Investment Principles

Sherlock Young

December 16, 2025

Copyright © 2025 Sherlock Young

Copying prohibited

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Art. No 00001
ISBN 111–11–1111–11–1
Edition 1.0

Cover design by Sherlock Young

Published by Three Squirrels
Printed in Tianjin

If you have any queotions, please send email to *nkuSherr1@nankai.edu.cn*

目录

1. 资产估值理论

1.1 利息理论

1.1.1 利息和利息的度量

我们先给出利息的相关含义:

定义 1.1.1 (利息). 利息，指的是在一定时期内，资金拥有人将使用资金的自由权转让给借款人后所得到的报酬.

注. 在某种意义上，利息也可看作是租金的一种形式.

定义 1.1.2 (利息的度量). 将每项业务开始时投资的金额称为本金，将业务开始一定时间后回收到的总金额称为该时刻的积累值，则积累值与本金的差额就是这一时期的利息金额.

考虑投资一单位的本金。定义该投资在时刻 t 的积累值为积累函数 $a(t)$。显然，$a(0)=1$。

一般情况下，本金金额不是一个单位，而是 k 个单位。定义本金为 k 的投资在时刻 t 时的积累值为总量函数 $A(t)$。

显然，$A(t)$ 与 $a(t)$ 仅相差一个倍数，即

$$A(t) = k \cdot a(t)$$

若把在时刻 t 时的利息记为 I_t，则

$$I_t = A(t) - A(t-1)$$

注. 这里的“时刻 t”通常指的是一个时间区间（如第 t 年）的终点。利息 I_t 衡量的是从 $t-1$ 到 t 这一时间段内，投资积累值的增加额。

定义 1.1.3 (实际利率). 为比较不同规模投资的利息收益，引入利率的概念。所谓实际利率，是指在一个度量期内获得的利息金额与该度量期开始时投资的本金金额之比，通常用字母 i 表示。
对于有多个度量期的情形，可以分别定义各个度量期的实际利率。用 i_t 表示从投资日算起第 t 个度量期内的实际利率，则

$$i_t = \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)} = \frac{I_t}{A(t-1)} \quad (t \geq 1\text{为整数}).$$

注. 实际利率 i_t 是一个无量纲的比率，它反映了资本在特定时间段 $[t-1, t]$ 内的相对增长率。该定义假设利息在期末支付，且在本期内不计入本金产生利息（即单利情形下）

下面我们给出单利、复利的定义：

定义 1.1.4 (单利与复利). 若投资期为多个或非整数个度量期，实务中最重要的两种利息度量方式是单利和复利。
考虑投资一单位本金：

1. 若其在时刻 t 时的积累函数为

$$a(t) = 1 + i \cdot t$$

则称该笔投资以每期单利 i 计息。

2. 若其在时刻 t 时的积累函数为

$$a(t) = (1+i)^t$$

则称该笔投资以每期复利 i 计息。

定理 1.1.1 (单利与复利下的利息与利率特征). 假设投资一单位本金。

1. 若以每期单利 i 计息，在投资期间，每个度量期产生的利息金额恒为常数 i，但其实际利率 i_t 并非常数，而是随着时间递减：

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{(1+i \cdot t) - [1 + i \cdot (t-1)]}{1 + i \cdot (t-1)} = \frac{i}{1 + i \cdot (t-1)}.$$

2. 若以每期复利 i 计息，在投资期间，不同时期产生的利息金额 I_t 是不同的，但每个度量期的实际利率 i_t 恒为常数 i:

$$I_t = a(t) - a(t-1) = (1+i)^t - (1+i)^{t-1} = i\cdot(1+i)^{t-1} = i\cdot a(t-1),$$
$$i_t = \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{I_t}{a(t-1)} = i.$$

命题 1.1.2 (单利与复利积累值比较). 设每期利率为 $i>0$，投资期长度为 t。

1. 当 $t>1$ 时，$(1+i)^t > 1+it$，即复利积累值大于单利积累值。
2. 当 $0<t<1$ 时，$(1+i)^t < 1+it$，即复利积累值小于单利积累值。
3. 当 $t=0$ 或 $t=1$ 时，两者相等: $(1+i)^0 = 1+i\cdot 0 = 1$, $(1+i)^1 = 1+i\cdot 1 = 1+i$。

证明. 考虑函数 $f(t) = (1+i)^t - (1+it)$。易知 $f(0)=0$，$f(1)=0$。计算导数:

$$f'(t) = (1+i)^t \ln(1+i) - i.$$

对于 $i>0$，$f'(0) = \ln(1+i) - i < 0$（因为 $\ln(1+x) < x$ 对于 $x>0$ 成立），且 $f''(t) = (1+i)^t[\ln(1+i)]^2 > 0$，故 $f(t)$ 为凸函数。结合 $f(0)=f(1)=0$，可知在 $(0,1)$ 内 $f(t)<0$，在 $t>1$ 时 $f(t)>0$。由此得证。 □

下面我们给出实际贴现率的定义:

定义 1.1.5 (实际贴现率). 设一个度量期开始时投资金额为 $A(t-1)$，期末可回收金额为 $A(t)$，期内产生的利息为 $I_t = A(t) - A(t-1)$。该度量期的实际贴现率 d 定义为利息金额与期末可回收金额之比:

$$d = \frac{I_t}{A(t)} = \frac{A(t)-A(t-1)}{A(t)}.$$

定理 1.1.3 (实际利率与实际贴现率的关系). 设实际利率为 i，实际贴现率为 d，则两者满足以下等价关系:

$$d = \frac{i}{1+i}, \qquad i = \frac{d}{1-d}.$$

定义 1.1.6 (贴现因子与多期实际贴现率). 定义贴现因子 v 为

$$v = (1+i)^{-1} = 1-d.$$

易得关系 $i = v\cdot d$。
对于多期情形，可定义第 t 个度量期的实际贴现率 d_t 为

$$d_t = \frac{A(t)-A(t-1)}{A(t)} = \frac{I_t}{A(t)} \quad (t\geq 1\text{为整数}).$$

下面我们给出一个跟利息计算相关的定律:

定理 1.1.4 (72 定律)**.** 在复利计息条件下，一笔投资翻倍所需的时间 t（以年为单位）可以近似用以下公式估算：

$$t \approx \frac{72}{100i}$$

其中 i 为年利率（小数形式）。

推导. 设初始本金为 1，年复利 i，翻倍时间 t 满足方程：

$$(1+i)^t = 2.$$

两边取自然对数：

$$t\ln(1+i) = \ln 2.$$

利用近似公式 $\ln(1+i) \approx i - \frac{i^2}{2} + \cdots$，当 i 较小时可略去高阶项得 $\ln(1+i) \approx i$。同时 $\ln 2 \approx 0.693$。于是：

$$t \approx \frac{0.693}{i}.$$

为了获得便于心算的公式，分子取 0.72 而非 0.693，并改用百分数表示利率（即用 $100i$ 代替 i），则：

$$t \approx \frac{72}{100i}.$$

注. 选用 72 是因为它拥有较多因数（如 $2, 3, 4, 6, 8, 9, 12$ 等），便于口算。实际上，常数在 69 至 72 之间均可，视利率范围而定。

□

1.1.2 现金流量图、现值与终值

定义 1.1.7. 在一项投资活动中，在其有效期内，称资金的收入与支出叫做现金流量，资金的收入称为现金流入，资金的支出称为现金流出。

定义 1.1.8 (净现金流)**.** 在金融分析中，通常规定现金流入为正，现金流出为负。在时刻 t_k 的净现金流 R_{t_k} 定义为该时刻现金流入 B_{t_k} 与现金流出 C_{t_k} 的代数和：

$$R_{t_k} = B_{t_k} - C_{t_k}.$$

不大懂下面这个的实际意义...

定义 1.1.9 (现值与终值)**.** 设有一系列发生在不同时刻的货币金额（称为现金流），R_{t_k} 表示在时刻 t_k 发生的现金流，i 为复利利率（通常为年利率）。

现值（*Present Value, PV*）是指将所有未来现金流按给定利率折现到某一特定时间序列起点（通常为 $t=0$）的价值之和：

$$PV = R_{t_0} + \frac{R_{t_1}}{(1+i)^{t_1}} + \cdots + \frac{R_{t_k}}{(1+i)^{t_k}} + \cdots + \frac{R_{t_n}}{(1+i)^{t_n}}.$$

终值（*Future Value, FV*）是指将所有现金流按给定利率积累到某一特定时间序列终点（通常为最后一个现金流发生的时刻 t_n）的价值之和：

$$FV = R_{t_0}\cdot(1+i)^{t_n} + R_{t_1}\cdot(1+i)^{t_n-t_1} + \cdots + R_{t_k}\cdot(1+i)^{t_n-t_k} + \cdots + R_{t_n}.$$

1.1.3 年金

定义 1.1.10 (年金). 所谓年金就是一系列按照相等时间间隔支付的款项。
我们将付款时间间隔相等、每次付款额度相等、整个付款期内利率不变且计息频率与付款频率相等的年金称为标准型年金，年金的各种变化形式称为一般型年金.

下面我们给出期末付年金的定义:

定义 1.1.11 (期末付年金). 考虑一笔年金，付款期限为 n 期，每期期末付款额为 1，每期利率为 i。这样的年金称为期末付年金。

- ♡ 所有付款在时间 0 时的现值之和记作 $a_{\overline{n}|}$（或 $a_{\overline{n}}$）。
- ♡ 所有付款在时间 n 时的积累值（终值）之和记作 $s_{\overline{n}|}$（或 $s_{\overline{n}}$）。

定理 1.1.5 (期末付年金的现值与终值公式). 设贴现因子 $v = (1+i)^{-1}$，则

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{1-v^n}{i},$$
$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

命题 1.1.6 ($a_{\overline{n}|}$ 与 $s_{\overline{n}|}$ 的关系).

$$a_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot v^n,$$
$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i.$$

证明. 由定义直接可得:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot v^n = s_{\overline{n}|} \cdot v^n.$$

对于第二个关系，计算:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{i}{1-v^n} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \\ &= \frac{i[(1+i)^n - 1] + i}{(1+i)^n - 1} = i + \frac{i}{(1+i)^n - 1} = i + \frac{1}{s_{\overline{n}|}}.\end{aligned}$$

□

下面我们给出期初付年金的定义:

定义 1.1.12 (期初付年金). 考虑一笔年金，付款期限为 n 期，每期期初付款额为 1，每期利率为 i。这样的年金称为期初付年金。

- ♡ 所有付款在时间 0 时的现值之和记作 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$（或 $\ddot{a}_{\overline{n}}$）。
- ♡ 所有付款在时间 n 时的积累值（终值）之和记作 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$（或 $\ddot{s}_{\overline{n}}$）。

定理 1.1.7 (期初付年金的现值与终值公式)**.** 设贴现因子 $v=(1+i)^{-1}$，实际贴现率 $d=\frac{i}{1+i}$，则

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}=\frac{1-v^n}{d},$$
$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\cdots+(1+i)=\frac{(1+i)^n-1}{d}.$$

证明. 现值 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 是 n 期期初付款 1 的现值之和（第一个付款发生在 $t=0$，现值为 1）：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}.$$

利用等比数列求和公式，首项 $a=1$，公比 $r=v$，项数 n，得

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{1-v}=\frac{1-v^n}{d}\quad(\text{因为}1-v=d).$$

终值 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 是 n 期期初付款 1 积累到第 n 期末的值之和（最后一个付款发生在 $t=n-1$，积累一期到 $t=n$ 的值为 $(1+i)$）：

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\cdots+(1+i).$$

这是一个首项为 $(1+i)$、公比为 $(1+i)$、项数为 n 的等比数列（注意首项与公比相同），其和为

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}=\frac{(1+i)^n-1}{d}\quad(\text{因为}(1+i)-1=i=d(1+i)).$$

