varphi$, $Q = 0$. 由于 $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$, 在边界 $\partial\Omega$ 上 φ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 都为零, 可得:

$$\varphi(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(x) dx$$

比较可得 $C_3 = -\frac{1}{4\pi}$, 即:

$$E(r) = -\frac{1}{4\pi r}$$

习题 8.1.14. 设 u 在 Ω 内调和, $B_R(Q) \subset \Omega, \Omega \in \mathbb{R}^3$, 证明 u 满足球面的平均值公式和球体平均值公式.



1. 利用位势积分公式, 可得:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u ds$$

由格林第二公式可得

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

进而可得:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u ds$$

2. 我们只需在球面平均值公式上求积分 (两边乘以 $4\pi r^2$ 并对 r 从 0 到 R 积分):

$$\frac{4}{3}\pi R^3 u(Q) = \int_0^R 4\pi r^2 u(Q) dr = \iiint_{B_R(Q)} u(P) dV_P \Rightarrow u(Q) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_{B_R(Q)} u(P) dV_P$$

习题 8.1.15. 利用 Green 函数表示:

$$(P) \begin{cases} \Delta u = f, \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的解.

拆成:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

两个小方程的处理方法都是构造:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r(p, Q)} = -\Gamma(p, Q) \end{cases}$$

再代入位势积分公式、格林第二公式可得:

$$\begin{cases} u_1(Q) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot u dS_p = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot g(p) dS_p \\ u_2(Q) = \int_{\Omega} G(p, Q) \Delta u dx = \int_{\Omega} G(p, Q) \cdot f(p) dx \end{cases}$$

最终有:

$$u = u_1 + u_2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} \cdot g(p) dS_p + \int_{\Omega} G(p, Q) \cdot f(p) dx$$

习题 8.1.16. 证明 Green 函数的性质:

$$G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1)$$

$B_1 = B_\epsilon(Q_1)$, $B_2 = B_\epsilon(Q_2)$, 记 $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus (B_\epsilon(Q_1) \cup B_\epsilon(Q_2))$, 则在 Ω_ϵ 中, $G(p, Q_1)$ 和 $G(p, Q_2)$ 均是调和函数. 由格林第二公式有:

$$0 = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[G(p, Q_1) \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} - G(p, Q_2) \frac{\partial G(p, Q_1)}{\partial n} \right] dS_p = \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_1} + \int_{\partial B_2} = \int_{\partial B_1} + \int_{\partial B_2} = I_1 + I_2$$

在 I_1 中:

$$\left| \int_{\partial B_1} G(p, Q_1) \frac{\partial G(p, Q_2)}{\partial n} dS_p \right| \leq C_2 \left(C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-2}} + C_1 \right) \int_{\partial B_1} dS_p = S_n \cdot \epsilon^{n-1} \cdot C_2 \left(C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-2}} + C_1 \right) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} -G(p, Q_2) \frac{\partial G(p, Q_1)}{\partial n} dS_p &= \int_{\partial B_1} G(p, Q_2) \left(\frac{\partial}{\partial r} \Gamma(p, Q_1) + \frac{\partial V}{\partial r} \right) dS_p \\ &= G(p^*, Q_2) \cdot (n-2) C_n \cdot \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \cdot S_n \cdot \epsilon^{n-1} + \left(G \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right) (\tilde{p}, Q_1) \cdot S_n \cdot \epsilon^{n-1} \\ &\rightarrow (n-2) C_n \cdot S_n \cdot G(Q_1, Q_2) \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

故有:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 = (n-2) S_n \cdot C_n \cdot G(Q_1, Q_2)$$

完全同理可得:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = -(n-2)S_n \cdot C_n \cdot G(Q_2, Q_1)$$

由 $I_1 + I_2 = 0$, 得到:

$$(n-2)S_n \cdot C_n \cdot [G(Q_1, Q_2) - G(Q_2, Q_1)] = 0 \Rightarrow G(Q_1, Q_2) = G(Q_2, Q_1)$$

习题 8.1.17. 设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 开区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 证明位势积分公式.

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \Gamma(p, Q)}{\partial n} - \Gamma(p, Q) \frac{\partial u}{\partial n} dS_p + \int_{\Omega} \Gamma(p, Q) \cdot \Delta u dx$$

其中 $\Gamma(p, Q) = C_n \frac{1}{r^{n-2}}$.

 令 $v = -\Gamma(P, Q)$, 取 $\Omega_\epsilon = \Omega - B_\epsilon(Q)$, 则 $\Delta v|_{\Omega_\epsilon} = 0$, 代入格林第二公式:

$$\int_{\Omega_\epsilon} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\epsilon}$$

 注. 在 ∂B_ϵ 上有 $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ 和 $r = \epsilon$.

代入后再用积分中值定理令 $\epsilon \rightarrow 0$ 可得

$$\int_{\partial B_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \rightarrow -(n-2)C_n u(Q) S_n = u(Q)$$

带回格林第二公式的那个式子即得位势积分公式.

习题 8.1.18. 设 $n = 3$, $G(P, Q)$ 为 Green 函数, 则:

$$1. 0 < -G(P, Q) < \frac{1}{r(P, Q)}, P \neq Q$$

$$2. \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_P = 1$$



1. 由极值原理:

$$\min_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(p, Q)} \leq \nu \leq \max_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(p, Q)}$$

当 $p \rightarrow Q$ 时, $-G(p, Q) \rightarrow \infty$.

存在 $\delta > 0$, 在边界 $\partial B_\delta(Q)$ 上有: $-G(p, Q)|_{\partial B_\delta(Q)} > 0$ 考虑函数 $-G(p, Q)$, 它满足:

$$\begin{cases} \Delta(-G(p, Q)) = 0, & p \in \Omega \setminus B_\delta(Q) \\ -G(p, Q)|_{\partial\Omega} = 0 \\ -G(p, Q)|_{\partial B_\delta(Q)} > 0 \end{cases}$$

由极值原理可知: $-G(p, Q) > 0, \forall p \in \Omega \setminus B_\delta(Q)$

另一方面:

$$\begin{aligned} -G(p, Q) &= \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \nu(p, Q) \leq \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \min_{\partial\Omega} \nu(p, Q) \\ &= \frac{1}{4\pi r(p, Q)} - \min_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r(p, Q)} < \frac{1}{4\pi r(p, Q)} < \frac{1}{r(p, Q)} \end{aligned}$$

$$2. \text{ 取 } u = 1 \text{ 有 } \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} \text{ 故可得: } 1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} dS_p$$

习题 8.1.19. 证明一般的 *Hamack* 不等式:

设 $u \geq 0$ 在 Ω 中调和, $K \subset \subset \Omega$ 中的连通紧子集, 证明:

$$\sup_K u \leq c \cdot \inf_K u, C = C(n, K, \Omega)$$

 先证明: 设 u 在 Ω 中非负调和, $B_{4R} \subset \Omega$, 则

$$\sup_{B_R} u \leq 3^n \inf_{B_R} u$$

取 $p_1, p_2 \in B_R$, 由平均值公式:

$$u(p_1) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(p_1)} u dV, \quad u(p_2) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(p_2)} u dV$$

由几何关系: $B_R(p_1) \subset B_{3R}(p_2) \subset B_{4R}$, 并且: $|B_{3R}| = 3^n |B_R|$ 由于 u 非负调和, 则:

$$\int_{B_R(p_1)} u dV \leq \int_{B_{3R}(p_2)} u dV \leq 3^n \int_{B_R(p_2)} u dV \Rightarrow u(p_1) \cdot |B_R| \leq 3^n u(p_2) \cdot |B_R|$$

由 p_1, p_2 的任意性可知:

$$\sup_{B_R} u(p) \leq 3^n \inf_{B_R} u(p)$$

回到原题:

由于 K 是紧集, 则是全有界的, 即存在有限个点 $\{p_1, \dots, p_N\} \subset K$, 使得 $K \subset \bigcup_{n=1}^N B_R(p_n)$
对任意 $p_\alpha, p_\beta \in K$, 设 $p_\alpha \in B_R(p_{i_1}), p_\beta \in B_R(p_{i_2})$, 则存在有限个点 p_{j_1}, \dots, p_{j_m} , 使得

$$B_R(p_{j_1}) \cap B_R(p_{i_1}) \neq \emptyset, \quad B_R(p_{j_2}) \cap B_R(p_{j_1}) \neq \emptyset, \quad \dots, \quad B_R(p_{i_2}) \cap B_R(p_{j_m}) \neq \emptyset$$

由上一个命题反复迭代, 可知存在常数 C 使得: $u(p_\alpha) \leq C u(p_\beta)$

由 p_α, p_β 的任意性可知: $\sup_K u(p) \leq C \inf_K u(p)$

习题 8.1.20. 证明 $n = 3$ 调和函数的可去奇点定理.

设 $u(x)$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中调和, 且在 A 点附近满足

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x-A|}\right) \quad \text{当 } x \rightarrow A$$

则我们可以通过补充定义 u 在 A 点的值, 使得 u 在整个 $B_R(A)$ 中调和。

 取固定半径 R 使得 $B_R(A) \subset \Omega$, 对任意 $\delta < R$, 考虑球环区域 $B_R(A) \setminus B_\delta(A)$ 。令:

$$V_C(x) = C \left(\frac{1}{|x-A|} - \frac{1}{R} \right)$$

我们直接构造 u_1 为如下边值问题的解:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in B_R(A) \\ u_1|_{\partial B_R(A)} = u|_{\partial B_R(A)} \end{cases}$$

 注. 实际上 u_1 就是 u 补充上 $u(A)$ 的值, 那我们只需证明 u_1 和 u 在非 A 处均相等即可。

令 $w = u_1 - u$, 则 w 满足:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_\delta(A) \\ w|_{\partial B_R(A)} = u_1|_{\partial B_R(A)} - u|_{\partial B_R(A)} = 0 \end{cases}$$

由条件 $\lim_{x \rightarrow A} \frac{u(x)}{1/|x-A|} = 0$, 以及 u_1 在 A 点附近有界, 对任意固定的 $C > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|x - A| = \delta_0$ 时, 有: $|w(x)| \leq V_C(x)$

对于剩余区域 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$, 我们对 $w - V_c$ 和 $w + V_c$ 分别用极值原理也可得 $|w(x)| \leq V_C(x)$

再令 $C \rightarrow 0$ 我们可得: w 在 $B_R(A) - \{A\}$ 处均为 0, 即 u_1 和 u 在非 A 处均相等。

习题 8.1.21. 求热传导算子 $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$ 的基本解。

 先做 Fourier 变换化简可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = \delta(t) \Rightarrow \hat{E}(\xi, t) = H(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

 注. 其中 $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[\Delta E(x, t)] = -|\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)$

再由 Fourier 逆变换和高斯积分公式可得:

$$E(x, t) = (2\pi)^{-n} H(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 t |\xi|^2 + ix \cdot \xi} d\xi = H(t) \cdot (4\pi a^2 t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$$

 注. 其中

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-A|\xi|^2 + ix \cdot \xi} d\xi = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4A}}$$

可以用 Fourier 变换: $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ 来解释。

习题 8.1.22. 用两种方法求 Cauchy 问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$


 利用叠加原理, 分解为两个方程:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

1. 对 x 进行 Fourier 变换, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, t)|_{t=0} = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

对 $\hat{u}(\xi, t)$ 进行 Fourier 逆变换 $u(x, t) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi) \exp(-a^2 |\xi|^2 t))$

 注. 由卷积定理: $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$, 则 $f * g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g})$.