□

命题 1.1.8 ($\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 与 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 的关系)**.**

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=\ddot{s}_{\overline{n}|}\cdot v^n,$$
$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}+d.$$

证明. 由定义直接可得：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{d}=\frac{(1+i)^n-1}{d}\cdot v^n=\ddot{s}_{\overline{n}|}\cdot v^n.$$

对于第二个关系，计算：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}&=\frac{d}{1-v^n}=\frac{d(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\\&=\frac{d[(1+i)^n-1]+d}{(1+i)^n-1}=d+\frac{d}{(1+i)^n-1}=d+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}.\end{aligned}$$

□

命题 1.1.9 (期末付年金与期初付年金的关系)**.** 设 $a_{\overline{n}|}$ 和 $s_{\overline{n}|}$ 为期末付年金的现值和终

值，$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 和 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 为期初付年金的现值和终值，则

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot (1+i), \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot (1+i),$$
$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1, \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1.$$

证明. 第一个关系：期初付款相当于每个付款提前一期发生，因此现值应乘以累积因子 $(1+i)$，即 $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)$。类似地，终值也满足 $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1+i)$。

第二个关系：$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 可视为一个 $n-1$ 期期末付年金 $a_{\overline{n-1}|}$ 加上立即支付的一个单位，即 $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$。$\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 可视为一个 $n+1$ 期期末付年金 $s_{\overline{n+1}|}$ 减去最后一期期末的付款 1，即 $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$。 □

下面我们给出任意时刻的年金值的定义：

延期年金的现值

定义 1.1.13 (延期年金). 若年金的首期付款延迟 m 期开始（$m \geq 0$），则称为延期 m 期的年金。

定理 1.1.10 (延期期末付年金的现值). 一笔延期 m 期、随后 n 期期末付款的年金，其在时间 0 的现值可表示为：

$$v^m \cdot a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}.$$

证明. 直观上，延期 m 期后 n 期年金的现值等于将 n 期年金现值 $a_{\overline{n}|}$ 折现 m 期，即 $v^m a_{\overline{n}|}$。另一方面，它也可视为一个 $m+n$ 期期末付年金的现值 $a_{\overline{m+n}|}$ 减去前 m 期（无付款）年金的现值 $a_{\overline{m}|}$，因为 $a_{\overline{m}|}$ 表示前 m 期每期末付款 1 的现值，而实际上前 m 期并无付款，故需减去。因此 $v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$。 □

定理 1.1.11 (延期期初付年金的现值). 类似地，对于延期 m 期、随后 n 期期初付款的年金，其在时间 0 的现值满足：

$$v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}.$$

证明. 证明思路同期末付情形。注意 $\ddot{a}_{\overline{m}|}$ 表示前 m 期每期初付款 1 的现值。 □

付款期间任意时刻的当前值

定理 1.1.12 (期末付年金在时刻 m 的当前值 $(0<m<n)$). 考虑 n 期期末付年金，在付款期间内任意时刻 m（m 为整数且 $0<m<n$）的当前值（即该时刻所有未来付款的现值与过去付款的积累值之和）满足：

$$a_{\overline{n}|}(1+i)^m = v^{n-m} \cdot s_{\overline{n}|} = s_{\overline{m}|} + a_{\overline{n-m}|}.$$

证明.

♡ 第一种视角：将时间 0 的现值 $a_{\overline{n}|}$ 积累 m 期到时刻 m，得到 $a_{\overline{n}|}(1+i)^m$。

♡ 第二种视角：将时间 n 的终值 $s_{\overline{n}|}$ 折现 $n-m$ 期到时刻 m，得到 $v^{n-m}s_{\overline{n}|}$。

♡ 第三种视角：时刻 m 的当前值等于已发生的 m 期付款的积累值（到时刻 m）加上剩余的 $n-m$ 期付款的现值（在时刻 m 的值）。已发生的 m 期付款形成期末付年金，其到时刻 m 的积累值为 $s_{\overline{m}|}$；剩余 $n-m$ 期付款构成一个 $n-m$ 期期末付年金，其在时刻 m 的现值为 $a_{\overline{n-m}|}$。因此总值为 $s_{\overline{m}|}+a_{\overline{n-m}|}$。

□

定理 1.1.13 (期初付年金在时刻 m 的当前值 $(0<m<n)$). 类似地，对于 n 期期初付年金，在时刻 m 的当前值满足：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^m = v^{n-m}\cdot\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{m}|}+\ddot{a}_{\overline{n-m}|}.$$

证明. 证明同期末付情形，只需将相应符号替换为期初付符号即可。 □

最后一期付款后的积累值

定理 1.1.14 (期末付年金在付款结束后 m 时刻的积累值). 考虑 n 期期末付年金，在最后一期付款后 m 时刻（即时间 $n+m$）的积累值满足：

$$s_{\overline{n}|}(1+i)^m = s_{\overline{m+n}|}-s_{\overline{m}|}.$$

证明. 将时间 n 的终值 $s_{\overline{n}|}$ 再积累 m 期，得 $s_{\overline{n}|}(1+i)^m$。另一方面，它也可视为一个 $m+n$ 期期末付年金的终值 $s_{\overline{m+n}|}$ 减去后 m 期（实际上并无付款）形成的年金终值 $s_{\overline{m}|}$。因此 $s_{\overline{n}|}(1+i)^m = s_{\overline{m+n}|}-s_{\overline{m}|}$。 □

定理 1.1.15 (期初付年金在付款结束后 m 时刻的积累值). 类似地，对于 n 期期初付年金，在时间 $n+m$ 的积累值满足：

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}(1+i)^m = \ddot{s}_{\overline{m+n}|}-\ddot{s}_{\overline{m}|}.$$

证明. 证明思路同期末付情形。 □

下面我们给出永续年金的定义：

定义 1.1.14 (永续年金). 若年金的付款次数没有限制，永远持续下去，则称为永续年金（*Perpetuity*）。永续年金的付款期限 $n\to\infty$，故其终值不存在（趋于无穷），但其现值存在有限值。

定理 1.1.16 (期末付永续年金的现值). 设每期期末付款 1，利率为 i，贴现因子 $v=(1+i)^{-1}$。期末付永续年金的现值记作 $a_{\overline{\infty}|}$，且有

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}.$$

定理 1.1.17 (期初付永续年金的现值). 设每期期初付款 1，利率为 i，实际贴现率 $d=\frac{i}{1+i}$。期初付永续年金的现值记作 $\ddot{a}_{\infty|}$，且有

$$\ddot{a}_{\infty|}=\lim_{n\to\infty}\ddot{a}_{n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-v^n}{d}=\frac{1}{d}.$$

1.1.4 收益率

定义 1.1.15 (收益率). 在金融活动中，投资者通过比较现金流入与流出来评估一项投资的收益情况。收益率（*Rate of Return*）是指使得投资过程中所有现金流的现值之和等于零的利率。在金融与保险实务中，收益率也常称为内部收益率（*Internal Rate of Return, IRR*）。

定理 1.1.18 (收益率的方程). 设一项投资在时刻 t 发生的净现金流为 R_t（通常规定现金流入为正，现金流出为负），投资期跨越 $t=0,1,\ldots,n$。则收益率 y 满足以下方程：

$$PV(y)=\sum_{t=0}^{n}\frac{R_t}{(1+y)^t}=0.$$

问题 1.1.1. 某人去世后，留下金额为 X 的遗产，其 3 个受益人经协商，决定按如下方式领取利息：

- ♡ A 受益人继承第 1 年至第 10 年末的利息；
- ♡ B 受益人继承第 11 年至第 20 年末的利息；
- ♡ C 受益人继承从第 21 年末及之后的所有利息。

设年利率为 i（复利计息）。假设受益人的寿命无限（即可以永久领取），问：你会选择成为哪名受益人?

解. 令本金 X 在复利 i 下的积累函数为 $A(t)=X(1+i)^t$。每年末产生的利息为：

$$I_t=A(t)-A(t-1)=X(1+i)^t-X(1+i)^{t-1}=Xi(1+i)^{t-1}.$$

各受益人领取利息的现值计算如下：

1. *A 受益人*：领取 $t=1,2,\ldots,10$ 共 10 年的利息。其领取的利息在 $t=0$ 的现值为：

$$PV_A=\sum_{t=1}^{10}\frac{Xi(1+i)^{t-1}}{(1+i)^t}=\sum_{t=1}^{10}Xi\cdot\frac{1}{1+i}=10\cdot\frac{Xi}{1+i}=10Xd,$$

   其中 $d=\frac{i}{1+i}$ 为实际贴现率。

2. *B 受益人*：领取 $t=11,12,\ldots,20$ 共 10 年的利息。其现值为：

$$PV_B=\sum_{t=11}^{20}\frac{Xi(1+i)^{t-1}}{(1+i)^t}=\sum_{t=11}^{20}\frac{Xi}{1+i}=10Xd\cdot v^{10},$$

   其中 $v=\frac{1}{1+i}$，v^{10} 是将这 10 年利息整体折现到 $t=0$ 的因子。

3. *C 受益人*：领取从 $t = 21$ 开始直至永远的所有利息。将第 t 年的利息 I_t 折现到 $t = 0$ 时刻的值为：
$$\frac{I_t}{(1+i)^t} = \frac{Xi(1+i)^{t-1}}{(1+i)^t} = Xi \cdot \frac{1}{1+i} = Xiv.$$
关键发现：对于任意 $t \geq 1$，每一年利息的现值均为常数 Xiv。

因此，C 受益人领取的无限期利息流的现值为：
$$PV_C = \sum_{t=21}^{\infty} Xiv = Xiv \sum_{t=21}^{\infty} 1.$$
由于求和项 $\sum_{t=21}^{\infty} 1$ 发散到 $+\infty$，且 $Xiv > 0$（当 $i > 0$ 时），故
$$PV_C = +\infty.$$

♡ A 受益人（$t = 1$ 至 10）：
$$PV_A = \sum_{t=1}^{10} Xiv = 10Xiv = 10Xd.$$

♡ B 受益人（$t = 11$ 至 20）：
$$PV_B = \sum_{t=11}^{20} Xiv = 10Xiv \cdot v^{10} = 10Xd \cdot v^{10}.$$

显然，PV_A 和 PV_B 均为有限值，而 $PV_C = +\infty$。

4. 结论：当 $i > 0$ 时，C 受益人的利息流现值无穷大，远大于 A 和 B 的有限现值。因此，应选择成为 C 受益人。

□

1.1.5 债务偿还

定义 1.1.16 (债务偿还的方式). 债务偿还的方式一般有以下三种：

♡ 满期偿还：借款者在贷款期满时一次性偿还贷款的本金和利息；

♡ 分期偿还：借款者在贷款期内，按一定的时间间隔，分期偿还贷款的本金和利息；

♡ 偿债基金：借款者每次向贷款者支付贷款利息，并且按期另存一笔款，建立一个基金，在贷款期满时这一基金恰好等于贷款本金，一次性偿还给贷款者。

1.2 债券价值

1.2.1 贴现债券

定义 1.2.1 (贴现债券). 贴现债券，又称零息票债券（*zero-coupon bond*），是一种以低于面值的价格发行，期间不支付利息，到期时按债券面值一次性偿还的债券。

定理 1.2.1 (贴现债券的内在价值). 设一张贴现债券的面值为 A，剩余到期时间为 T（通常以年为单位），投资者要求的收益率为 y（年复利），则该债券的内在价值（理论价格）V 为：

$$V = \frac{A}{(1+y)^T}.$$

注. 贴现债券的发行价格通常低于面值，其差额即为投资者持有期间所获的利息。内在价值公式是债券定价的基础，当市场实际价格低于 V 时，债券被低估，反之则被高估。

1.2.2 附息债券

定义 1.2.2 (附息债券). 附息债券，或称固定利息债券，是按照债券票面金额定期支付利息的债券。票面上可以附有作为定期支付利息凭证的息票，也可以不附息票。最常见的附息债券每半年或每年支付一次利息。

定理 1.2.2 (附息债券的内在价值). 设一张附息债券的面值为 A，剩余到期时间为 T（期数），每期支付的票面利息为 c，投资者要求的收益率为 y（每期复利），则该债券的内在价值 V 为：

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{A}{(1+y)^T}.$$

证明. 附息债券为投资者提供的现金流包括两部分：

1. 定期支付的利息：在 $t = 1, 2, \ldots, T$ 各期末收到利息 c。
2. 到期偿还的本金：在 $t = T$ 期末收到面值 A。

将所有现金流按投资者要求的收益率 y 折现到当前时刻（$t = 0$），求和即得债券的内在价值：

$$V = \frac{c}{(1+y)} + \frac{c}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{c}{(1+y)^T} + \frac{A}{(1+y)^T} = \sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{A}{(1+y)^T}.$$

□

注. 附息债券的内在价值等于其未来所有利息和本金现金流的现值之和。当债券的市场价格等于 V 时，投资者的实际收益率恰好等于要求的收益率 y。

1.2.3 统一公债

定义 1.2.3 (统一公债). 统一公债（*Consols*）是一种没有到期日的特殊附息债券。债券发行人承诺永久性地每期支付固定金额的利息，但永不偿还本金。历史上最著名的统一公债是英格兰银行在 *18* 世纪发行的英国统一公债（*English Consols*）。

定理 1.2.3 (统一公债的内在价值). 设统一公债每期支付的固定利息为 c，投资者要求

的收益率为 y（每期复利），则该公债的内在价值 V 为：

$$V = \frac{c}{y}.$$

Proof. 统一公债提供的现金流是一个永续年金：在 $t = 1, 2, 3, \ldots$ 各期末永久支付利息 c。将这些现金流按收益率 y 折现到当前时刻（$t = 0$），其现值为：

$$V = \frac{c}{(1+y)} + \frac{c}{(1+y)^2} + \frac{c}{(1+y)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c}{(1+y)^t}.$$

这是一个无穷等比级数，首项 $a = \frac{c}{1+y}$，公比 $r = \frac{1}{1+y}$（满足 $|r| < 1$）。利用无穷等比级数求和公式 $S = \frac{a}{1-r}$，得：

$$V = \frac{\frac{c}{1+y}}{1 - \frac{1}{1+y}} = \frac{\frac{c}{1+y}}{\frac{y}{1+y}} = \frac{c}{y}.$$

□

注. 统一公债的价值公式 $V = c/y$ 是金融学中永续年金现值公式的直接应用。它表明，统一公债的价值与每期利息 c 成正比，与投资者要求的收益率 y 成反比。当市场利率下降时，统一公债的价格会上升，反之则下降。

1.2.4 判断债券价格高估或低估的两种方法

问题 1.2.1 (判断债券价格高估或低估的两种方法). 以附息债券为例，设债券当前市场价格为 P，面值为 A，剩余期限为 T 期，每期支付利息 c，投资者要求的收益率为 y。

方法一：比较收益率

定义 1.2.4 (到期收益率). 债券的到期收益率（*yield to maturity*），记作 k，是隐含在当前债券价格 P 中的内部收益率，即满足以下方程的 k：

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+k)^t} + \frac{A}{(1+k)^T}.$$

定理 1.2.4 (收益率比较法则). 比较投资者要求的收益率 y 与债券的到期收益率 k：

- ♡ 若 $y > k$，则债券价格 P 被高估（应卖出）；
- ♡ 若 $y < k$，则债券价格 P 被低估（应买入）；
- ♡ 若 $y = k$，则债券价格 P 等于其内在价值，处于合理水平。

证明. 若 $y > k$，说明投资者要求更高的回报率，而债券当前价格所隐含的回报率 k 较低，因此债券相对投资者的要求而言定价过高（价格被高估）。反之，若 $y < k$，则债券提供的回报率高于投资者要求，债券定价偏低（价格被低估）。 □

方法二：比较内在价值与价格

定义 1.2.5 (净现值). 债券的净现值（*Net Present Value, NPV*）定义为债券内在价值 V 与市场价格 P 的差额：

$$NPV = V - P.$$

其中内在价值 V 按投资者要求的收益率 y 计算：

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{A}{(1+y)^T}.$$

定理 1.2.5 (净现值法则).

- ♡ 若 $NPV > 0$，则债券价格 P 被低估（应买入）；
- ♡ 若 $NPV < 0$，则债券价格 P 被高估（应卖出）；
- ♡ 若 $NPV = 0$，则债券价格 P 等于其内在价值。

证明. 当 $V > P$ 时，债券的内在价值高于其市场价格，说明债券当前交易价格偏低，具有投资价值，应买入。反之，当 $V < P$ 时，市场价格高于其理论价值，债券被高估，应卖出或避免购买。 □

1.2.5 债券定价的五个原理

定理 1.2.6 (定理一：价格与收益率的反向关系). 债券的价格与债券的收益率成反比关系。即当债券价格上升时，其收益率下降；反之，当债券价格下降时，其收益率上升。

证明. 由债券定价公式 $P = \sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{A}{(1+y)^T}$ 可知，价格 P 是收益率 y 的减函数。因为分母 $(1+y)^t$ 随 y 增加而增大，导致各期现金流的现值减小，故债券价格下降。 □

定理 1.2.7 (定理二：到期时间与价格波动幅度成正比). 当市场预期收益率变动时，债券的到期时间与债券价格的波动幅度成正比关系。换言之，到期时间越长，价格波动幅度越大；到期时间越短，价格波动幅度越小。

证明. 债券价格对收益率 y 的敏感性（久期概念）随着到期时间 T 的增加而增加。直观上，长期债券的现金流分布在更远的未来，其现值受折现率 y 变动的影响更大。 □

定理 1.2.8 (定理三：波动幅度随时间临近而递减). 随着债券到期时间的临近，债券价格的波动幅度减少，并且是以递增的速度减少；反之，到期时间越长，债券价格波动幅度增加，并且是以递减的速度增加。

证明. 价格波动幅度（即价格对收益率的二阶导数）随时间变化呈现凸性。当债券临近到期时，其价格收敛于面值，波动性迅速降低；而当期限很长时，增加期限对波动性的边际贡献逐渐减小。 □

注. 定理二和定理三不仅适用于不同债券之间的比较，也适用于同一债券在其存续期内价格波动特征的变化。

定理 1.2.9 (定理四：价格波动的非对称性（凸性）). 对于期限既定的债券，由收益率下降导致的债券价格上升的幅度，大于同等幅度收益率上升导致的债券价格下降的幅度。换言之，对于同等幅度的收益率变动，收益率下降给投资者带来的利润大于收益率上升带来的损失。

证明. 债券价格-收益率曲线是凸的（convex）。设当前收益率为 y_0，对应价格 P_0。当收益率变动 Δy 时，价格变动 ΔP 可近似为泰勒展开：$\Delta P \approx -D \cdot P_0 \cdot \Delta y + \frac{1}{2}C \cdot P_0 \cdot (\Delta y)^2$，其中 D 为久期，C 为凸性。由于凸性项 $C > 0$，无论 Δy 正负，二次项均为正，从而使得价格上升的幅度大于下降的幅度。 □

定理 1.2.10 (定理五：票息率与价格波动幅度成反比). 对于给定的收益率变动幅度，债券的票息率与债券价格的波动幅度成反比关系。换言之，票息率越高，债券价格的波动幅度越小。此定理不适用于一年期债券和统一公债。

证明. 高票息债券的现金流回报更集中于前期，其久期通常较短，因此对收益率变动的敏感性较低。对于零息债券（票息率为 0），其久期等于到期时间，价格波动最大。一年期债券和统一公债因期限特殊（极短或无限），不满足此一般关系。 □

1.2.6 基于复利数学的债券定价公式

定义 1.2.6 (债券定价的基本参数). 设债券面值为 F，票息率为 r，每期票息支付额为 Fr，债券剩余期限为 n 期，到期偿还值（通常为面值）为 C，市场要求的收益率为 i，贴现因子 $v = \frac{1}{1+i}$。

定理 1.2.11 (基于复利数学的债券定价基本公式). 债券的理论价格 P 等于未来所有票息支付的现值与到期偿还值的现值之和：

$$P = Fr \cdot a_{\overline{n}|i} + Cv^n.$$

若到期按面值偿还，则为：

$$P = Fr \cdot a_{\overline{n}|i} + Fv^n.$$

证明. 债券提供的现金流包括两部分：

1. 每期末支付的票息 Fr，共 n 次，形成一个 n 期期末付年金。该年金的现值为 $Fr \cdot a_{\overline{n}|i}$，其中 $a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$。

2. 到期时偿还的金额 C，其现值为 Cv^n。

将两部分现值相加即得债券价格 P。 □

定理 1.2.12 (溢价/折价公式). 当到期偿还值 $C = F$（即按面值偿还）时，债券价格 P 可表示为：

$$P = F + F(r-i)a_{\overline{n}|i}.$$

证明. 由基本公式 $P = Fra_{\overline{n}|i} + Fv^n$，并将 $a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$ 代入：

$$\begin{aligned}
P &= Fr \cdot \frac{1-v^n}{i} + Fv^n \\
&= \frac{Fr}{i}(1-v^n) + Fv^n \\
&= F\left[\frac{r}{i}(1-v^n) + v^n\right] \\
&= F\left[1 + \left(\frac{r}{i} - 1\right)(1-v^n)\right] \\
&= F + F(r-i) \cdot \frac{1-v^n}{i} \\
&= F + F(r-i)a_{\overline{n}|i}.
\end{aligned}$$

注.

- ♡ 若票息率 r 大于市场收益率 i，则 $r - i > 0$，债券价格 $P > F$，称为溢价（*Premium*）发行。
- ♡ 若 $r < i$，则 $P < F$，称为折价（*Discount*）发行。
- ♡ 若 $r = i$，则 $P = F$，称为平价（*Par*）发行。

公式 $P = F + F(r-i)a_{\overline{n}|i}$ 直观地表明，债券价格偏离面值的部分等于票息率与市场收益率之差所导致的年金现值。

□

1.2.7 久期

定义 1.2.7 (马考利久期). 马考利久期（*Macaulay duration*）由 *F.R. Macaulay (1938)* 提出，是债券未来各期现金流的支付时间的加权平均数，权重为各期现金流现值占债券总价格的比重。计算公式为：

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+y)^t} \times t}{P} = \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{PV(C_t)}{P} \times t\right],$$

其中：

- ♡ D：马考利久期；
- ♡ P：债券当前市场价格，$P = \sum_{t=1}^{T} PV(C_t)$；
- ♡ C_t：债券在第 t 期支付的现金流（利息或本金）；
- ♡ T：债券剩余支付期数；
- ♡ y：债券的到期收益率（年复利）；

♡ $PV(C_t)$：第 t 期现金流的现值，$PV(C_t) = \frac{C_t}{(1+y)^t}$。

注. 久期的大小取决于三个因素：各期现金流分布、到期收益率和到期时间。

定理 1.2.13 (马考利久期的六个定理).