令 $\hat{f}_1 = \exp(-a^2|\xi|^2 t)$, $\hat{f}_2 = \hat{\varphi}(\xi)$, 代入可得:

$$f_1(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\exp(-a^2|\xi|^2 t)) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-a^2|\xi|^2 t} d\xi = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x) * f_1(x, t) = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy \\ &= H(t) \cdot (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy = \boxed{E(x, t) * \varphi(x)} \end{aligned}$$

2. 由 Duhamel 原理我们可知: 设 $U(x, t, \tau)$ 是方程

$$(P_3) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \Delta U = 0, & t > \tau \\ U(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau$$

是方程 P_2 的解. 结合 P_1 的求解过程我们可知


$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \left[(4\pi(t-\tau)a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \right] d\tau = \boxed{E(x, t) * (H(t)f(x, t))} \end{aligned}$$

习题 8.1.23. 设 $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, 证明在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中

$$\langle \delta(t, x), f(x) \rangle_x = f(0)\delta(t)$$

 对 $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned} \langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \rangle, \phi(t) &\rightarrow \langle \langle \delta(t, x), f(x) \rangle, \phi(t) \rangle \\ &= \int \phi(t) dt \int \delta_\varepsilon(t, x) f(x) dx = \int \int \phi(t) \delta_\varepsilon(t, x) f(x) dx dt \\ &= \langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \phi(t) \rangle \rightarrow \langle \delta(t, x), f(x) \phi(t) \rangle \\ &= f(0)\phi(0) = f(0)\langle \delta(t), \phi(t) \rangle = \langle f(0)\delta(t), \phi(t) \rangle \end{aligned}$$

 注. 这里我们不能直接用内积的性质, 而是应该对 $\delta(x, t)$ 正则化: 即使用光滑函数逼近, 我们将其磨光, 设 $\delta_\varepsilon(t, x) = \delta_\varepsilon(t)\delta_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

习题 8.1.24. 证明 Duhamel 原理: 设 $w(x, t; \tau)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = 0 \\ w|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

令 $u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau$, 则 $u(x, t)$ 为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解.

 这没啥好说的吧, 代入验证即可...

习题 8.1.25. 用分离变量法求

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x \end{cases}$$

 分离变量, 求出特征函数, 常数变易, 再利用 SL 特征函数系的性质来确定系数: 对任意 $k \neq m$, 有


$$\int_0^L X_k(x) \cdot X_m(x) dx = 0$$

最终可得:

$$u(x, t) = e^{-a^2 t} \sin x$$

习题 8.1.26. 求初边值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x(l-x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = l \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{x} \end{cases}$$

 令 $w = u - v$ 其中 $v(x, t) = x$ 化为零边值问题, 用叠加原理拆成两个方程, 对于齐次方程我们采用跟上面一题相同的做法: 分离变量、求出特征函数系, 然后我们进行常数变易 (当然也可以求解第二个方程, 利用 *Duhamel* 原理), 将求的解代入原方程方程, 再利用正交性求出系数即可。可得最终解为:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right)$$

其中

$$\begin{aligned} w_k(t) &= \left[b_k + \int_0^t a_k \exp \left(a^2 \cdot \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} \right)^2 s \right) ds \right] \exp \left(-a^2 \cdot \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} \right)^2 t \right) \\ a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right) dx \\ b_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) - x \right) \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right) dx \end{aligned}$$

 注. 对于一般的热传导方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

构造 $v(x, t)$ 使得

$$\begin{cases} v(0, t) = \mu_1(t) \\ v(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

我们取 $v(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, 令 $\bar{u} = u - v$ 满足


$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = f(x, t) - \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) := \bar{f}(x, t) \\ \bar{u}(0, t) = \bar{u}(l, t) = 0 \\ \bar{u}(x, 0) = \varphi(x) - v(x, 0) := \bar{\varphi}(x) \end{cases}$$

即得到零边值条件问题.

习题 8.1.27. 叙述并证明热传导方程关于抛物边界的极值原理.

设 $u(x, t)$ 在区域 $R_T = \{\alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq t \leq T\}$ 上满足齐次热传导方程 $\partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = 0$, 则 $u(x, t)$ 在 R_T 上的最大值和最小值必在抛物边界 Γ_T 上取得, 即:

$$\max_{\Gamma_T} u(x, t) = \max_{R_T} u(x, t), \quad \min_{\Gamma_T} u(x, t) = \min_{R_T} u(x, t)$$

 $M = \max_{R_T} u(x, t)$, $m = \max_{\Gamma_T} u(x, t)$, 显然 $M \geq m$, 我们只需证明 $M \leq m$.

考虑构造辅助函数

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2} (x - x^*)^2$$

有 $v(x, t)$ 在 R_T 内部某点 (x_1, t_1) 取得最大值. 进而有:

$$\partial_{xx} v(x_1, t_1) \leq 0, \quad \partial_t v(x_1, t_1) \geq 0$$

可推出:

$$(\partial_t - a^2 \partial_{xx}) v(x_1, t_1) \geq 0$$

与

$$(\partial_t - a^2 \partial_{xx}) v = (\partial_t - a^2 \partial_{xx}) u - a^2 \cdot \frac{M - m}{2L^2} = -a^2 \cdot \frac{M - m}{2L^2} < 0$$

矛盾.

习题 8.1.28. 利用上面的极值原理证明

1. 初边值问题的唯一性、稳定性
2. Cauchy 问题的唯一性、稳定性 (♠)



1. 初边值问题的唯一性和稳定性显然。
2. 还需加上有界函数类这个条件: 存在常数 $B > 0$, 对 $\forall t \geq 0, x$, 满足 $|u(x, t)| < B$. 唯一性和稳定性的做法都是: 取任意给定点 (x_0, t_0) , $t_0 > 0$, 考虑区域 $R_0 = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$ 。

构造辅助函数:

$$v(x, t) = \frac{4B}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right)$$

利用上面的极值原理课可证明:

$$u \leq v \quad u \geq -v \Rightarrow |u(x, t)| \leq v = \frac{4B}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right)$$

在点 (x_0, t_0) 处:

$$|u(x_0, t_0)| \leq \frac{4Ba^2}{L^2} \cdot t_0$$

令 $L \rightarrow \infty$, 则 $u(x_0, t_0) = 0$ 。由 (x_0, t_0) 的任意性, $u(x, t) \equiv 0$, 即 $u_1 = u_2$ 。

习题 8.1.29. 弦振动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

 由叠加原理, 拆成:

$$(P1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \end{cases} \quad (P2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

1. 令 $\xi = x - at, \eta = x + at$, 可得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow u = F(\xi) + G(\eta) = F(x - at) + G(x + at)$$

由初始条件我们有:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ -aF(x) + aG(x) = C + \int_{x_0}^x g(y) dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(y) dy + \frac{C}{2a} \\ G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(y) dy - \frac{C}{2a} \end{cases}$$

我们可得 (达朗贝尔公式)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy$$

2. 定义辅助函数 $U(x, t, \tau)$ 为如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, t > \tau \\ U(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

由齐次化原理我们可得 (P2) 的解为:

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau$$

再由达朗贝尔公式我们可得

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

两个相加即为我们最终求解的 u :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy$$

习题 8.1.30. 弦振动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

 先化为零边值问题: 令

$$v(x, t) = \frac{1}{L} [(L-x)\mu_1(t) + x\mu_2(t)], \quad w = u - v$$

则有:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \bar{f}(x, t), t > 0 \\ w|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = \bar{\psi}(x) \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \end{cases}$$

利用叠加原理可以拆成两个方程:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = \bar{\psi}(x) \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \bar{f}(x, t), t > 0 \\ w|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \end{cases}$$

1. 分离变量法 + 利用特征函数系有

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$$

2. 齐次化原理 + 利用 (P1) 结果: 令 $W(x, t)$ 满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\ W|_{t=\tau} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=\tau} = \bar{f}(x, t) \\ W(0, t) = W(l, t) = 0 \end{cases}$$

则 $w = \int_0^t W(x, t, \tau) d\tau$ 为 (P_2) 的解, 我们只需利用 (P_1) 中求得的解的形式, 把解中的 t 换成 $t - \tau$ 即有:

$$W(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l}(t - \tau) + B_k \sin \frac{ak\pi}{l}(t - \tau) \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

系数的求法也还是特征函数系.

最后把两个解相加即为最终答案.