1. **定理一**：只有贴现债券（零息债券）的马考利久期等于它们的到期时间。
2. **定理二**：附息债券（直接债券）的马考利久期小于或等于它们的到期时间。仅剩最后一期就要期满的附息债券，其久期等于到期时间（即 $D=1$）。
3. **定理三**：统一公债（永续债券）的马考利久期等于 $1+\frac{1}{y}$，其中 y 是计算现值采用的贴现率。
4. **定理四**：在到期时间相同的条件下，票息率越高，久期越短。
5. **定理五**：在票息率不变的条件下，到期时间越长，久期一般也越长。
6. **定理六**：在其他条件不变的情况下，债券的到期收益率越低，久期越长。

定义 1.2.8 (债券组合的马考利久期). 设债券组合包含 k 只债券，第 i 只债券的马考利久期为 D_i，其市场价值占组合总市场价值的权重为 W_i。则该债券组合的马考利久期 D_p 为各成分债券久期的加权平均：

$$D_p = \sum_{i=1}^{k} W_i D_i.$$

定义 1.2.9 (修正久期). 当收益率 y 以年复利形式表示时，修正久期 (*Modified Duration*) 定义为：

$$D^* = \frac{D}{1+y}.$$

修正久期直接衡量债券价格对收益率变动的百分比敏感性，即 $\frac{\Delta P}{P} \approx -D^*\Delta y$。

1.2.8 凸度

定义 1.2.10 (凸度). 凸度 (*Convexity*) 是债券价格对收益率二阶导数的标准化度量，反映价格-收益率曲线的曲度。定义为：

$$C = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

其中 P 为债券价格，y 为收益率。

定理 1.2.14 (久期的缺陷). 在现实生活中，债券价格变动率与收益率变动之间的关系是非线性的（凸性关系）。若仅用久期（一阶近似）估计，则收益率上升或下降相同幅度时，债券价格变动率的绝对值被估计为相同。这与事实不符，因为价格-收益率曲线

是凸的（*convex*）。

解释. 设债券价格为 P，收益率为 y。利用泰勒展开：

$$\Delta P \approx \frac{\partial P}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\Delta y)^2.$$

久期仅包含一阶项 $\frac{\partial P}{\partial y}\Delta y$，忽略了二阶项 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\Delta y)^2$。当 $|\Delta y|$ 较大时，二阶项的影响不可忽略，导致久期近似出现误差。 □

定理 1.2.15 (考虑凸度的价格变动近似公式)**.** 债券价格变动率的更精确近似为：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^*\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2,$$

其中 $D^* = \frac{D}{1+y}$ 为修正久期，D 为马考利久期。

证明. 对债券价格 $P(y)$ 在 y_0 处作二阶泰勒展开：

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(y_0 + \Delta y) - P(y_0)\\ &\approx P'(y_0)\Delta y + \frac{1}{2}P''(y_0)(\Delta y)^2.\end{aligned}$$

两边除以 P：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{P'(y_0)}{P}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{P''(y_0)}{P}(\Delta y)^2.$$

由定义，$\frac{P'(y_0)}{P} = -D^*$，$\frac{P''(y_0)}{P} = C$，代入即得。 □

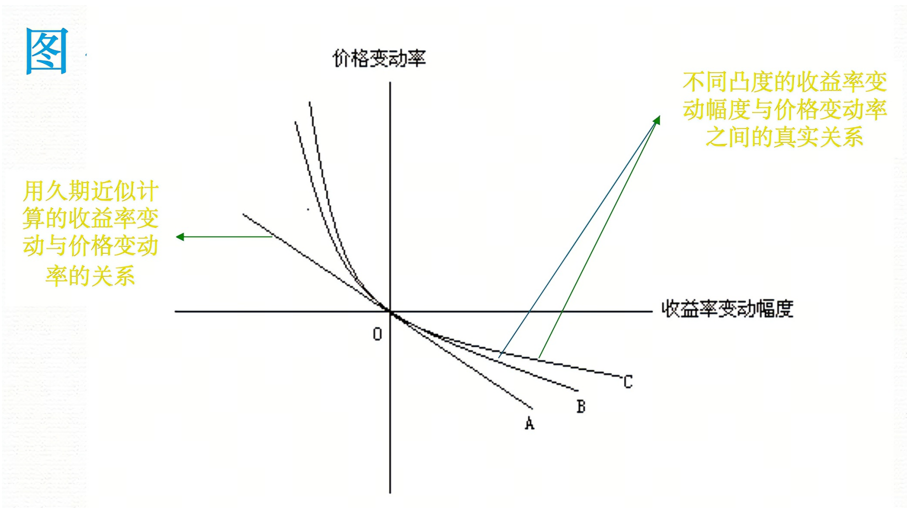

图 1.1: 久期近似与真实价格-收益率关系

图注说明：

♡ 曲线 A、B、C 表示不同凸度的债券价格-收益率真实关系（凸性曲线）。

♡ 直线表示仅用久期（一阶近似）得到的线性关系。

♡ 当收益率下降时，真实价格上升率高于久期近似值，且凸度越大，高估越多。

♡ 当收益率上升时，真实价格下降率低于久期近似值，且凸度越大，低估越少。

定理 1.2.16 (凸度的经济含义).

1. 当收益率变动幅度较大时，久期近似误差显著，必须考虑凸度调整。
2. 在其他条件相同的情况下，投资者应偏好凸度较大的债券，因为：
   - ♡ 收益率下降时，凸度大的债券价格上涨更多；
   - ♡ 收益率上升时，凸度大的债券价格下跌更少。

   即凸度提供了“涨多跌少”的非对称保护。

1.3 股票价值分析

1.3.1 股息贴现模型概述

收入资本化法认为任何资产的内在价值取决于持有资产可能带来的未来现金流收入的现值。

$$V=\frac{C_1}{(1+y)}+\frac{C_2}{(1+y)^2}+\frac{C_3}{(1+y)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{C_t}{(1+y)^t} \tag{1.1}$$

其中，假定对未来所有的预期现金流选用相同的贴现率，V 代表资产的内在价值，C_t 表示第 t 期的预期现金流，y 是必要的收益率，或投资者要求的收益率。

股息贴现模型 是收入资本化法运用于普通股价值分析中的模型。

定义 1.3.1 (股息贴现模型基本公式). 普通股的内在价值 V 为所有未来股息红利的现值之和：

$$V=\frac{D_1}{(1+y)}+\frac{D_2}{(1+y)^2}+\frac{D_3}{(1+y)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{(1+y)^t}$$

其中，D_t 是普通股第 t 期预计支付的股息和红利，y 是必要的收益率（资本化率）。

每期股息增长率定义为：

$$g_t=\frac{D_t-D_{t-1}}{D_{t-1}} \tag{1.2}$$

根据股息增长率的不同假定，股息贴现模型可分为：

- ♡ 零增长模型
- ♡ 不变增长模型
- ♡ 多元增长模型
- ♡ 三阶段股息贴现模型

1.3.2 判断股票价格被低估还是高估

目的：通过判断股票价值的低估或是高估来指导证券的买卖。

方法一：计算股票投资的净现值 NPV：

$$NPV = V - P = \left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+y)^t}\right] - P \tag{1.3}$$

当 $NPV > 0$ 时，股票被低估，应买入；当 $NPV < 0$ 时，股票被高估，应卖出。

方法二：比较必要的收益率 y 与内部收益率 IRR 的大小。

定义 1.3.2 (内部收益率). 内部收益率 IRR 是使净现值等于零时的贴现率，即满足下式的 IRR：

$$NPV = V - P = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{(1+IRR)^i}\right] - P = 0 \tag{1.4}$$

若 $IRR > y$，则该股票被低估；若 $IRR < y$，则该股票被高估。

注. 两种判断方法在本质上是一致的，都基于对资产内在价值与市场价格 P 的比较。方法一直接计算价值与价格的差额，方法二则比较了市场隐含收益率 IRR 与投资者要求的收益率 y。

1.3.3 几种股息贴现模型

定义 1.3.3 (零增长模型 (Zero-Growth Model)). 模型假设：股息不变，即 $g_t = 0$。

$$g_t = 0 \tag{1.5}$$

把式(1.5)代入基本公式(1.1)可得零增长模型：

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+y)^t} = D_0 \left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+y)^t}\right] \tag{1.6}$$

当 y 大于零时，$1/(1+y) < 1$，上式可简化为：

$$V = \frac{D_0}{y} \tag{1.7}$$

定义 1.3.4 (不变增长模型 (Constant-Growth Model)). 假定条件：

- ♡ 股息的支付在时间上是永久性的，即式(1.1)中的 t 趋向于无穷大 ($t \to \infty$)；
- ♡ 股息的增长速度是一个常数，即 $g_t = g$；
- ♡ 式(1.1)中的必要的收益率 y 大于股息增长率 g ($y > g$)。

由上述假设条件可得不变增长模型：

$$V = \frac{D_1}{y-g} = \frac{D_0(1+g)}{y-g} \tag{1.8}$$

其中 D_0、D_1 分别是初期和第一期支付的股息。

定义 1.3.5 (三阶段增长模型 (Three-Stage-Growth Model)). 三阶段增长模型由莫洛多斯基（*N. Molodovsky, 1965*）提出，它将股息增长分为三个不同的阶段：

1. 阶段一（A 点之前）：股息增长率为一个常数 g_a。
2. 阶段二（A 点到 B 点之间）：股息增长率以线性的方式从 g_a 变化为 g_n。
3. 阶段三（B 点之后）：股息增长率为一个新的常数 g_n。

在阶段二（转折期）内，第 t 期的股息增长率 g_t 可表示为：

$$g_t = g_a - (g_a - g_n)\frac{(t-A)}{(B-A)} \quad (9) \tag{1.9}$$

三阶段增长模型的计算公式为：

$$V = D_0 \sum_{t=1}^{A}\left(\frac{1+g_a}{1+y}\right)^t + \sum_{t=A+1}^{B-1}\left[\frac{D_{t-1}(1+g_t)}{(1+y)^t}\right] + \frac{D_{B-1}(1+g_n)}{(1+y)^{B-1}(y-g_n)} \tag{1.10}$$

式(1.10)中的三项分别对应于股息的三个增长阶段。

注. 模型的缺陷：

- ♡ 根据式(1.10)，在已知当前市场价格 P 的条件下，无法直接解出内部收益率 IRR，因此很难运用内部收益率的指标判断股票价格的低估或高估。
- ♡ 式(1.10)中的第二部分，即转折期内的现金流贴现计算也比较复杂。

定义 1.3.6 (H 模型). H 模型假定如下：

- ♡ 股息的初始增长率为 g_a，然后以线性的方式递减或递增。
- ♡ 从 $2H$ 期后，股息增长率成为一个常数 g_n，即长期的正常的股息增长率。
- ♡ 在股息递减或递增的过程中，在 H 点上的股息增长率 g_H 恰好等于初始增长率 g_a 和常数增长率 g_n 的平均数，即 $g_H = \frac{g_a+g_n}{2}$。
- ♡ 当 $g_a > g_n$ 时，在 $2H$ 点之前的股息增长率为递减；当 $g_a < g_n$ 时，则为递增。

H 模型的股票内在价值的计算公式为：

$$V = \frac{D_0}{(y-g_n)}\left[(1+g_n) + H(g_a - g_n)\right] \tag{1.11}$$

H 模型 VS. 三阶段增长模型

与三阶段增长模型的公式 (1.10) 相比，H 模型的公式 (1.11) 有以下几个特点：

1. 在考虑了股息增长率变动的情况下，大大简化了计算过程。

2. 在已知股票当前市场价格 P 的条件下，可以直接计算内部收益率。由净现值公式：
$$NPV = V - P = \frac{D_0}{(y-g_n)}\left[(1+g_n) + H(g_a - g_n)\right] - P = 0$$
可以推出，
$$IRR = \frac{D_0}{P}\left[(1+g_n) + H(g_a - g_n)\right] + g_n$$
3. 在假定 H 位于三阶段增长模型转折期的中点（即 H 位于股息增长率从 g_a 线性变化到 g_n 的时间的中点）的情况下，H 模型与三阶段增长模型的结论非常接近。
4. 当 g_a 等于 g_n 时，式 (1.11)等于式 (1.8)，所以，不变股息增长模型也是 H 模型的一个特例。
5. 如果将式 (1.11)改写为：
$$V = \frac{D_0\left(1+g_n\right)}{(y-g_n)} + \frac{D_0 H\left(g_a - g_n\right)}{(y-g_n)} \tag{1.12}$$
可以看出股票的内在价值由两部分组成：
   (a) 式 (1.12)的第一项，根据长期的正常的股息增长率 g_n 决定的现金流贴现价值；
   (b) 式(1.12)的第二项，由超常收益率 g_a 决定的现金流贴现价值，且这部分价值与 H 成正比例关系。

定义 1.3.7 (多元增长模型 (Multiple-Growth Model))**.** 多元增长模型正是基于企业生命周期学说而引入的。它假定在某一时点 T 之后股息增长率为一常数 g，但是在这之前（$t \leq T$）股息增长率是可变的。多元增长模型的内在价值计算公式为：
$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t}{(1+y)^t} + \frac{D_T}{(y-g)(1+y)^T} \tag{1.13}$$
其中，第一部分计算的是可变增长期（$t = 1$ 到 T）内股息的贴现值，第二部分计算的是 T 期后以常数 g 永续增长的股息在 T 时点的现值，再将其贴现回当前时点。

1.3.4 市盈率模型

市盈率模型的优缺点

♡ 优点：

1. 可以直接应用于不同收益水平的股票价格之间的比较。
2. 对于那些在某段时间内没有支付股息的股票，只要股票每股收益大于零就可以使用市盈率模型，而股息贴现模型却不能使用。
3. 虽然市盈率模型同样需要对有关变量进行预测，但是所涉及的变量预测比股息贴现模型要简单。只要股票每股收益大于零，就可以使用市盈率模型。

♡ 缺点：

1. 市盈率模型的理论基础较为薄弱，而股息贴现模型的逻辑性较为严密。
2. 在进行股票之间的比较时，市盈率模型只能决定不同股票市盈率的相对大小，却不能决定股票绝对的市盈率水平。

不变增长模型下的市盈率

当市场达到均衡时，股票价格 P 应等于其内在价值 V。由不变增长模型公式（即式(1.8)）：

$$P = V = \frac{D_1}{y-g} \tag{1.14}$$

其中，每期股息等于当期每股收益（E）乘以派息比率（b），即 $D_1 = E_1 \times b$。代入可得：

$$P = \frac{E_1 \times b}{y-g} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{E_1} = \frac{b}{y-g} \tag{1.15}$$

式 (1.15) 即为基于不变增长模型的市盈率决定公式。

市盈率决定因素

根据式 (1.15)，市盈率（P/E）的决定因素可分为两个层次：

♡ 第一个层次的市盈率决定因素

市盈率直接取决于三个变量：

1. 派息比率 b：市盈率与股票的派息比率成正比。
2. 贴现率 y：市盈率与贴现率负相关。
3. 股息增长率 g：市盈率与股息增长率正相关。

♡ 第二层次的市盈率决定因素

第一层次中的变量 g 和 y 又由更基本的因素决定，因此需要进行：

1. 股息增长率的决定因素分析。
2. 贴现率的决定因素分析（通常基于资本资产定价模型等）。

股息增长率的决定因素

在股息贴现模型中，股息增长率 g 是一个关键变量。其决定因素分析基于以下三个假定：

1. 派息比率固定不变，恒等于 b，即 $D_t = bE_t$；
2. 股东权益收益率（Return on Equity, ROE）固定不变，等于一个常数；
3. 公司没有外部融资。

股息增长率定义为相邻两期股息的相对变化，推导过程如下：

$$\begin{aligned}
g &= \frac{D_1 - D_0}{D_0} \xrightarrow{D_1=bE_1, D_0=bE_0} \frac{bE_1 - bE_0}{bE_0} \\
&= \frac{E_1 - E_0}{E_0} \xrightarrow{ROE=E_1/BV_0=E_0/BV_{-1}} \frac{ROE \cdot BV_0 - ROE \cdot BV_{-1}}{ROE \cdot BV_{-1}} \\
&= \frac{BV_0 - BV_{-1}}{BV_{-1}} \xrightarrow{BV_0=BV_{-1}+E_0(1-b)} \frac{E_0(1-b)}{BV_{-1}} \\
&= ROE \cdot (1-b)
\end{aligned}$$

因此，股息增长率的决定公式为：

$$g = ROE(1-b) \tag{1.16}$$

ROE 的决定因素

股东权益收益率（ROE）有两种计算方式：

1. 以每股的（税后）收益除以每股的股东权益账面价值：
$$ROE = \frac{E}{BV} \tag{1.17}$$
2. 以公司总的税后收益（Earnings After Tax, EAT）除以公司总的股东权益账面价值（Equity, EQ）：
$$ROE = \frac{EAT}{EQ} \tag{1.18}$$

对式 (1.18) 进行分解可得：

$$ROE = \frac{EAT}{EQ} = \frac{\frac{EAT}{A}}{\frac{A}{EQ}} \times \frac{A}{EQ} = \frac{EAT}{A} \times \frac{A}{EQ} = ROA \times L \tag{1.19}$$

其中，A 代表公司总资产，ROA 为总资产收益率，$L = A/EQ$ 为杠杆比率。

进一步地，总资产收益率 ROA 可以分解为销售净利率（Profit Margin, PM）与总资产周转率（Asset Turnover, ATO）的乘积：

$$ROA = \frac{EAT}{A} = \frac{EAT}{S} \times \frac{S}{A} = PM \times ATO \tag{1.20}$$

其中 S 为销售收入。

将式 (1.19) 与式 (1.20) 结合，可得 ROE 的决定公式：

$$ROE = PM \times ATO \times L \tag{1.21}$$

股息增长率的决定因素分析小结

将式 (1.21) 代入式 (1.16) 中，可得股息增长率的完整决定公式：

$$g = ROE(1-b) = PM \times ATO \times L \times (1-b) \tag{1.22}$$

由此可见，股息增长率 g 与公司的税后净利润率（PM）、总资产周转率（ATO）和杠杆比率（L）成正比，与派息比率 b 成反比。

贴现率的决定因素分析

根据资本资产定价模型（CAPM），证券市场线（SML）给出了第 i 种证券的期望收益率（即贴现率 y_i）：

$$y_i = r_f + (r_m - r_f)\beta_i$$

其中，

- ♡ y_i：投资第 i 种证券的期望收益率，即贴现率；
- ♡ r_f：无风险资产的收益率；
- ♡ r_m：市场组合的期望收益率；
- ♡ β_i：第 i 种证券的贝塔系数，衡量该证券的系统性风险。

因此，贴现率 y 主要取决于：无风险资产的收益率 r_f、市场组合的期望收益率 r_m 以及该证券的贝塔系数 β_i。

贝塔系数的决定因素

哈马达（Hamada, 1972）从理论上证明了贝塔系数是证券所属公司的杠杆比率（或权益比率 L）的增函数。汤普森（Thompson, 1976）等人则进行了实证验证。可以将贝塔系数表示为：

$$\beta_i = f(L, \delta)$$

其中，L 为杠杆比率，δ 表示除杠杆比率之外影响贝塔系数的其他因素。

$$y = r_f + (r_m - r_f)f(L, \delta)$$

这表明贴现率 y 通过贝塔系数间接地受到公司杠杆比率 L 等因素的影响。

零增长的市盈率模型

在零增长模型中，股息增长率 $g = 0$，派息比率 b 通常为 1（所有收益用于分红）。由不变增长市盈率模型公式可得：

$$\frac{P}{E} = \frac{b}{y-g} = \frac{1}{y} \tag{1.23}$$

与不变增长市盈率模型相比，零增长市盈率模型中决定市盈率的因素仅贴现率 y 一项，并且市盈率与贴现率成反比关系。零增长模型是股息增长率等于零时不变增长模型的一种特例。

多元增长市盈率模型

多元增长模型假设在时点 T 之后股息以常数 g 增长，之前股息增长率可变。其内在价值公式为：

$$P = V = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t}{(1+y)^t} + \frac{D_{T+1}}{(y-g)(1+y)^T} \tag{1.24}$$

其中，$D_t = b_t E_t = b_t E_0 \prod_{i=1}^{t}(1+g_i)$，这里 E_t 是第 t 期的每股收益，b_t 是第 t 期的派息比率，g_i 是第 i 期的股息增长率。

将 D_t 的表达式代入式(1.24)，可得：

$$P = E_0 \sum_{t=1}^{T} \frac{b_t \prod_{i=1}^{t}(1+g_i)}{(1+y)^t} + E_0 \frac{b(1+g)\prod_{i=1}^{T}(1+g_i)}{(y-g)(1+y)^T} \tag{1.25}$$

由式(1.25)可知，多元增长市盈率模型中的市盈率决定因素同样包括了贴现率 y、各期派息比率 b_t 和股息增长率 g_i。

派息比率与市盈率之间的关系

将股息增长率决定公式 $g = ROE(1-b)$ 代入市盈率公式，可得：

$$\begin{aligned}
\frac{P}{E} &= \frac{b}{y-g} = \frac{b}{y - ROE(1-b)} \\
&= \frac{b}{y - ROA \times L \times (1-b)} \\
&= \frac{1}{ROE + \frac{y-ROE}{b}}
\end{aligned}$$

派息比率 b 对市盈率 P/E 的影响取决于贴现率 y 与股东权益收益率 ROE 的相对大小：

- ♡ 若 $y > ROE$，则市盈率与派息比率 b 正相关；
- ♡ 若 $y < ROE$，则市盈率与派息比率 b 负相关；
- ♡ 若 $y = ROE$，则市盈率与派息比率 b 不相关。

可见，派息比率对市盈率的影响是不确定的。在公司发展初期，股东权益收益率 ROE 通常较高，可能超过股票投资的期望回报率 y，此时提高派息率会使市盈率降低，因此公司倾向于保持较低的派息率；当公司进入成熟期后，ROE 降低并可能低于 y，此时提高派息率会使市盈率升高，公司倾向于提高派息率。

杠杆比率与市盈率之间的关系

同样基于公式 $\frac{P}{E} = \frac{b}{y-ROE(1-b)}$ 和 $ROE = ROA \times L$，分析杠杆比率 L 的影响：

$$\frac{P}{E} = \frac{b}{y - ROA \times L \times (1-b)}$$

杠杆比率 L 对市盈率的影响体现在分母的减数和被减数中：

- ♡ 在被减数（贴现率 y）中：当杠杆比率 L 上升时，公司的财务风险增加，股票的贝塔系数 β 上升，从而导致贴现率 y 上升，这倾向于使市盈率下降。
- ♡ 在减数 $ROA \times L \times (1-b)$ 中：杠杆比率 L 与股东权益收益率 ROE（即 $ROA \times L$）成正比。当 L 上升时，减数增大，这倾向于使市盈率上升。

因此，杠杆比率 L 对市盈率的净影响取决于上述两种相反效应的相对强弱，其影响方向并不确定。

2. 投资组合理论

2.1 金融风险的定义和类型

略略略。。。

2.2 投资收益与风险度量

2.2.1 单个证券收益与风险的度量

单个证券收益的度量

♡ 证券投资的单期收益率：

$$R = \frac{D_t + (P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} \tag{2.1}$$