习题 8.1.31. 求 $n = 3$ 时 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a\Delta$ 的基本解

对两边同时进行 Fourier 变换 (对 x 进行):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \cdot \hat{E}(\xi, t) = \delta(t)$$

先考虑齐次方程可得基本解组:

$$\hat{E}_1(\xi, t) = \sin(a|\xi|t), \quad \hat{E}_2(\xi, t) = \cos(a|\xi|t)$$

考虑常数变易法: 设 $\hat{E}(\xi, t) = k_1(t)\hat{E}_1(\xi, t) + k_2(t)\hat{E}_2(\xi, t)$, 代入可得:

$$\begin{cases} k_1'(t) \sin(a|\xi|t) + k_2'(t) \cos(a|\xi|t) = 0 & \text{这是人为令为 } 0 \text{ 的} \\ k_1'(t)a|\xi| \cos(a|\xi|t) - k_2'(t)a|\xi| \sin(a|\xi|t) = \delta(t) \end{cases}$$

可得 $k_2'(t)a|\xi| = 0$, 所以 $k_2'(t) = 0$, 我们取 $k_2(t) = 0$, 代入原方程组可求得:

$$k_1'(t) = \frac{\delta(t)}{a|\xi| \cos(a|\xi|t)} = \frac{\delta(t)}{a|\xi|} \Rightarrow k_1(t) = \begin{cases} \frac{H(t)}{a|\xi|}, & t > 0 \\ \frac{-H(-t)}{a|\xi|}, & t < 0 \end{cases}$$

最终可得:

$$\hat{E}(\xi, t) = \begin{cases} \hat{E}_+(\xi, t) = \frac{H(t) \cdot \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t > 0 \\ \hat{E}_-(\xi, t) = \frac{-H(-t) \cdot \sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, & t < 0 \end{cases}$$

$n = 3$ 时: 考虑 Fourier 逆变换 ($t > 0$):

$$E_+(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \hat{E}_+(\xi, t) \frac{d\xi}{(2\pi)^3} = \frac{H(t)}{a} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(a|\xi|t)}{|\xi|} \frac{d\xi}{(2\pi)^3}$$

采用球坐标变换, 令 $\rho = |\xi|$, 并取 x 方向为极轴. 在球坐标系中, 体积元为 $d\xi = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} E_+(x, t) &= \frac{H(t)}{a(2\pi)^3} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta e^{i\rho|x| \cos \theta} \sin(a\rho t) \rho^2 \sin \theta \\ &= \frac{H(t)}{a(2\pi)^3} \int_0^\infty \rho \sin(a\rho t) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{i\rho|x| \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \dots = \frac{H(t)}{4\pi^2 a|x|} \int_0^\infty [\cos(\rho(at - |x|)) - \cos(\rho(at + |x|))] d\rho \end{aligned}$$

 注. 在 \mathcal{D}' 意义下有:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos(\alpha\rho) d\rho = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin(A\alpha)}{\alpha} = \pi\delta(\alpha)$$

应用此结果:

$$\begin{aligned} E_+(x, t) &= \frac{H(t)}{4\pi^2 a|x|} [\pi\delta(at - |x|) - \pi\delta(at + |x|)] \\ &= \frac{H(t)}{4\pi a|x|} [\delta(at - |x|) - \delta(at + |x|)] \end{aligned}$$

最终得到:

$$E_+(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t} \delta(at - |x|)$$

($t < 0$) 同理, 最终可得

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{H(t)\delta(at - |x|)}{4\pi a^2 t}, & t > 0 \\ -\frac{H(-t)\delta(at + |x|)}{4\pi a^2 t}, & t < 0 \end{cases}$$

习题 8.1.32. 证明

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, x^2 \leq (at)^2, t \geq 0 \\ 0, \text{ if not} \end{cases}$$

为 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a\Delta$ 的基本解.

 我们需要证明: 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\langle (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)E(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \langle \delta(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \varphi(0, 0).$$

我们有:

$$\begin{aligned} \langle (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)E(x, t), \varphi(x, t) \rangle &= \langle E(x, t), (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) \rangle \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} E(x, t) \cdot (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) dx dt = \frac{1}{2a} \iint_{a^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

令

$$y = x + at, \quad z = at - x,$$

换元可得:


$$\begin{aligned} &\frac{1}{2a} \iint_{a^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)\varphi(x, t) dx dt \\ &= \frac{1}{2a} \iint_{y \geq 0, z \geq 0} \left(4a \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} \right) \cdot \frac{1}{2a} dy dz = \iint_{y \geq 0, z \geq 0} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} dy dz. \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} dz \right] dy = \int_0^\infty \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \Big|_{z=0}^{z \rightarrow \infty} \right] dy \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}(y, 0) \right) dy \quad (\text{因为 } \varphi \text{ 紧支, 当 } z \rightarrow \infty \text{ 时导数为零}) = -[\tilde{\varphi}(y, 0)]_0^\infty = \tilde{\varphi}(0, 0) = \varphi(0, 0). \end{aligned}$$

得证!

习题 8.1.33. $n = 3$ 的波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = g_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g_1(x) \end{cases}$$

 考这个的话我真认了, tm 这个这么多真写得完吗???

 注. 定义 $\tilde{u}(x, t) = H(t)u(x, t)$, 则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) \tilde{u}(x, t) = F(x, t),$$

且

$$\tilde{u}(x, t) = E(x, t) * F(x, t),$$

代入有:

$$F(x, t) = H(t)f(x, t) + \delta'(t)u(x, t) + 2\delta(t)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

在广义函数意义下有:

$$\delta'(t)u(x, t) = -\delta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u(x, t)) \Rightarrow F(x, t) = H(t)f(x, t) + \delta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u(x, t))$$

同时在广义函数意义下也有:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta(t)u) = \partial_t(\delta(t)g_0(x)) \quad \delta(t)\frac{\partial u}{\partial t} = g_1(x)\delta(t)$$

因此得到:

$$F(x, t) = H(t)f(x, t) + \partial_t(g_0(x)\delta(t)) + g_1(x)\delta(t).$$

则

$$\tilde{u}(x, t) = E(x, t) * F(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= E(x, t) * (H(t)f(x, t)), \\ I_2 &= E(x, t) * [\partial_t(g_0(x)\delta(t))], \\ I_3 &= E(x, t) * (g_1(x)\delta(t)). \end{aligned}$$

 注. 这里的展开步骤谁爱写谁写吧。。。

最后的结果为:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t)|_{t>0} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y|\leq at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy + \frac{\partial}{\partial t} [t \cdot M\{g_0\}] + t \cdot M\{g_1\}.$$

习题 8.1.34. 用降维法求解 $n = 2$ 齐次波动方程的 Cauchy 问题 $f = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t), & x = (x_1, x_2) \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

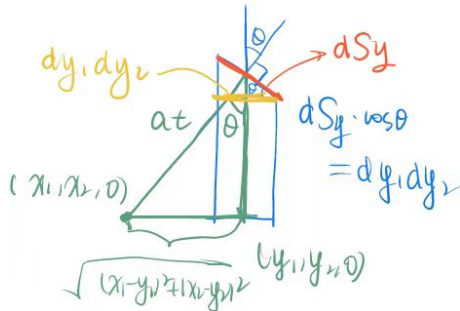
由上一题的结论, 我们有:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) + t M_{at}^{g_1}$$

注. 其中 M_{at}^g 表示函数 g 在以 $(x_1, x_2, 0)$ 为中心、半径为 at 的球面上的平均值。

先考虑第二项 $t M_{at}^{g_1}$ 。在三维空间中, 球面平均值为:

$$t M_{at}^{g_1} = \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} g_1(y_1, y_2) dS_y.$$



由于 g_1 不依赖于 y_3 , 可将球面积分化为平面上的二重积分。注意到球面微元 dS_y 在 $y_1 y_2$ 平面上的投影满足:

$$\cos \theta \cdot dS_y = dy_1 dy_2,$$

其中 θ 是球面法向量与 y_3 轴方向的夹角, 且

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}{at}.$$

于是,

$$\begin{aligned} t M_{at}^{g_1} &= \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \int_{|x-y|=at} \frac{g_1(y_1, y_2)}{\cos \theta} \cos \theta dS_y \\ &= \frac{t}{4\pi a^2 t^2} \cdot 2 \int_{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 \leq a^2 t^2} \frac{g_1(y_1, y_2)}{\cos \theta} dy_1 dy_2 \quad (\text{上下半球面的叠加}) \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{|x_1-y_1|^2 + (x_2-y_2)^2 \leq a^2 t^2} \frac{g_1(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

类似地, 第一项为:

$$\frac{\partial}{\partial t} (t M_{at}^{g_0}) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x_1-y_1|^2 + (x_2-y_2)^2 \leq a^2 t^2} \frac{g_0(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2.$$

两式相加, 即得到二维波动方程 Cauchy 问题的解:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-y| \leq at} \frac{g_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy + \int_{|x-y| \leq at} \frac{g_1(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right]$$

习题 8.1.35. 用能量方法证明 $n = 2$ 初边值问题的唯一性和稳定性。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u(x, y, t) = f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t > 0. \\ u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = g(x, y). \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

 我们定义波动方程的能量:

$$E(t) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy$$

1. (唯一性) 令 $u = u_1 - u_2$, 则

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

我们要证明总能量不变 $\frac{dE(t)}{dt} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy \\ &= \int_{\Omega} [2u_t u_{tt} + 2a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})] dx dy. \end{aligned}$$

 注. 由分部积分公式:

$$u_x u_{xt} = \partial_x(u_x u_t) - u_{xx} u_t,$$

$$u_y u_{yt} = \partial_y(u_y u_t) - u_{yy} u_t.$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_{\Omega} [2u_t u_{tt} + 2a^2(\partial_x(u_x u_t) - u_{xx} u_t + \partial_y(u_y u_t) - u_{yy} u_t)] dx dy \\ &= \int_{\Omega} 2u_t (u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})) dx dy + 2a^2 \int_{\Omega} (\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)) dx dy. \end{aligned}$$

 注. 第一项为零. 对第二项应用散度定理:

$$\int_{\Omega} (\partial_x(u_x u_t) + \partial_y(u_y u_t)) dx dy = \int_{\partial\Omega} (u_x u_t \cos(\alpha, \vec{n}) + u_y u_t \cos(\gamma, \vec{n})) dS = 0$$

故

$$E(t) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = E(0) = 0 \Rightarrow u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) = 0 \Rightarrow u_t = u_x = u_y = 0.$$

从而 $u_1(x, y, t) \equiv u_2(x, y, t)$, 唯一性得证。

2. (稳定性)

(a) 与唯一性的证明类似, 只不过此时有: $f(x, y, t) \neq 0$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = 2 \int_{\Omega} u_t \cdot f dx dy$$

由不等式 $2u_t f \leq u_t^2 + f^2$ 可得:

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq E(t) + \int_{\Omega} f^2 dx dy.$$

左右两式乘上 e^{-t} 并积分可得:

$$E(t) \leq e^t \left[E(0) + \int_0^t e^{-\tau} d\tau \cdot \int_{\Omega} f^2 dx dy \right], \quad t \in [0, T].$$

由于 $t \in [0, T]$, 则 $e^t \leq e^T$, $e^{-\tau} \leq 1$, 代入得:

$$E(t) \leq C_0 \left[E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \right].$$

(b) 定义 $E_0(t) = \int_{\Omega} u^2(x, y, t) dx dy$, 有

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2(x, y, t) dx dy = 2 \int_{\Omega} u \cdot u_t dx dy \\ &\leq \int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} u_t^2 dx dy \leq E_0(t) + E(t). \end{aligned}$$

解得:

$$E_0(t) \leq e^t \left[E_0(0) + \int_0^t e^{-\tau} E(\tau) d\tau \right] \leq C_1 [E_0(0) + E(t)].$$

将 $E(t)$ 的估计代入:

$$E_0(t) \leq \tilde{C} \left[E_0(0) + E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \right].$$

若 u_1, u_2 分别满足以下方程:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u_i(x, y, t) = f_i(x, y, t), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u_i(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_i(x, y), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = g_i(x, y), & (i = 1, 2), \\ u_i|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a^2(\partial_x^2 + \partial_y^2))u(x, y, t) = f_1 - f_2, \\ u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_1 - \varphi_2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{t=0} = g_1 - g_2, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