♡ 对数收益率：

$$r = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \tag{2.2}$$

2.2.2 两种证券组合收益与风险的度量

两种证券的收益率分别记为 r_1 和 r_2，其组合权重为 x_1 和 x_2，满足 $x_1 + x_2 = 1$。

♡ 组合的收益率：

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 \tag{2.3}$$

♡ 组合的预期收益率：

$$E(r_p) = x_1 E(r_1) + x_2 E(r_2) \tag{2.4}$$

♡ 组合的风险（用收益率的方差表示）：

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} \tag{2.5}$$

两种证券收益之间的相关性

♡ 协方差：$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(r_1, r_2)$

♡ 相关系数：

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{2.6}$$

组合收益与风险的关系分析

由约束条件 $x_1 + x_2 = 1$ 和预期收益率公式 (2.4)，可解出权重：

$$x_1 = \frac{\mu_w - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad x_2 = \frac{\mu_w - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \tag{2.7}$$

其中 $\mu_w = E(r_p)$, $\mu_1 = E(r_1)$, $\mu_2 = E(r_2)$。

将 (2.7) 代入方差公式 (2.5)，并记 $V_{11} = \sigma_1^2$, $V_{22} = \sigma_2^2$, $V_{12} = \sigma_{12}$，可得：

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= V_{11}\left(\frac{\mu_w - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 - 2V_{12}\left(\frac{(\mu_w - \mu_1)(\mu_w - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\right) + V_{22}\left(\frac{\mu_w - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 \\ &= \frac{(V_{11}(\mu_w - \mu_2) - V_{12}(\mu_w - \mu_1))^2 + (V_{11}V_{22} - V_{12}^2)(\mu_w - \mu_1)^2}{V_{11}(\mu_1 - \mu_2)^2}\end{aligned} \tag{2.8}$$

假定协方差矩阵 $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix}$ 是正定的，即 $V_{11} > 0$ 且 $V_{11}V_{22} - V_{12}^2 > 0$，则式 (2.8) 可化为：

$$d\sigma_w^2 - a(\mu_w - b)^2 = c, \quad a, c, d > 0 \tag{2.9}$$

这在 (σ_w, μ_w) 平面上是一条开口向右的双曲线（因 $\sigma_w \geq 0$，故仅取右半支）。

特殊情形分析

记 σ_1 和 σ_2 为标准差，$r_{12}=\rho_{12}$ 为相关系数。

情形 1：完全正相关 $r_{12}=1$

此时 $V_{12}=\sigma_1\sigma_2$，式 (2.8) 退化为：

$$\sigma_w^2=(\sigma_1x_1+\sigma_2x_2)^2=\frac{[\sigma_1(\mu_w-\mu_2)-\sigma_2(\mu_w-\mu_1)]^2}{(\mu_1-\mu_2)^2} \tag{2.10}$$

假设 $\mu_1>\mu_2$，开方并选取符号以保证 $\mu_w=\mu_1$ 时 $\sigma_w=\sigma_1$，$\mu_w=\mu_2$ 时 $\sigma_w=\sigma_2$，可得：

$$\sigma_w=\frac{\sigma_1(\mu_w-\mu_2)-\sigma_2(\mu_w-\mu_1)}{\mu_1-\mu_2} \tag{2.11}$$

这是在 (σ_w,μ_w) 平面上连接点 (σ_1,μ_1) 和 (σ_2,μ_2) 的直线（除去 $\sigma_w<0$ 部分）。该直线与 μ_w 轴交于点 $(0,(\sigma_1\mu_2-\sigma_2\mu_1)/(\sigma_1-\sigma_2))$，该纵坐标即为该情形下的无风险利率。

情形 2：完全负相关 $r_{12}=-1$

此时 $V_{12}=-\sigma_1\sigma_2$，式 (2.8) 退化为：

$$\sigma_w^2=(\sigma_1x_1-\sigma_2x_2)^2=\frac{[\sigma_1(\mu_w-\mu_2)+\sigma_2(\mu_w-\mu_1)]^2}{(\mu_1-\mu_2)^2} \tag{2.12}$$

对两端开方，并假设 $\mu_1>\mu_2$。为保证 $\mu_w=\mu_1$ 时 $\sigma_w=\sigma_1$ 以及 $\mu_w=\mu_2$ 时 $\sigma_w=\sigma_2$，正负号的两种取法都有可能：

♡ 通过点 (σ_1,μ_1) 的直线为：

$$\sigma_w=\frac{\sigma_1(\mu_w-\mu_2)+\sigma_2(\mu_w-\mu_1)}{\mu_1-\mu_2} \tag{2.13}$$

♡ 通过点 (σ_2,μ_2) 的直线为：

$$\sigma_w=\frac{\sigma_2(\mu_w-\mu_1)+\sigma_1(\mu_w-\mu_2)}{\mu_2-\mu_1} \tag{2.14}$$

这两条直线交于 μ_w 轴的同一点 $(0,(\sigma_1\mu_2+\sigma_2\mu_1)/(\sigma_1+\sigma_2))$，该纵坐标即为该情形下的无风险利率。这两种情形的讨论表明，任意一组随机变量不一定是一些证券的收益率，它们可能与线性定价法则矛盾（即通过组合可得到两种不同的无风险利率）。另一方面，这两种完全正负相关情形都使协方差矩阵 V 不正定。要求 V 正定的原因之一也正是为了回避这两种情况。

情形 3：不相关 $r_{12}=0$

此时 $V_{12}=0$，式 (2.8) 化为：

$$\sigma_w^2=(\sigma_1x_1)^2+(\sigma_2x_2)^2=\frac{\sigma_2^2(\mu_w-\mu_1)^2+\sigma_1^2(\mu_w-\mu_2)^2}{(\mu_1-\mu_2)^2} \tag{2.15}$$

这是在 (σ_w,μ_w) 平面上通过点 (σ_1,μ_1) 和 (σ_2,μ_2) 的双曲线。可求出 σ_w 达到最小值的点（双曲线的顶点）为：

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}},\frac{\mu_1\sigma_2^2+\mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \tag{2.16}$$

由于 $\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}<\min\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}$，这说明对于任何两种收益率不相关的证券，总能构造出一种风险比原来两者都要小、而收益率在两者之间的证券组合。其他中间情形（$-1<r_{12}<1$ 且 $r_{12}\neq 0$）对应的协方差矩阵 V 都是正定的，其图象均为双曲线。

主要结论

1. 组合的预期收益率与相关系数无关。
2. 相关系数等于 1 时，达不到风险分散效果。
3. 相关系数由 1 向 -1 变动时，风险分散效果逐渐增强。
4. 相关系数等于 -1 时，风险分散效果最好。

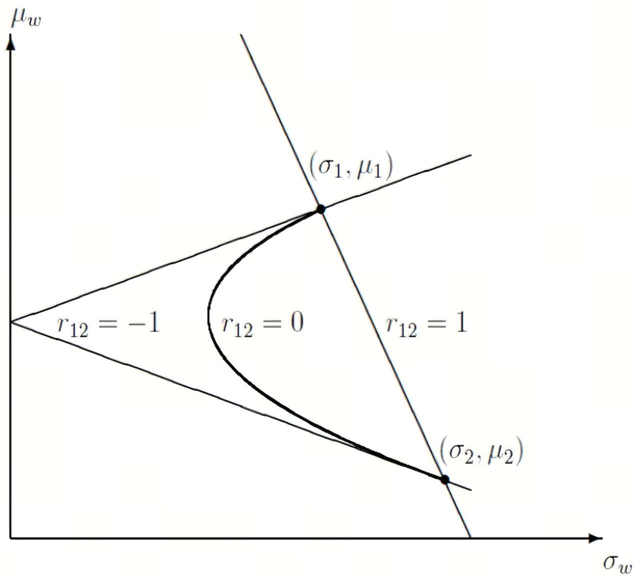

图 2.1: 两种证券的组合（不同相关系数下的收益-风险曲线）

2.2.3 三种证券组合的收益与风险的衡量

设三种证券的收益率分别为 r_1, r_2, r_3，组合权重为 x_1, x_2, x_3，满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$。

♡ 组合的收益率:

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3 \tag{2.17}$$

♡ 组合的预期收益率:

$$E(r_p) = x_1 E(r_1) + x_2 E(r_2) + x_3 E(r_3) \tag{2.18}$$

♡ 组合的风险（用方差表示）:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = {} & x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 \\ & + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23}\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 σ_i^2 为证券 i 的方差，σ_{ij} 为证券 i 与证券 j 的协方差。

2.2.4 n 种证券组合的收益与风险的衡量

推广至 n 种证券，设收益率向量为 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^\top$，权重向量为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$，满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$。

♡ 组合的收益率与预期收益率：

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i, \quad E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i) \tag{2.20}$$

♡ 组合的风险（方差）：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{2.21}$$

其中 $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$。用相关系数 ρ_{ij} 表示为：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{2.22}$$

投资组合的数学描述与 Markowitz 组合收益集

设 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 为 n 个方差有限的随机变量，代表 n 种证券的收益率。定义组合收益率集合：

$$R_1 = \left\{ r = \sum_{i=1}^n w_i r_i \;\middle|\; w_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\} \tag{2.23}$$

Markowitz 用收益率的方差（或标准差）来刻画风险。记 $V_{ij} = \mathrm{Cov}(r_i, r_j)$，则组合收益率 $r = \sum_{i=1}^n w_i r_i$ 的方差为：

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i r_i \right) \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i r_i - \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j E\left[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j]) \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^n V_{ij} w_i w_j
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.2.5 投资分散化的作用

“不要把所有的鸡蛋放在一个篮子里”。考虑一个简单的分散化策略：构建一个等权重的资产组合，即 $w_i = 1/n$ 对所有 i。此时组合方差 (2.22) 可写为：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{n^2} \mathrm{Cov}(r_i, r_j) \tag{2.25}$$

式 (2.25) 包含 n 项方差和 $n(n-1)$ 项协方差。定义证券的平均方差和平均协方差分别为：

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad \overline{\mathrm{cov}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \mathrm{Cov}(r_i, r_j) \tag{2.26}$$

则组合方差可表示为：

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\overline{\sigma^2} + \frac{n-1}{n}\overline{\text{cov}} \tag{2.27}$$

当组合中包含的证券数目 n 趋近于无穷大时，式 (2.27) 右边第一项趋近于零，组合风险主要表现为各资产之间的协方差（即系统性风险）。因此，证券组合包含的证券数目越多，分散化效应可以使其非系统性风险（特有风险）趋于减少，但风险的减少达到一个极限（由平均协方差决定）就不会再减少了。

注. 投资分散化的启示:

1. *分散投资可以消除证券组合的非系统性风险（特有风险），但是并不能消除系统性风险（市场风险）。*
2. *一般来说，代表不同风险特征的证券数目达到 20 种以上时，风险的分散就相当充分了。*
3. *选择"篮子"（即证券）时，应关注资产之间的相关性。选择低相关或负相关的资产能更有效地降低组合整体风险。*

2.3 风险偏好与无差异曲线

2.3.1 风险偏好

在现代投资组合理论（Markowitz, 1952）中，关于投资者对收益和风险的态度有两个基本假设：

1. *不满足性 (Non-satiation)*：投资者在其余条件相同的两个投资组合中进行选择时，总是选择预期回报率较高的组合。
2. *厌恶风险 (Risk Aversion)*：投资者在其余条件相同的情况下，将选择标准差较小的组合。