其中初始数据和外力扰动满足:

$$\begin{cases} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, & \|\varphi_{1x} - \varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, & \|\varphi_{1y} - \varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, \\ \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta, \\ \|f_1 - f_2\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq \eta. \end{cases}$$

那么:

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}^2 &= \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 dx dy = \int_{\Omega} u^2 dx dy = E_0(t) \\ &\leq \tilde{C} \left[E_0(0) + E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, y, \tau) dx dy d\tau \right]\end{aligned}$$

剩余部分代入验证即可

习题 8.1.36. 用能量方法证明 $n = 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的唯一性和稳定性。



$$\begin{aligned}\Omega_t &= \{(x, t) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2(t_0 - t)^2\} \\ \Omega_0 &= \{(x, t) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t_0^2\}\end{aligned}$$

我们要证明:

$$E_1(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dx dy \leq E_1(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

只要证明: 在 $0 \leq t \leq t_0$ 时:

$$\frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \leq 0$$

注. 这里有点奇怪, 为什么不直接不等式就能说明??

vrv 讲的直接研究导数然后具体的计算也是分部积分 + 散度定理: 其中

$$\begin{aligned}& u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2) - 2au_x u_t \cos(n, x) - 2au_y u_t \cos(n, y) \\ &= u_t^2 \cos^2(n, x) + u_t^2 \cos^2(n, y) + a^2(u_x^2 + u_y^2) - 2au_x u_t \cos(n, x) - 2au_y u_t \cos(n, y) \\ &= (u_t \cos(n, x) - au_x)^2 + (u_t \cos(n, y) - au_y)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{dE_1(\Omega_t)}{dt} \leq 0 \\ &\Rightarrow E_1(\Omega_t) \leq E_1(\Omega_0)\end{aligned}$$

1. (唯一性) 令 $u = u_1 - u_2$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$E_1(\Omega_t) \leq E_1(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)|_{t=0} dx dy = 0$$

可知: $u_t = u_x = u_y = 0 \Rightarrow u \equiv \text{const} = 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$

2. (稳定性) 定义

$$E_0(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} u^2 dx dy$$

先求导后积分可证明：在 $t \in [0, t_0]$ 上有：

$$E_0(\Omega_t) \leq c(E_1(\Omega_0) + E_0(\Omega_0))$$

之后跟上题一样代入求解即可。

8.2 作业

8.2.1 作业 1

问题 (1). 对 $n > 1$ 时, $H(x) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{if not} \end{cases}$, 则:

$$\frac{\partial^n H(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x)$$

Proof. 我们用 $h(x)$ 来表示一维的 Heaviside 函数, 则

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{if not} \end{cases} = h(x_1)h(x_2) \dots h(x_n)$$

同时, 对于一维的 Heaviside 函数我们有

$$\frac{d}{dx_i} h(x_i) = \delta(x_i)$$

故

$$\frac{\partial^n H(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x_1)\delta(x_2) \dots \delta(x_n) = \delta(x)$$

事实上, 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 广义函数的微分运算, 我们有:

$$\left\langle \frac{\partial^n H}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle H, \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right\rangle = (-1)^n \int_{[0, \infty)^n} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

这是由 φ 有紧支集所保证的. □

问题 (2). 设 $a(x) \in C^\infty(\Omega), u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 证明:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(au) = a \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial x_i} u$$

Proof. 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 由广义函数的微分运算, 我们有:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(au), \varphi \right\rangle = - \left\langle au, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

由广义函数的乘子运算, 我们有:

$$\left\langle au, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle u, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

由于 $a, \varphi \in C^\infty(\Omega)$, 故由微分法则可知:

$$\frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_i} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

故我们有:

$$\left\langle u, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_i} - \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle u, \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, a\varphi \right\rangle - \left\langle u, \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i} \right\rangle$$

我们将其带回最初式子有:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(au), \varphi \right\rangle = - \left\langle au, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, a\varphi \right\rangle + \left\langle u, \varphi \frac{\partial a}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle a \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a}{\partial x_i} u, \varphi \right\rangle = \left\langle a \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial x_i} u, \varphi \right\rangle$$

故由广义相等我们可知:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(au) = a \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial x_i} u$$

□

问题 (3). 若广义函数 u 适合 $\check{u} = u$ ($\check{\check{u}} = -u$), 则称 u 为偶 (奇) 广义函数. 证明:

- (1) $\delta(x)$ 与常值函数 c 皆为偶广义函数.
- (2) 偶广义函数之微商是奇广义函数.
- (3) 任一广义函数 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 皆可唯一地分解为一个偶广义函数与一个奇广义函数之和如下:

$$u(x) = \frac{1}{2}(u(x) + \check{u}(x)) + \frac{1}{2}(u(x) - \check{u}(x)).$$

- (4) $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 为偶广义函数当且仅当对任一奇的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 均有 $\langle u, \varphi \rangle = 0$.



Proof. 对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

- (1) ① 我们有 $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, $\langle \check{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \check{\varphi} \rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow \delta(x) = \check{\delta}(x)$
即 $\delta(x)$ 为偶广义函数;
- ② 我们有 $\langle \check{c}, \varphi \rangle = \langle c, \check{\varphi} \rangle = c \int \check{\varphi}(x) dx = c \int \varphi(-x) dx = c \int \varphi(x) dx = \langle c, \varphi \rangle \Rightarrow c = \check{c}$ 即常值函数 c 为偶广义函数.

- (2) 设 u 为偶广义函数满足 $u = \check{u}$, 则:

$$\left\langle \left(\frac{\partial \check{u}}{\partial x_i} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \check{\varphi} \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial (-\varphi)}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \varphi \right\rangle$$

故由广义相等我们可知:

$$\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial x_i} \right) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

即为奇广义函数.

- (3) 令 $u_1 = \frac{1}{2}(u + \check{u})$, $u_2 = \frac{1}{2}(u - \check{u})$. 其中: $\check{u}_1 = \frac{1}{2}(\check{u} + u) = u_1$ 是偶广义函数; $u_2 \check{u}_2 = \frac{1}{2}(\check{u} - u) = -u_2$ 是奇广义函数. 故:

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{2}(u + \check{u}) + \frac{1}{2}(u - \check{u}) = u$$

下面我们来证明分解的**唯一性**: 若 $u = u'_1 + u'_2$, 其中 u'_1 是偶广义函数, u'_2 是奇广义函数, 则 $\check{u} = u'_1 - u'_2$. 联立 $u = u'_1 + u'_2$ 与 $\check{u} = u'_1 - u'_2$, 解得 $u'_1 = \frac{1}{2}(u + \check{u})$, $u'_2 = \frac{1}{2}(u - \check{u})$, 故分解唯一.

- (4) (\Rightarrow) 若 u 是偶广义函数, 即 $\check{u} = u$. 对任一奇的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 有 $\check{\varphi} = -\varphi$. 则 $\langle u, \varphi \rangle = \langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle = \langle u, -\varphi \rangle = -\langle u, \varphi \rangle$, 故 $2\langle u, \varphi \rangle = 0$, 即 $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

(\Leftarrow) 若对任一奇的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle u, \varphi \rangle = 0$. 令 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (其中 φ_1 是偶函数, φ_2 是奇函数), 则 $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle + \langle u, \varphi_2 \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle$. 同时 $\langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle$, 故 $\langle u - \check{u}, \varphi \rangle = 0$ 对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 成立, 即 $u = \check{u}$, u 是偶广义函数.

□

问题 (4). 证明: 若 $f(x) = H(x) \cos x$, $g(x) = H(x) \sin x$, 则

$$f'(x) = \delta(x) - g(x), \quad g'(x) = f(x),$$

因此 g 与 f 分别适合微分方程

$$u'' + u = \delta \quad \text{与} \quad u'' + u = \delta'.$$



Proof. $f(x) = H(x) \cos x \Rightarrow f'(x) = H'(x) \cos x + H(x)(\cos x)'$. 已知 $H'(x) = \delta(x)$, $(\cos x)' = -\sin x$, 故 $f'(x) = \delta(x) \cos 0 - H(x) \sin x = \delta(x) - g(x)$.

$g(x) = H(x) \sin x$, 同理可得 $g'(x) = H'(x) \sin x + H(x)(\sin x)' = \delta(x) \sin 0 + H(x) \cos x = f(x)$.

对 $g(x)$, 求二阶导数 $g''(x) = f'(x) = \delta(x) - g(x)$, 整理得 $g'' + g = \delta$.

对 $f(x)$, 求二阶导数 $f''(x) = (f')' = (\delta(x) - g(x))' = \delta'(x) - g'(x) = \delta'(x) - f(x)$, 整理得 $f'' + f = \delta'$.

因此 g 与 f 分别适合微分方程 $u'' + u = \delta$ 与 $u'' + u = \delta'$.

□

8.2.2 作业 2

定理 (♠). 设有 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 适合:

(i) 对任意 $M > 0$, 当 $|a| < M, |b| < M$ 时

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq c,$$

c 只与 M 有关;

(ii) 固定 a 和 b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b. \end{cases}$$

则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x).$$



Proof. 令

$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi) d\xi.$$

由条件 (i), 在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n'(x), \varphi(x) \rangle = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n(x) \varphi'(x) dx = (-1) \int (\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)) \varphi'(x) dx \\ &= (-1) \int H(x) \varphi'(x) dx = (-1) \langle H(x), \varphi'(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Lebesgue 控制收敛定理

故我们可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$. □

问题 (1). 验证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x), \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$$



Proof. 对于 a, b , 我们有:

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx \stackrel{y=xn}{=} \int_{an}^{bn} \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{\pi} (\arctan nb - \arctan na) \quad (8.5)$$

(i)

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = 1 = c$$

- (ii) 若 a, b 同号, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan nb = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan na = \frac{\pi}{2}$, 则有 (8.5) = 0;
 若 a, b 异号, 不妨设 $a < 0 < b$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan nb = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan na = -\frac{\pi}{2}$, 则有 (8.5) = 1.

即有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b. \end{cases}$$

故由定理 (♠), 我们可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$$

□

问题 (2). 验证:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = \delta(x), \quad f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$



Proof. 这里我们令 $n = \frac{1}{t}$, 则定理 (♠) 仍然适用:

$$\int_a^b f_t(x) dx \stackrel{y = \frac{x}{2\sqrt{t}}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\frac{b}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy$$

(i)

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x) dx = 1$$

$f_t(x)$ 为正态分布 $N(0, 2t)$ 的概率密度函数, 故其在 \mathbb{R} 上的积分为 1

(ii) 结合

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr} = \sqrt{\pi}$$

故我们可知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b. \end{cases}$$

故由定理 (♠), 我们可知

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$$

□

问题 (3). 设 $f \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$, g 是一个 m 次多项式, 证明 $f * g$ 是一个至多 m 次多项式.
 $f * 1$ 等于什么?



Proof. (i) 设 $g = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, 其中 $a_n \neq 0$, 则:

$$\begin{aligned} g(x-y) &= \sum_{k=0}^m a_k (x-y)^k = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^m \left[\sum_{k=j}^m a_k \binom{k}{j} (-1)^j x^{k-j} \right] y^j = \sum_{j=0}^m P_j(x) y^j \end{aligned}$$

由定义, 我们可知:

$$f * g(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle = \langle f(y), \sum_{j=0}^m P_j(x)y^j \rangle = \sum_{j=0}^m P_j(x) \langle f(y), y^j \rangle$$

而 $P_j(x) = \sum_{k=j}^m c_k \binom{k}{j} (-1)^j x^{k-j}$ 为至多 m 次多项式, $\langle f(y), y^j \rangle$ 为常数 $\in \mathbb{C}$, 故我们可知 $f * g$ 是一个至多 m 次多项式.

(ii) 我们令 (i) 中的 $g(x) = 1$, 则由 (i) 的结论可知 $f * 1$ 为一个至多 0 次多项式, 即为常数 $\langle f(y), 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$, 故:

$$f * 1 = \langle f(y), 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$$

□

$$P_j(x) = \sum_{k=j}^m c_k \binom{k}{j} (-1)^j x^{k-j}$$

8.2.3 作业 3

问题 (1). 证明 e^{-x^2} 是 \mathcal{S} 函数.



证明. (i) $e^{-x^2} \in C^\infty$

我们对 e^{-x^2} 求导, 得到:

$$\frac{d(e^{-x^2})}{dx} = -2xe^{-x^2}, \quad \frac{d^2(e^{-x^2})}{dx^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

由求导的乘积法则我们可以知道:

$$\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} = P_n(x)e^{-x^2}, \quad \deg(P_n) = n$$

故 e^{-x^2} 的任意阶导数存在, 即 $e^{-x^2} \in C^\infty$.

(ii) 对 $\forall \alpha, \beta$ 有: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c(\alpha, \beta)$

由 (i) 我们可知 $D^\beta e^{-x^2} = P_\beta(x)e^{-x^2}$

$$\Rightarrow x^\alpha D^\beta e^{-x^2} = x^\alpha P_\beta(x)e^{-x^2} = P_{\beta+\alpha}(x)e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} p_k x^k e^{-x^2}$$

而对于 $x^k e^{-x^2}$, 我们可知:

$$\frac{d(x^k e^{-x^2})}{dx} = (kx^{k-1} - 2x^{k+1})e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{k}{2}} \Rightarrow |x^k e^{-x^2}| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^k e^{-\frac{k}{2}} = M_k.$$

则

$$|x^\alpha D^\beta e^{-x^2}| = \left| \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} p_k x^k e^{-x^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} |p_k x^k e^{-x^2}| \leq \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} M_k |p_k| = c(\alpha, \beta) < \infty$$

故

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c(\alpha, \beta)$$

综上所述可知: e^{-x^2} 是 \mathcal{S} 函数. □

问题 (2). 设 $P(\xi), Q(\xi)$ 皆为常系数多项式, 证明以下各个命题等价:

- (1) $\varphi(x) \in \mathcal{S}$;
- (2) 对任意 $P(\xi), Q(\xi), P(x)Q(D)\varphi \in \mathcal{S}$;
- (3) 对任意 $P(\xi), Q(\xi), Q(D)[P(x)\varphi(x)] \in \mathcal{S}$.



证明. 由于 $P(\xi), Q(\xi)$ 皆为常系数多项式, 故我们可设 $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$.

(I) (1) \Rightarrow (2)

首先由于 $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ 故 $\psi(x) = Q(D)\varphi(x) \in \mathcal{S}$, 进而有

$$|P(x)Q(D)\varphi(x)| = \left| \sum_{k=0}^m a_k x^k \psi(x) \right| = \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot |x^k \psi(x)|$$

而由于 $\psi(x) \in \mathcal{S}$, 故 $\exists m_k > 0$, 使得 $|x^k \psi(x)| < m_k$, 则

$$|P(x)Q(D)\varphi(x)| < \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot m_k < \infty$$

故 $P(x)Q(D)\varphi(x) \in \mathcal{S}$.

(II) (2) \Rightarrow (3)

我们对乘积 $P(x)\varphi$ 求导 $Q(D)$, 有:

$$Q(D)[P(x)\varphi] = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma P(x) \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi$$

其中 $Q(D) = \sum_{|\beta| \leq k} b_\beta D^\beta$, $\binom{\beta}{\gamma}$ 为组合系数, $D^\gamma P(x)$ 是 $P(x)$ 的 γ 阶导数 (仍为多项式).

对任意项 $D^\gamma P(x) \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi$, 令 $P_1(x) = D^\gamma P(x)$ 为多项式, $Q_1(D) = D^{\beta-\gamma}$; 则我们由 (2) 的条件, 可知: $P_1(x)Q_1(D)\varphi = D^\gamma P(x) \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi \in \mathcal{S}$.

(III) (3) \Rightarrow (1)

取 $P(x) = 1$, $Q(D) = D^\beta$. 我们由 (3) 的条件, $Q(D)[1 \cdot \varphi] = D^\beta \varphi \in \mathcal{S}$, 故 $D^\beta \varphi$ 存在且连续. 由 β 的任意性, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

取 $Q(D) = 1$, $P(x) = x^\alpha$. 我们由 (3) 的条件, $1 \cdot [x^\alpha \varphi] = x^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$, 故 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \varphi(x)| < +\infty$.

结合无穷可微性, 对任意多重指标 β , 需证 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < +\infty$. 取 $P(x) = x^\alpha$, $Q(D) = D^\beta$, 由 (3) 的条件, $D^\beta [x^\alpha \varphi] \in \mathcal{S}$. 展开 $D^\beta [x^\alpha \varphi]$ 可知其为有限项的和, 每项形如 $D^\gamma x^\alpha \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi$ ($\gamma \leq \beta$), 其中 $D^\gamma x^\alpha$ 是多项式, $D^{\beta-\gamma} \varphi$ 是 φ 的导数. 由施瓦茨函数定义, 这些项的上确界有限, 故 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < +\infty$.

故 $\varphi \in \mathcal{S}$.

□

8.2.4 作业 4

问题 (1). Laplace 算子的基本解为:

$$E(r) = \begin{cases} C_n r^{2-n}, & n \geq 3 \\ C_2 \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases} \quad (8.6)$$

我们现在要证明:

$$C_n = \frac{1}{(2-n)S_n} \quad (n \geq 3), \quad C_2 = \frac{1}{2\pi} \quad (8.7)$$

这里 S_n 是 \mathbb{R}^n 中单位球的表面积.


不同于我们熟知的三维球体的球体体积公式以及球体与球表面积之间的关系, 在解决问题之前, 我们先推导一下 $n(n \geq 3)$ 维球体体积与表面积的关系以及球体体积公式:

定理 (n 维球体体积与表面积的关系). 设 n 维球体半径为 R , 体积为 $V_n(R)$, 表面积为 $S_n(R)$, 则成立:

$$V_n(R) = \frac{R}{n} S_n(R) \quad (8.8)$$

若记 $S_n(R) = S_n R^{n-1}$, 其中 S_n 为常数, 则:

$$V_n(R) = \frac{S_n}{n} R^n = v_n R^n \quad (8.9)$$

 **注.** 对于 n 维球体, 体积的最高次应该是 n , 而表面积的最高次应该是 $n-1$, 即 $\deg(S_n(R)) = n-1, \deg(V_n(R)) = n$.

证明. 体积可通过表面积的积分得到:

$$V_n(R) = \int_0^R S_n(r) dr = S_n \int_0^R r^{n-1} dr = \frac{1}{n} S_n R^n = \frac{R}{n} S_n(R)$$

□

定理 (n 维球体体积公式). n 维球体体积为:

$$V_n(R) = v_n R^n, \quad \text{其中} \quad v_n = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (8.10)$$

证明. 我们采用数学归纳法证明:

当 $n=3$ 时, $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, $v_3 = \frac{4}{3}\pi$, 公式成立:

$$v_3 = \frac{2^3}{3!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{4}{3}\pi$$

假设对 $n-1$ 维情形公式成立, 考虑 n 维球体 $B_n(R)$:

$$\begin{aligned} V_n(R) &= \int_{B_n(R)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-R}^R dx_1 \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq R^2 - x_1^2} dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-R}^R v_{n-1}(R^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \end{aligned}$$

作变量代换 $x_1 = R \cos \theta$, 则 $dx_1 = -R \sin \theta d\theta$, 当 x_1 从 $-R$ 到 R 时, θ 从 π 到 0 :

$$\begin{aligned} V_n(R) &= v_{n-1} R^n \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} (-\sin \theta) d\theta \\ &= v_{n-1} R^n \int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta \\ &= 2v_{n-1} R^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \end{aligned}$$

记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$, 利用我们在数学分析中学到的 Wallis 积分公式:

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此:

$$v_n = 2v_{n-1} I_n$$

分两种情况计算:

当 n 为偶数时, 设 $n = 2k$:

$$\begin{aligned} v_{2k} &= 2v_{2k-1} I_{2k} = 2 \cdot \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2^{2k}}{(2k)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

当 n 为奇数时, 设 $n = 2k+1$:

$$\begin{aligned} v_{2k+1} &= 2v_{2k} I_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2^{2k}}{(2k)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

我们可以统一写为:

$$v_n = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

故我们由数学归纳法, 公式得证. □

因此, 我们有:

$$S_n(R) = S_n R^{n-1}, \quad \text{其中} \quad S_n = n v_n = \frac{2^n}{(n-2)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (8.11)$$

定理. 对于球对称函数 $E(r)$, 有:

$$\Delta E(r) = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE}{dr} \quad (8.12)$$

证明. 由链式法则:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E(r) = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{x_j}{r}$$

计算二阶导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E(r) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

对 $j = 1, \dots, n$ 求和:

$$\begin{aligned} \Delta E(r) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E(r) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE(r)}{dr} \end{aligned}$$

□

下面我们来正式求解 C_n ($n \geq 3$):

解. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通开集, $Q \in \Omega$, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

使用 Green 公式:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

取 $v = \frac{1}{r^{n-2}}$, 其中 $r = d(x, Q)$ 。为处理奇点, 我们设 $B_\epsilon(Q)$ 是以 Q 为球心、 ϵ 为半径的球, 定义新的积分区域:

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_\epsilon(Q)$$

此时 $v = r^{2-n} \in C^2(\Omega_\epsilon) \cap C(\overline{\Omega}_\epsilon)$ 。

在 Ω_ϵ 上应用 Green 公式:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dx \\ &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds \\ &\quad + \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

在球面 $\partial B_\epsilon(Q)$ 上, 外法向量指向球心, 因此:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \left(u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds \\ &= (n-2) \int_{\partial B_\epsilon(Q)} u \cdot \frac{1}{r^{n-1}} ds + \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} ds \quad (r = \epsilon) \end{aligned}$$

应用积分中值定理, 存在 $Q^*, \hat{Q} \in \partial B_\epsilon(Q)$ 使得:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{n-2}{\epsilon^{n-1}} \cdot S_n \epsilon^{n-1} \cdot u(Q^*) + \frac{1}{\epsilon^{n-2}} \cdot S_n \epsilon^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \\ &= (n-2) S_n \cdot u(Q^*) + S_n \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \cdot \epsilon \end{aligned}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时, $Q^*, \hat{Q} \rightarrow Q$, 且第二项趋于零:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_2 = (n-2) S_n \cdot u(Q)$$

因此:

$$I = I_1 + (n-2) S_n \cdot u(Q) \quad (8.13)$$

另一方面, 在 Ω_ϵ 上考虑函数 $v = \frac{1}{r^{n-2}} = r^{2-n}$

$$v'(r) = (2-n)r^{1-n}$$

$$v''(r) = (2-n)(1-n)r^{-n}$$

代入式 (8.12):

$$\begin{aligned} \Delta v &= v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \\ &= (2-n)(1-n)r^{-n} + \frac{n-1}{r} \cdot (2-n)r^{1-n} \\ &= (2-n)(1-n)r^{-n} + (n-1)(2-n)r^{-n} \\ &= (2-n)r^{-n} [(1-n) + (n-1)] = 0 \end{aligned}$$

所以:

$$I = \int_{\Omega_\epsilon} (u \cdot 0 - v \Delta u) dx = - \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dx$$

令 $\epsilon \rightarrow 0^+$, 得到:

$$I = - \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dx \quad (8.14)$$

联立 (8.13)(8.14) 式:

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds + (n-2) S_n \cdot u(Q)$$

整理得:

$$u(Q) = \frac{1}{(n-2)S_n} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) ds - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \frac{1}{r^{n-2}} dx \right] \quad (8.15)$$

现在考虑分布意义下的基本解。设 $v = C_n \frac{1}{r^{n-2}}$, 对任意测试函数 $u \in C_0^\infty(\Omega)$, 有:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-Q) u(x) dx \\ &= \langle \delta(x-Q), u(x) \rangle \\ &= \langle E(r), u(x) \rangle \\ &= \langle \Delta \left(C_n \frac{1}{r^{n-2}} \right), u(x) \rangle \\ &= C_n \left\langle \frac{1}{r^{n-2}}, \Delta u(x) \right\rangle \\ &= C_n \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u(x) dx \end{aligned} \quad (8.16)$$

比较 (8.15)(8.16) 两式, 对 $u \in C_0^\infty(\Omega)$, 在 $\partial\Omega$ 上: $u(x) = 0, \nabla u(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, 因此:

$$u(Q) = - \frac{1}{(n-2)S_n} \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u(x) dx = C_n \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u(x) dx$$

由此得到:

$$C_n = - \frac{1}{(n-2)S_n}$$

其中 $S_n = n v_n = \frac{2^n}{(n-2)!!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 是 n 维单位球的表面积。 \square

8.2.5 作业 5

问题 (1). 设 $\Omega = B_R(Q)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 证明:

$$(i) \quad u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u \, dS_p + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u \, dx$$

$$(ii) \quad \text{若 } \Delta u \geq 0, \text{ 则 } u(Q) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u \, dS_p.$$

我们先回顾我们在求 Laplace 方程基本解过程中用到的公式:

引理.

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u \, dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \, ds$$

证明. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 我们取 $v = \frac{1}{r}$. 但 $v = \frac{1}{r}$ 在原点处有奇点, 不满足 Green 公式的条件.

$v = \frac{1}{r} = r^{-3}$ 是基本解的主项. 为处理奇点, 设 $B_\varepsilon(0)$ 是以原点为球心、 ε 为半径的小球, 定义:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0)$$

在新的区域 Ω_ε 上, $v = \frac{1}{r} \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$.

在 Ω_ε 上应用 Green 公式:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds$$

由于基本解满足:

$$\Delta E(r) = \delta(r) = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} \Big|_{\Omega_\varepsilon} = 0$$

边界 $\partial\Omega_\varepsilon$ 由两部分组成: $\partial\Omega$ 和 ∂B_ε . 因此:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds + \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds$$

在球面 ∂B_ε 上, 外法向量指向球心, 因此:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left[u \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \, ds \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left(-\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \, ds \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u \, ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} \, ds \end{aligned}$$

应用积分中值定理, 存在 $Q^*, \hat{Q} \in \partial B_\varepsilon$ 使得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u \, ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot u(Q^*) = 4\pi u(Q^*) \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} \, ds &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) = 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $Q^*, \hat{Q} \rightarrow Q$, 且第二项趋于零。因此:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = -4\pi u(Q)$$

综合以上结果, 得到:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + 4\pi u(Q)$$

即:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

□

接下来我们来证明问题:

证明. (i) 由上面结论:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

由于 $\Omega = B_R(Q)$, 其中在 $\partial \Omega$ 上我们有 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{R^2}$. 则有

$$\begin{aligned} u(Q) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} u \left(-\frac{1}{R^2} \right) ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \end{aligned}$$

我们在 Ω 上运用格林公式:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

取 $v = 1$, 则有:

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{B_R(Q)} \Delta u dx$$

代入上式得:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{B_R(Q)} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R(Q)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx \end{aligned}$$

(ii) 我们记 $I_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS$, $I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R(Q)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx$, 则 $u(Q) = I_1 + I_2$.

当 $\Delta u \geq 0$ 时, 由于在 $B_R(Q)$ 内 $\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \leq 0$, 故 $I_2 \leq 0$, 从而

$$u(Q) = I_1 + I_2 \leq I_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p$$

故原命题成立!

□

问题 (2). 若 Ω 是有界连通开集, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 并且 u 在 Ω 上满足: $\Delta u \geq 0$ 且 u 不恒为常数, 则 u 必不可可在 Ω 内部达到其上确界。



证明. 我们仿照定理 6.1.1 的方法, 使用反证法。假设 u 在 Ω 上非常数但在 Ω 内部达到其上确界。

设 $M = \sup_{\Omega} u$, 且存在 $Q \in \Omega$ 使得 $u(Q) = M$ 。由于 Ω 是连通开集, 存在 $\delta > 0$ 使得闭球 $\overline{B_{\delta}(Q)} \subset \Omega$ 。

由 $\Delta u \geq 0$, 根据问题 (1) 的 (ii), 我们有:

$$u(Q) \leq \frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS$$

由于 u 是非常值函数且在 Q 处达到最大值 M , 存在点 $P_0 \in B_{\delta}(Q)$ 使得 $u(P_0) < M$ 。由 u 的连续性, 存在 P_0 在球面 $\partial B_{\delta}(Q)$ 上的投影点 P (或通过连续路径连接), 以及 P 的邻域 $V_P \subset \partial B_{\delta}(Q)$, 使得对于所有 $x \in V_P$ 有:

$$u(x) \leq \frac{u(P_0) + M}{2} < M$$

我们考虑球面积分:

$$\frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS = \frac{1}{4\pi\delta^2} \left(\int_{V_P} u dS + \int_{\partial B_{\delta}(Q) \setminus V_P} u dS \right)$$

在 V_P 上: $u(x) \leq \frac{u(P_0) + M}{2} < M$; 在 $\partial B_{\delta}(Q) \setminus V_P$ 上: $u(x) \leq M$

记 $S(V_P)$ 表示区域 V_P 的面积, $S(\partial B_{\delta}(Q)) = 4\pi\delta^2$ 为整个球面的面积, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS &\leq \frac{1}{4\pi\delta^2} \left[S(V_P) \cdot \frac{u(P_0) + M}{2} + (4\pi\delta^2 - S(V_P)) \cdot M \right] \\ &= \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \cdot u(P_0) + \left(1 - \frac{S(V_P)}{4\pi\delta^2} + \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \right) M \\ &= \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \cdot u(P_0) + \left(1 - \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \right) M \end{aligned}$$

令 $\lambda = \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2}$, 则 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ (因为 $S(V_P) \leq 4\pi\delta^2$), 于是:

$$\frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS \leq \lambda u(P_0) + (1 - \lambda)M < M$$

但根据平均值不等式, 我们有:

$$M = u(Q) \leq \frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS < M$$

这就得到了矛盾: $M < M$ 。因此, 假设不成立, u 不可能在 Ω 内部达到其上确界。 \square

问题 (3). 设 Ω 是有界连通开集, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足方程

$$\Delta u - u^2 = 0, \quad x \in \Omega$$

则 u 必不可可在 Ω 内部达到最大值, 除非 $u \equiv 0$ 。



证明. 若 u 是常数, 则代入方程 $\Delta u - u^2 = 0$, 此时 $\Delta u = 0$, 故 $0 - u^2 = 0$, 解得 $u \equiv 0$ 。

若 u 不是常数, 由方程可知 $\Delta u = u^2 \geq 0$ 。

由上题我们可知: u 必不可可在 Ω 内部达到其上确界, 即 u 不能在 Ω 内部达到最大值, 矛盾。

综上, 命题得证。

□

8.2.6 作业 6

问题 (1). 求半空间 $\{(x, y, z); z > 0\}$ 以及球 $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < \mathbb{R}^2\}$ 的格林函数, 并给出相应的狄利克雷问题的解.



上半空间. 记 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, 边界 $\partial\Omega = \{(x, y, z) : z = 0\}$. 对于点 $Q(x, y, z) \in \Omega$ ($z > 0$) 和 $P(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$, 在 $Q_1(x, y, -z)$ 处放置与 Q 点处电荷量相同的负点电荷, 则格林函数为:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)}$$

其中

$$r(P, Q) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \quad r(P, Q_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2}$$

下面我们来验证 $G(P, Q)$ 符合格林函数的定义.

在边界 $\partial\Omega$ 上 ($z_1 = 0$):

$$G(P, Q)|_{z_1=0} = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)} = 0$$

在 Ω 内部, $\Delta_P G(P, Q) = \delta(P - Q)$, 这是因为:

$$\Delta_P \left(-\frac{1}{4\pi r(P, Q)} \right) = \delta(P - Q), \quad \Delta_P \left(\frac{1}{4\pi r(P, Q_1)} \right) = 0 \quad (\text{当 } P \neq Q_1)$$

且 $Q_1 \notin \Omega$, 所以第二项在 Ω 内调和.

现在我们来计算法向导数:

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{z_1 - z}{r(P, Q)^3} - \frac{z_1 + z}{r(P, Q_1)^3} \right]$$

在边界 $\partial\Omega$ 上, 外法向量方向为 $-z$ 方向, 因此 $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial z_1}$. 在边界 $z_1 = 0$ 处:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial G}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-z}{r(P, Q)^3} - \frac{z}{r(P, Q_1)^3} \right]_{z_1=0}$$

当 $z_1 = 0$ 时, $r(P, Q) = r(P, Q_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2}$, 代入得:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{z}{r^3} + \frac{z}{r^3} \right] = \frac{z}{2\pi r^3} = \frac{z}{2\pi [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}}$$

对于半空间 Ω 上的狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

解可表示为:

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} f(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_P$$

代入已求得的法向导数, 并注意到在边界上 $dS_P = dx_1 dy_1$, 我们可得:

$$u(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, y_1) \cdot \frac{z}{2\pi [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}} dx_1 dy_1$$

□

球. 对于球 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ 的格林函数, 我们使用球坐标系. 设 $Q(\rho, \theta_1, \varphi_1)$ 为球内一点, $P(\rho_2, \theta_2, \varphi_2)$ 为变点, 球坐标变换为:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

其中 $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho < R$.

为了构造球的格林函数, 我们在 Q 关于球面的反演点 Q_1 处放置适当强度的镜像电荷. 设 Q 的球坐标为 $(\rho, \theta_1, \varphi_1)$, 则其反演点 Q_1 位于射线 OQ 上, 且满足:

$$|OQ_1| = \frac{R^2}{\rho}$$

我们定义球的格林函数为:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)}$$

其中 $r(P, Q) = |P - Q|$, $r(P, Q_1) = |P - Q_1|$.

下面我们来验证 $G(P, Q)$ 是格林函数.

首先验证边界条件: 当 P 在球面 $\partial\Omega$ 上时, 即 $|P| = R$, 需要证明 $G(P, Q) = 0$.

当 P 在球面上时, 由圆幂定理我们可得:

$$\frac{r(P, Q)}{R} = \frac{\rho}{r(P, Q_1)}$$

因此, 在球面 $|P| = R$ 上:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)} = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r(P, Q)}{R\rho} = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{4\pi r(P, Q)} = 0$$

其次验证在 Ω 内部, $\Delta_P G(P, Q) = \delta(P - Q)$. 第一项 $-\frac{1}{4\pi r(P, Q)}$ 的 Laplace 算子作用结果为 $\delta(P - Q)$, 而第二项 $\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)}$ 在 Ω 内是调和的, 因为 Q_1 在球外 ($|Q_1| = R^2/\rho > R$).

现在计算法向导数. 在球坐标系中, 外法向为径向方向, 因此:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \rho_2} \Big|_{\rho_2=R}$$

经过计算可得:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r(P, Q)^3}$$

对于球域 Ω 上的狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \\ u = f, & x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

其解为:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} f(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r(P, Q)^3} dS_P$$

其中 $\rho = |Q|$, $r(P, Q) = |P - Q|$, 积分在球面 $\partial\Omega$ 上进行. □

问题 (2). 设 u 在以 Q 为心、 R 为半径的球 B 内非负调和, 而在 \bar{B} 上连续, 则对任



意 $P \in B$, 有

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q)$$

其中 $\rho = |PQ|$ 。



证明. 类似求圆上 Laplace 方程的 Dirichlet 问题, 我们有:

$$u(P) = u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi$$

其中 $f(\varphi) = u(R, \varphi)$ 是边界值。

由于 $-1 \leq \cos(\theta - \varphi) \leq 1$, 可得:

$$\frac{R^2 - \rho^2}{(R + \rho)^2} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho)^2}$$

注意到:

$$\frac{R^2 - \rho^2}{(R + \rho)^2} = \frac{R - \rho}{R + \rho}, \quad \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho)^2} = \frac{R + \rho}{R - \rho}$$

因此:

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \leq u(P) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

由平均值性质, 当 $\rho = 0$ 时:

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

代入可得:

$$\frac{R - \rho}{R + \rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho}u(Q)$$

□

问题 (3). 证明 $n = 3$ 的可去奇点定理。



我们先来叙述一下 $n = 3$ 的可去奇点定理:

定理. 设 $u(x)$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中调和, 且在 A 点附近满足

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x - A|}\right) \quad \text{当 } x \rightarrow A$$

则我们可以通过补充定义 u 在 A 点的值, 使得 u 在整个 $B_R(A)$ 中调和。



证明. 由条件可知:

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{u(x)}{1/|x - A|} = 0$$

取固定半径 R 使得 $B_R(A) \subset \Omega$, 对任意 $\delta < R$, 考虑球环区域 $B_R(A) \setminus B_\delta(A)$ 。定义比较函数:

$$V_C(x) = C \left(\frac{1}{|x - A|} - \frac{1}{R} \right)$$

其中 C 是正常数。我们不难验证 V_C 满足：

$$\begin{cases} \Delta V_C = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_\delta(A) \\ V_C|_{\partial B_R(A)} = 0 \end{cases}$$

现在定义 u_1 为如下边值问题的解：

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in B_R(A) \\ u_1|_{\partial B_R(A)} = u|_{\partial B_R(A)} \end{cases}$$

考虑函数 $w = u_1 - u$ ，则 w 满足：

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_\delta(A) \\ w|_{\partial B_R(A)} = u_1|_{\partial B_R(A)} - u|_{\partial B_R(A)} = 0 \end{cases}$$

由条件 $\lim_{x \rightarrow A} \frac{u(x)}{1/|x-A|} = 0$ ，以及 u_1 在 A 点附近有界，可得：

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{w(x)}{1/|x-A|} = \lim_{x \rightarrow A} \left[\frac{u_1(x)}{1/|x-A|} - \frac{u(x)}{1/|x-A|} \right] = 0$$

对任意固定的 $C > 0$ ，存在 $\delta_0 > 0$ ，使得当 $|x - A| = \delta_0$ 时，有：

$$|w(x)| \leq V_C(x)$$

现在考虑函数 $w - V_C$ ，它在区域 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中满足：

$$\begin{cases} \Delta(w - V_C) = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A) \\ (w - V_C)|_{\partial B_R(A)} = 0 \\ (w - V_C)|_{\partial B_{\delta_0}(A)} \leq 0 \end{cases}$$

由极值原理，在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中有：

$$w - V_C \leq 0 \quad \text{即} \quad w \leq V_C$$

同理，考虑函数 $w + V_C$ ，可得：

$$\begin{cases} \Delta(w + V_C) = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A) \\ (w + V_C)|_{\partial B_R(A)} = 0 \\ (w + V_C)|_{\partial B_{\delta_0}(A)} \geq 0 \end{cases}$$

由极值原理，在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中有：

$$w + V_C \geq 0 \quad \text{即} \quad w \geq -V_C$$

因此，在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中成立：

$$|w| \leq V_C$$

由于 δ_0 可以任意小，上述不等式实际上在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中成立。现在令 $C \rightarrow 0$ ，则 $V_C \rightarrow 0$ ，于是：

$$|w| = |u_1 - u| \leq 0 \quad \text{在 } B_R(A) \setminus \{A\} \text{ 中}$$

即 $u_1 = u$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中。由于 u_1 在 $B_R(A)$ 中调和，我们可以通过定义 $u(A) = u_1(A)$ 来补充 u 在 A 点的值，使得 u 在整个 $B_R(A)$ 中调和。 \square

8.2.7 作业 7

问题 (1). 设 $K(x, t)$ 是热传导方程的基本解, 证明:

(i)

$$K(x, t) = t^{-\frac{n}{2}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right);$$

(ii) 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有 $K(x, \varepsilon^2) \rightarrow \delta(x)$ (于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).



证明. (i) 我们知道热传导方程的基本解为:

$$K(x, t) = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) H(t)$$

而

$$\begin{aligned} t^{-\frac{n}{2}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) &= t^{-\frac{n}{2}} \cdot (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x/\sqrt{t}|^2}{4a^2}\right) \overset{=1}{H(1)} \\ &= (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) \\ &= K(x, t) \end{aligned}$$

(ii) 考虑 $K(x, \varepsilon^2) = (4\pi a^2 \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 \varepsilon^2}\right)$.

对任意测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有:

$$\begin{aligned} \langle K(x, \varepsilon^2), \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \varepsilon^2) \varphi(x) dx \\ &= (4\pi a^2 \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 \varepsilon^2}\right) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

作变量代换 $x = \varepsilon y$, 则:

$$\begin{aligned} &= (4\pi a^2 \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\varepsilon y|^2}{4a^2 \varepsilon^2}\right) \varphi(\varepsilon y) \varepsilon^n dy \\ &= (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(\varepsilon y) dy \end{aligned}$$

由于 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 存在常数 $M > 0$ 使得 $|\varphi(\varepsilon y)| \leq M$. 同时, $\exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right)$ 是 \mathbb{R}^n 上的可积函数:

$$\left| (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(\varepsilon y) \right| \leq M (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

由控制收敛定理:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(\varepsilon y) dy \\ &= (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(0) dy \\ &= \varphi(0) \cdot (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) dy \end{aligned}$$

而我们熟知:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) dy = (4\pi a^2)^{\frac{n}{2}}$$

因此:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle K(x, \varepsilon^2), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

故当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有 $K(x, \varepsilon^2) \rightarrow \delta(x)$ (于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

□

8.2.8 作业 8

问题 (1). 考虑热传导方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (8.17)$$

条件: 存在常数 $B > 0$, 对 $\forall t \geq 0, -\infty < x < +\infty$, 满足 $|u(x, t)| < B$.

证明 稳定性.

稳定性的证明.

设 u_1, u_2 分别满足:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - a^2 \partial_{xx} u_1 = 0, & t > 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t u_2 - a^2 \partial_{xx} u_2 = 0, & t > 0 \\ u_2|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

并且 $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \eta$, 只需证明 $|u_1 - u_2| < \eta$.

令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足方程:

$$\begin{cases} \partial_t w - a^2 \partial_{xx} w = 0, & t > 0 \\ w|_{t=0} = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}$$

且 w 有界: $|w| \leq |u_1| + |u_2| \leq 2B$.

取任意给定点 (x_0, t_0) , $t_0 > 0$, 考虑区域 $R_0 = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$.

构造辅助函数:

$$v(x, t) = \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

则:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4B^2 a^2}{L^2} - a^2 \cdot \frac{4B^2}{L^2} = 0$$

在抛物边界 Γ_T 上:

♡ 底边 $t = 0$: $v(x, 0) = \frac{2B^2}{L^2} (x - x_0)^2 + \eta \geq \eta > |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = w(x, 0)$, 因为 $|\varphi_1 - \varphi_2| < \eta$ 且 $(x - x_0)^2 \geq 0$.

♡ 侧边 $x = x_0 \pm L$: $v(x_0 \pm L, t) = 2B^2 + \frac{4B^2 a^2}{L^2} t + \eta \geq 2B^2 + \eta \geq 2B \geq |w(x_0 \pm L, t)|$, 因为 $|w| \leq 2B$ 且 $2B^2 + \eta \geq 2B$ (取 $B \geq 1$ 时成立).

因此 $v(x, t)|_{\Gamma_T} \geq w(x, t)|_{\Gamma_T}$ 成立. 此时我们令 $h = v - u$, 则有 $h|_{\Gamma_T} \geq 0$. 又由极值原理, h 的最大最小值在抛物边界上取到, 而 $h|_{\Gamma_T} \geq 0$, 故在 R_0 上成立:

$$h \geq 0 \Rightarrow v(x, t) \geq w(x, t)$$

即

$$w(x, t) \leq \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

同理可证:

$$w(x, t) \geq -\frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) - \eta$$

因此:

$$|w(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

在点 (x_0, t_0) 处:

$$|w(x_0, t_0)| \leq \frac{4B^2 a^2}{L^2} t_0 + \eta$$

令 $L \rightarrow \infty$, 则 $|w(x_0, t_0)| \leq \eta$. 由 (x_0, t_0) 的任意性, $|u_1 - u_2| \leq \eta$. 这样我们便完成了稳定性的证明. □

问题 (2). 用傅立叶方法求解以下初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x \end{cases} \quad (8.18)$$

解. 我们采用 **常数变易法** 来求解.

由齐次边界条件 $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, 考虑对应的 **SL 问题**:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

♡ 当 $\mu < 0$ 时, 令 $\mu = -k^2$ ($k > 0$),

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

根据边值条件:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X'(L) = kC_1 e^{kL} - kC_2 e^{-kL} = 0 \end{cases}$$

代入 $C_2 = -C_1$ 得:

$$kC_1 e^{kL} + kC_1 e^{-kL} = kC_1 (e^{kL} + e^{-kL}) = 0$$

由于 $k > 0$ 且 $e^{kL} + e^{-kL} > 0$, 故 $C_1 = 0$, 进而 $C_2 = 0$. 无非零解.

♡ 当 $\mu = 0$ 时,

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

由边值条件:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X'(L) = C_1 = 0 \end{cases}$$

得 $C_1 = C_2 = 0$. 无非零解.

♡ 当 $\mu > 0$ 时, 令 $\mu = k^2$ ($k > 0$),

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$$

由边值条件:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X'(L) = -kC_1 \sin(kL) + kC_2 \cos(kL) = kC_2 \cos(kL) = 0 \end{cases}$$

要使 $C_2 \neq 0$, 则需:

$$\cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

即:

$$k_m = \frac{(2m+1)\pi}{2L}, \quad \mu_m = \left(\frac{(2m+1)\pi}{2L} \right)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

对应的特征函数为:

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x\right)$$

特征函数系 $\left\{ \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x\right) \right\}_{m=0}^{\infty}$ 构成 $L^2[0, L]$ 上的完全正交系。

我们设 (8.18) 的解可表示为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx)$$

其中 $A_n(t)$ 为我们要求的待定函数。

由初始条件 $u(x, 0) = \sin x$ 得:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(nx) = \sin x$$

利用正交性, 两边乘以 $\sin(mx)$ 并在 $[0, \pi]$ 上积分:

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(nx) \right) \sin(mx) dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin(mx) dx$$

由正交关系, 我们可知:

$$\frac{\pi}{2} T_m(0) = \int_0^{\pi} \sin x \sin(mx) dx$$

而

$$\int_0^{\pi} \sin x \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & m = 1 \end{cases}$$

因此:

$$A_1(0) = 1, \quad A_n(0) = 0 \quad (n \neq 1)$$

我们将 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx)$ 代入方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(t) \sin(nx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot n \cos(nx)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot (-n^2) \sin(nx) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n(t) \sin(nx)$$

代入方程得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A'_n(t) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n(t) \sin(nx) = 0$$

即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A'_n(t) + n^2 A_n(t)] \sin(nx) = 0$$

由于 $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性无关函数族, 故各项系数为零:

$$A'_n(t) + n^2 A_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

对于一阶线性常微分方程:

$$\frac{dA_n}{dt} + n^2 A_n = 0$$

其通解为:

$$A_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

结合初始条件 $A_n(0) = C_n$, 我们可得:

$$A_1(t) = 1 \cdot e^{-t}, \quad A_n(t) = 0 \quad (n \neq 1)$$

于是:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx) = e^{-t} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot \sin(nx) = e^{-t} \sin x$$

综上: 原问题的解为:

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

□

8.2.9 作业 9

问题 (1). 证明: 对于方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (8.19)$$

若 $w(x, t, \tau)$ 为如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, t > \tau \\ w(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases} \quad (8.20)$$

则 (8.19) 的解为:

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$$

 注. 这实际上的证明就是 *Duhamel* 原理的证明.

证明. 我们只需要验证由 $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$ 定义的函数确实满足原方程 (8.19).

1. 当 $t = 0$ 时, 积分区间退化为一点, 故:

$$u(x, 0) = \int_0^0 w(x, 0, \tau) d\tau = 0$$

2. 我们对 u 关于 t 求偏导有:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = w(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau$$

结合 w 的初始条件 $w(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0$, 特别地当 $\tau = t$ 时有 $w(x, t, t) = 0$, 所以:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau$$

再次验证初始条件:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \int_0^0 \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0, \tau) d\tau = 0$$

我们对 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 再次求导:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau$$

由 w 的初始条件 $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau)$, 特别地当 $\tau = t$ 时有 $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t, t) = f(x, t)$, 所以:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau$$

3. 接下来我们计算 u 关于 x 的偏导数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) d\tau$$

故:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau \right] - a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) \right] d\tau \end{aligned}$$

由于 $w(x, t, \tau)$ 在 $t > \tau$ 时满足齐次波动方程:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) = 0$$

因此:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t 0 \cdot d\tau = f(x, t)$$

综上所述, 我们有:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \end{cases}$$

因此 $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$ 确实是方程 (8.19) 的解. □

8.2.10 作业 10

问题 (1). 用分离变量法求解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

解. 对于一般的问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

使用分离变量法, 我们令 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\mu$$

因此 $X(x)$ 满足如下 Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

我们可得特征值为 $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \dots$, 特征函数为 $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x$.

这些特征函数构成完全正交系 $\{\sin \frac{k\pi}{l}x\}$, 满足正交性关系:

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi}{l}x \cdot \sin \frac{m\pi}{l}x dx = \frac{l}{2} \delta_{k,m} = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{l}{2}, & m = k \end{cases}$$

将特征值 μ_k 代入与 t 相关的方程:

$$T_k''(t) + a^2 \mu_k T_k(t) = 0$$

解得:

$$T_k(t) = \bar{A}_k \sin \frac{ak\pi}{l}t + \bar{B}_k \cos \frac{ak\pi}{l}t$$

故:

$$u_k(x, t) = T_k(t) \cdot X_k(x) = \left(\bar{A}_k \sin \frac{ak\pi}{l}t + \bar{B}_k \cos \frac{ak\pi}{l}t \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

进而我们可知:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l}t \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x$$

其中 $A_k = \bar{B}_k, B_k = \bar{A}_k$ 为待定系数。

回到我们的问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

接下来我们来确定系数 A_k 与 B_k :

♡ 确定系数 A_k :

由 $u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l}$ 我们可得:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \sin \frac{3\pi x}{l}$$

我们在上式两边乘上 $\sin \frac{m\pi x}{l}$ 并在 $[0, l]$ 上积分:

$$A_m \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l \sin \frac{3\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

而

$$\int_0^l \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & m \neq 3 \\ \frac{l}{2}, & m = 3 \end{cases}$$

故

$$A_k = \begin{cases} 1, & k = 3 \\ 0, & k \neq 3 \end{cases}$$

♡ 确定系数 B_k :

由 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x)$ 我们可得:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{ak\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} = x(l-x)$$

我们在上式两边乘上 $\sin \frac{m\pi x}{l}$ 并在 $[0, l]$ 上积分:

$$\frac{am\pi}{l} B_m \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l x(l-x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

即:

$$B_m = \frac{2}{am\pi} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

接下来我们来计算积分:

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^l x(l-x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= l \int_0^l x \sin \frac{m\pi x}{l} dx - \int_0^l x^2 \sin \frac{m\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \int_0^l x \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \left[-\frac{lx}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{l}{m\pi} \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{l^2}{m\pi} \cos(m\pi) + \frac{l^2}{m^2\pi^2} \sin \frac{m\pi x}{l} \Big|_0^l = -\frac{l^2}{m\pi} (-1)^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l x^2 \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \left[-\frac{lx^2}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{2l}{m\pi} \int_0^l x \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\
&= -\frac{l^3}{m\pi} (-1)^m + \frac{2l}{m\pi} \left[\frac{lx}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{m\pi} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right] \\
&= -\frac{l^3}{m\pi} (-1)^m + \frac{2l}{m\pi} \left[0 + \frac{l^2}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \Big|_0^l \right] \\
&= -\frac{l^3}{m\pi} (-1)^m + \frac{2l^3}{m^3\pi^3} [(-1)^m - 1]
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
I_m &= l \left[-\frac{l^2}{m\pi} (-1)^m \right] - \left[-\frac{l^3}{m\pi} (-1)^m + \frac{2l^3}{m^3\pi^3} [(-1)^m - 1] \right] \\
&= -\frac{l^3}{m\pi} (-1)^m + \frac{l^3}{m\pi} (-1)^m - \frac{2l^3}{m^3\pi^3} [(-1)^m - 1] \\
&= \frac{2l^3}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m]
\end{aligned}$$

代入 B_m 的表达式:

$$B_m = \frac{2}{am\pi} \cdot \frac{2l^3}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] = \frac{4l^3}{am^4\pi^4} [1 - (-1)^m]$$

即:

$$B_k = \begin{cases} 0, & 2 \mid k \\ \frac{8l^3}{ak^4\pi^4}, & 2 \nmid k \end{cases}$$

最后我们将求解出来的系数代入通解可得:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= A_3 \cos \frac{3a\pi}{l} t \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \\
&= \cos \frac{3a\pi}{l} t \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{8l^3}{a\pi^4} \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{ak\pi}{l} t \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}
\end{aligned}$$

即为我们最终所求的解.

□

To be continue...