投资者的风险态度可分为三类：emph厌恶风险、emph风险中性、emph爱好风险。经典投资组合理论通常假设投资者是风险厌恶的。

2.3.2 投资者的投资效用函数

为量化投资者对不同风险收益组合的偏好，引入投资效用函数 U，它依赖于组合的预期收益率 $\overline{R}$ 和风险（通常用标准差 σ 表示）：

$$U = U(\overline{R}, \sigma) \tag{2.28}$$

效用函数的具体形式多样，一种常用且便于分析的二次型效用函数为：

$$U = \overline{R} - \frac{1}{2}A\sigma^2 \tag{2.29}$$

其中，A 表示投资者的风险厌恶系数，其典型值在 2 至 4 之间。A 值越大，表明投资者对风险的厌恶程度越高。

2.3.3 无差异曲线

投资者的目标是投资效用最大化，而投资效用取决于预期收益率与风险：预期收益率带来正的效用，风险带来负的效用。为直观反映投资者的效用水平，引入无差异曲线。

定义 2.3.1 (无差异曲线). 一条无差异曲线代表给投资者带来同样满足程度（即相同效用值）的预期收益率 $\overline{R}$ 和风险 σ 的所有组合的轨迹。

对于形如 (2.29) 的效用函数，给定一个效用水平 U_0，无差异曲线方程为：

$$\overline{R} = U_0 + \frac{1}{2}A\sigma^2 \tag{2.30}$$

在 $(\sigma, \overline{R})$ 平面上，这是一条开口向上的抛物线（通常只考虑 $\sigma \geq 0$ 的部分）。

2.3.4 无差异曲线的特征

1. 无差异曲线的斜率为正：由于投资者是风险厌恶的，为了补偿其承担更高的风险，必须提供更高的预期收益率，因此无差异曲线向右上方倾斜。
2. 无差异曲线是向下凸的：随着风险 σ 的增加，投资者要求预期收益率 $\overline{R}$ 的增量越来越大，即边际风险补偿递增。这反映了风险厌恶程度的增加。
3. 同一投资者有无限多条无差异曲线：每条曲线对应一个特定的效用水平。位于左上方的无差异曲线代表更高的效用水平（在相同风险下获得更高收益，或在相同收益下承担更低风险）。
4. 同一投资者在同一时间、同一时点的任何两条无差异曲线都不能相交：否则将违背偏好的一致性（传递性）假设。

注. 无差异曲线的斜率（即风险与收益之间的边际替代率）反映了投资者的风险厌恶程度。斜率越大，表明投资者对风险越厌恶，因为需要更多的收益补偿来承担单位额外的风险。

2.4 有效集和最优投资组合

2.4.1 基本概念

定义 2.4.1 (投资组合). 由 N 种证券按一定比例构成的资产集合，其权重向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^\top$ 满足 $\sum_{i=1}^N w_i = 1$。该权重分配方案也称为投资组合策略或组合比例。

定义 2.4.2 (可行集). 由 N 种证券所形成的所有可能投资组合的集合，在 (σ, μ) 平面（风险-收益平面）上表现为一个区域。

定义 2.4.3 (边界与最小方差集合). 可行集中，对于任意给定预期收益率水平，风险（标准差）最小的组合构成的曲线，称为最小方差集合或边界。该边界是可行集的上（或左）边缘。

定义 2.4.4 (最小方差组合). 在最小方差集合中，风险（方差）达到全局最小的组合，记为 *MVP (Minimum Variance Portfolio)*。

2.4.2 有效集（有效前沿）

定义 2.4.5 (有效集). 满足以下两个条件的投资组合的集合:

1. 对于相同的风险水平，预期收益率最大的组合;
2. 对于相同的预期收益率水平，风险最小的组合。

有效集是最小方差集合中位于 MVP 上方的部分（即具有更高预期收益率的边界段）。

有效集在 (σ, μ) 平面上是一条向右上方倾斜的曲线，反映了高收益伴随高风险的权衡关系。有效集具有向上凸（convex）的特性。

2.4.3 最优投资组合

定义 2.4.6 (最优投资组合). 对于一个特定的投资者，其最优投资组合是使其投资效用最大化的组合。在风险-收益平面上，该组合位于该投资者的无差异曲线与有效集的切点处。

注 (最优投资组合的唯一性与主观性).

有效集向上凸的特性与无差异曲线向下凸的特性决定了两者的相切点只有一个，即对于给定的投资者，最优投资组合是唯一的。

有效集是由市场证券及其相互关系客观决定的，而无差异曲线则取决于投资者的主观风险偏好（由其风险厌恶系数 A 刻画）。

因此，最优投资组合的位置依投资者的风险厌恶程度不同而不同：风险厌恶程度高的投资者，其最优组合更靠近 MVP（低风险、低收益）；风险厌恶程度低的投资者，其最优组合更靠近有效集右上方（高风险、高收益）。

2.5 边界组合的数学推导（不存在无风险证券时）

2.5.1 马科维茨的均值—方差模型

根据有效集（有效前沿）的含义，其满足以下两个条件:

1. 对于相同的风险水平，预期收益率最大的组合;
2. 对于相同的预期收益率水平，风险最小的组合。

马科维茨的均值-方差模型旨在寻找风险（方差）与收益（期望收益率）之间的最优权衡。根据对目标函数和约束条件的不同设定，可以得到三种等价的数学模型:

模型 0：双目标优化问题（原始问题）

模型 0 同时最小化风险和最大化收益，形成一个双目标优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} \\ \max_{\mathbf{x}} \quad & E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) = \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

其中，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ 为投资组合权重向量，$\mathbf{R} = (E(r_1), E(r_2), \ldots, E(r_n))^\top$ 为期望收益率向量，$\mathbf{V} = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ 为协方差矩阵（假定正定），$\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$。

该模型没有单一的最优解，而是产生一个帕累托最优解集，即有效前沿（Efficient Frontier）。有效前沿上的任何一点都不能在改进风险的同时改进收益，反之亦然。

模型 1：给定收益水平下的风险最小化

模型 1 在给定期望收益率 μ 的条件下，最小化组合方差：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) = \mathbf{x}^\top \mathbf{R} = \mu \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

通过求解该约束优化问题，可以得到给定收益 μ 下的最小方差组合。当 μ 在可行范围内变动时，便描绘出整个最小方差集合（包括有效前沿）。

模型 2：给定风险水平下的收益最大化

模型 2 在给定组合方差上限 $\bar{\sigma}^2$ 的条件下，最大化期望收益率：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) = \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} = \bar{\sigma}^2 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

该模型与模型 1 在数学上等价：对于每一个 $\bar{\sigma}^2$，模型 2 的解对应模型 1 中某个 μ 的解，反之亦然。两者共同定义了同一条有效前沿曲线。

注 (三种模型的关系).

模型 0 描述了有效前沿的本质——多目标权衡。模型 1 和模型 2 是模型 0 的两种单目标参数化形式，它们通过将其中一个目标作为约束，将双目标问题转化为一系列单目标问题来求解。实践中，模型 1 因约束为线性而更易求解，是推导有效前沿解析解的标准形式。

2.5.2 有效组合的数学公式

边界组合的形状：

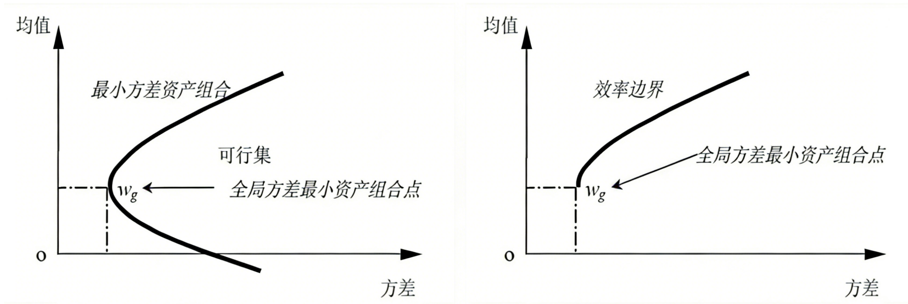

图 2.2: 边界组合的形状

M-V 模型的数学推导

马科维茨的均值-方差模型（考虑模型 1）：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) = \mathbf{x}^\top \mathbf{R} = \mu \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

构造拉格朗日函数：

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}^\top \mathbf{R} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{x}^\top \mathbf{e} - 1) \tag{2.31}$$

一阶必要条件：

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1 \mathbf{R} - \lambda_2 \mathbf{e} = \mathbf{0} \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mathbf{x}^\top \mathbf{R} - \mu = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \mathbf{x}^\top \mathbf{e} - 1 = 0 \tag{2.34}$$

由式 (2.32) 解得最优权重：

$$\mathbf{x}^* = \frac{\lambda_1}{2}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} \tag{2.35}$$

将式 (2.35) 代入约束条件 (2.33) 和 (2.34)，得到关于 $\lambda_1/2$ 和 $\lambda_2/2$ 的线性方程组：

$$\frac{\lambda_1}{2}\mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{e}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} = \mu \tag{2.36}$$

$$\frac{\lambda_1}{2}\mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{e}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} = 1 \tag{2.37}$$

引入记号：

$$A = \mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}, \quad B = \mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}, \quad C = \mathbf{e}^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}, \quad D = AC - B^2 \tag{2.38}$$

可以证明，在 $\mathbf{V}$ 正定且收益向量 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{e}$ 线性无关的条件下，$D > 0$。

方程组 (2.36)-(2.37) 可写为：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

因其系数矩阵行列式 $D \neq 0$，故有唯一解：

$$\frac{\lambda_1}{2} = \frac{C\mu - B}{D}, \quad \frac{\lambda_2}{2} = \frac{A - B\mu}{D} \tag{2.40}$$

将 (2.40) 代回 (2.35)，得到边界组合的最优权重向量：

$$\mathbf{x}^*(\mu) = \left[\frac{C}{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} - \frac{B}{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\right]\mu + \left[\frac{A}{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - \frac{B}{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}\right] \tag{2.41}$$

此即为给定预期收益率 μ 下的最小方差组合（边界组合）。该解满足最优化问题的一阶条件，且由于问题是凸优化（目标函数为凸，约束为线性），该条件也是充分的。

边界组合的几何形状

将最优权重 $\mathbf{x}^*$ 代入目标函数，得到对应的最小方差：

$$\sigma_p^2(\mu) = (\mathbf{x}^*)^\top \mathbf{V}\mathbf{x}^* \tag{2.42}$$

经过代数运算（将 (2.41) 代入并利用 (2.38) 的记号），可得 σ_p^2 与 μ 的关系：

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu - \frac{B}{C}\right)^2 \tag{2.43}$$

整理为标准形式：

$$\frac{\sigma_p^2}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(\mu - \frac{B}{C}\right)^2}{\frac{D}{C^2}} = 1 \quad \text{或等价地} \quad \frac{\sigma_p^2}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(\mu - \frac{B}{C}\right)^2}{\frac{D}{C^2}} = 1 \tag{2.44}$$

在 (σ_p, μ) 平面上，这是一条开口向右的双曲线（因 $\sigma_p \geq 0$，故仅取右半支）。若在 (σ_p^2, μ) 平面上，则表现为一条抛物线。

全局最小方差组合 (MVP)

双曲线的顶点对应全局方差最小的组合，即最小方差组合 (MVP)。由式 (2.43) 易得 MVP 的期望收益率和方差：

$$E(r_{\text{MVP}}) = \mu_{\text{MVP}} = \frac{B}{C}, \quad \sigma_{\text{MVP}}^2 = \frac{1}{C} \tag{2.45}$$

对应的组合权重可由式 (2.41) 代入 $\mu = B/C$ 得到，或直接求解仅约束 $\mathbf{x}^\top\mathbf{e} = 1$ 的方差最小化问题：

$$\mathbf{x}_{\text{MVP}} = \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}}{C} \tag{2.46}$$

2.6 存在无风险借贷时对有效集的影响（存在无风险证券时的有效前沿）

2.6.1 无风险贷款（无风险资产）

定义 2.6.1 (无风险资产). 通常将 *1* 年期的国库券、货币市场基金或 *1* 年期定期存款利率视为无风险资产的收益率，记为 r_f。其满足:

- ♡ 收益率确定: $E(r_f) = r_f$;
- ♡ 风险为零: 标准差 $\sigma_{r_f} = 0$;
- ♡ 与任何风险资产收益率 r_i 不相关: $\mathrm{Cov}(r_f, r_i) = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$。

2.6.2 存在无风险资产的投资组合

投资于一种无风险资产和一种风险资产的情形

设风险资产收益率为 r（期望为 $E(r)$，方差为 σ^2），投资于风险资产的比例为 x，则无风险资产比例为 $1-x$。

♡ 组合的预期收益率:

$$E(r_p) = (1-x)r_f + xE(r) = r_f + x(E(r) - r_f) \tag{2.47}$$

♡ 组合的方差（因协方差为零）:

$$\sigma_p^2 = x^2\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = |x|\sigma \tag{2.48}$$

消去 x，可得 $E(r_p)$ 与 σ_p 的线性关系:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r) - r_f}{\sigma}\sigma_p \quad (\text{当} x \geq 0 \text{ 时}) \tag{2.49}$$

在 $(\sigma_p, E(r_p))$ 平面上，这是一条从 $(0, r_f)$ 出发、斜率为 $(E(r) - r_f)/\sigma$ 的射线。

投资于一种无风险资产和风险资产组合的情形

设 n 个风险证券的收益率向量为 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^\top$，期望收益率向量为 $\mathbf{R}$，协方差矩阵为 $\mathbf{V}$（正定）。投资于风险资产组合的权重向量为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$，投资于无风险资产的比例为 x_0，满足 $x_0 + \mathbf{x}^\top\mathbf{e} = 1$，其中 $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$。

♡ 组合的收益率与期望收益率:

$$r_p = x_0 r_f + \mathbf{x}^\top\mathbf{r}, \quad E(r_p) = x_0 r_f + \mathbf{x}^\top\mathbf{R} \tag{2.50}$$

♡ 组合的方差（无风险资产与风险资产协方差为零）:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top\mathbf{V}\mathbf{x} \tag{2.51}$$

2.6.3 存在无风险证券时的均值-方差模型

考虑由无风险证券与 n 个风险证券构成的投资组合 p。在给定期望收益率 μ 的条件下，最小化组合方差:

$$\min_{\mathbf{x}, x_0} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top\mathbf{V}\mathbf{x} \tag{2.52}$$

$$\text{s.t.} \quad x_0 r_f + \mathbf{x}^\top\mathbf{R} = \mu \tag{2.53}$$

$$x_0 + \mathbf{x}^\top\mathbf{e} = 1 \tag{2.54}$$

由 (2.54) 得 $x_0 = 1 - \mathbf{x}^\top \mathbf{e}$，代入 (2.53) 消去 x_0，得到仅含 $\mathbf{x}$ 的约束：

$$\mathbf{x}^\top(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) = \mu - r_f \tag{2.55}$$

因此，模型可简化为：

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} \tag{2.56}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}^\top(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) = \mu - r_f \tag{2.57}$$

构造拉格朗日函数：

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^\top \mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda\left[\mathbf{x}^\top(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) - (\mu - r_f)\right] \tag{2.58}$$

一阶必要条件（也是充分条件，因问题为凸优化）：

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) = \mathbf{0} \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{x}^\top(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) - (\mu - r_f) = 0 \tag{2.60}$$

由 (2.59) 解得：

$$\mathbf{x}^* = \frac{\lambda}{2}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) \tag{2.61}$$

代入约束 (2.60)：

$$\frac{\lambda}{2}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e})^\top \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) = \mu - r_f \tag{2.62}$$

记

$$H = (\mathbf{R} - r_f\mathbf{e})^\top \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) > 0 \tag{2.63}$$

（$H > 0$ 成立是因为 $\mathbf{V}^{-1}$ 正定，且假定风险证券的期望收益率不全相等，故 $\mathbf{R} - r_f\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$。）由 (2.62) 得：

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu - r_f}{H} \tag{2.64}$$

代入 (2.61)，得到最优风险资产权重：

$$\mathbf{x}^* = \frac{(\mu - r_f)}{H}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) \tag{2.65}$$

对应的无风险资产头寸为 $x_0^* = 1 - \mathbf{x}^{*\top}\mathbf{e}$。

2.6.4 存在无风险资产时的有效前沿

将最优权重 $\mathbf{x}^*$ 代入方差表达式：

$$\sigma_p^2 = (\mathbf{x}^*)^\top \mathbf{V}\mathbf{x}^* = \frac{(\mu - r_f)^2}{H^2}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e})^\top \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f\mathbf{e}) = \frac{(\mu - r_f)^2}{H} \tag{2.66}$$

由于 $\mu = E(r_p)$，式 (2.66) 可写为：

$$\sigma_p^2 = \frac{(E(r_p) - r_f)^2}{H} \quad \text{或} \quad \sigma_p = \frac{|E(r_p) - r_f|}{\sqrt{H}} \tag{2.67}$$

在 $(\sigma_p, E(r_p))$ 平面上，这是两条从点 $(0, r_f)$ 出发的射线：

$$E(r_p) = r_f \pm \sqrt{H}\sigma_p \tag{2.68}$$

其中，斜率为正的射线（$E(r_p) \geq r_f$）对应有效前沿，即投资者通过将无风险资产与风险资产组合 T（见下文）按不同比例混合所能达到的最优风险-收益组合。

由式 (2.65) 可知，所有有效组合中的风险资产部分权重均与向量 $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R}-r_f\mathbf{e})$ 成比例，即所有有效组合的风险资产构成是相同的，仅比例不同。这个特定的风险资产组合称为切点组合 *(Tangency Portfolio)*，记作 T。其权重向量（经归一化使权重和为 1）为：

$$\mathbf{x}_T = \frac{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R}-r_f\mathbf{e})}{\mathbf{e}^\top\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R}-r_f\mathbf{e})} \tag{2.69}$$

因此，存在无风险资产时的有效前沿是一条从 $(0, r_f)$ 出发、穿过切点组合 T 的直线，称为资本市场线 *(Capital Market Line, CML)*。

注. 当允许无风险借贷时，有效集从一条双曲线（仅含风险资产）转变为一条直线（资本市场线）。这极大地简化了投资选择：所有投资者只需持有无风险资产与同一个市场风险组合（切点组合 T）的混合，其具体比例由个体的风险厌恶程度决定。

最符合实际的情况：无风险利率低于最小方差组合期望收益率

在存在无风险资产（允许无风险借贷）的情况下，有效前沿（即资本市场线，CML）的形状及其与仅含风险资产的有效前沿（双曲线）的关系，取决于无风险利率 r_f 与仅含风险资产时全局最小方差组合（MVP）的期望收益率 $E(r_{\mathrm{MVP}})$ 的相对大小。

回顾仅含风险资产时的结论：

- ♡ MVP 的期望收益率：$E(r_{\mathrm{MVP}}) = \dfrac{B}{C}$
- ♡ MVP 的方差：$\sigma^2_{\mathrm{MVP}} = \dfrac{1}{C}$

其中 $B = \mathbf{R}^\top\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$，$C = \mathbf{e}^\top\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$。

当无风险利率 r_f 满足：

$$r_f < E(r_{\mathrm{MVP}}) = \frac{B}{C} \tag{2.70}$$

时，所推导的存在无风险资产的有效前沿（射线）将与仅含风险资产的有效前沿（双曲线的上半支）相切于一点，该切点 T 位于双曲线上且高于 MVP。此情形最为常见，也最符合实际市场情况，因为通常无风险利率低于市场组合的期望收益率。

此时，在 (σ, μ) 平面上：

- ♡ 仅含风险资产的可行集为双曲线右侧的区域，其有效前沿为双曲线从 MVP 开始向右上方延伸的部分。
- ♡ 存在无风险资产时的有效前沿（CML）是一条从无风险资产点 $(0, r_f)$ 出发、与上述双曲线有效前沿相切于点 $T = (\sigma_m, \mu_m)$ 的射线。
- ♡ 该射线位于双曲线上方（除了切点），意味着对于任何给定的风险水平，引入无风险资产后都能获得比仅投资于风险资产时更高的期望收益。

切点组合 T 的坐标 (σ_m, μ_m) 及其权重 $\mathbf{x}_T$ 可由第六节中的公式计算（见式 (2.69)）。全局最小方差组合 MVP 的坐标为 (σ_G, μ_G)，其中 $\mu_G = B/C$，$\sigma_G = 1/\sqrt{C}$。

因此，最符合实际的情况如图 2.3 所示：

注. 如果 $r_f > E(r_{MVP})$，则资本市场线可能与双曲线的下半支相切，导致有效组合不包含任何风险资产或出现卖空风险资产的特殊情况，这在现实中较为少见。因此，通常假设条件 (2.70) 成立，即无风险利率低于风险资产全局最小方差组合的期望收益率。

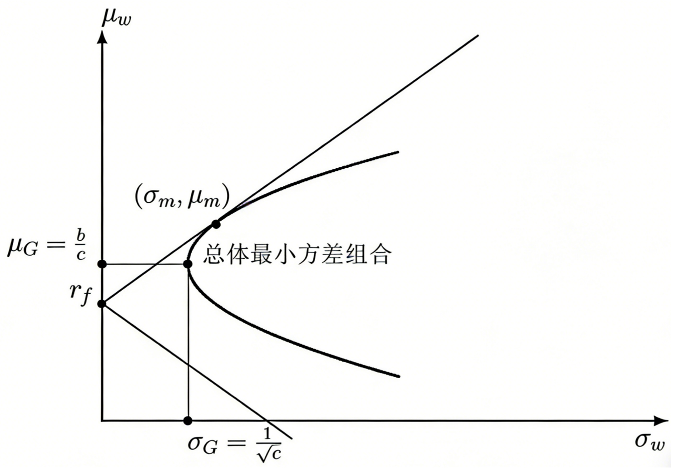

图 2.3: 当 $r_f < E(r_{\mathrm{MVP}})$ 时，资本市场线（CML）与风险资产有效前沿相切于 T 点

2.7 夏普比率

2.7.1 夏普比率的定义与含义

定义 2.7.1 (夏普比率). 对于任一投资组合 p，其夏普比率 S_p 定义为组合的超额收益率（预期收益率超过无风险利率的部分）与组合风险（收益率的标准差）的比值：

$$S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} \tag{2.71}$$

其中，

- ♡ $E(r_p)$：投资组合的期望收益率，
- ♡ r_f：无风险利率，
- ♡ σ_p：投资组合收益率的标准差（总风险）。

注 (夏普比率的含义).

夏普比率衡量了每承担一单位总风险所获得的超额收益补偿。它是评估投资组合风险调整后绩效的重要指标。

- ♡ 夏普比率为正，表明组合获得了超过无风险利率的收益；
- ♡ 夏普比率越高，表明在相同风险水平下获得的超额收益越高，即投资组合的绩效越好；
- ♡ 在有效市场假设下，所有投资者持有相同的风险资产组合（市场组合），该组合的夏普比率在所有可行风险组合中最大。

2.7.2 利用夏普比率求解切点组合（市场组合）坐标

在存在无风险资产的情况下，有效前沿是资本市场线（CML），其方程为：

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}\sigma_p \tag{2.72}$$

其中 $(\sigma_m, E(r_m))$ 是切点组合 T（即市场组合）的坐标。CML 的斜率即为市场组合的夏普比率：

$$\text{斜率}_{\text{CML}} = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} = S_m \tag{2.73}$$

从投资组合优化角度，切点组合 T 是所有风险资产组合中夏普比率最大的组合。因此，可以通过求解以下优化问题来得到 T 的权重：

$$\max_{\mathbf{x}} \quad S_p = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{R} - r_f}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x}}} \tag{2.74}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1 \quad \text{(完全投资于风险资产)} \tag{2.75}$$

其中 $\mathbf{x}$ 为风险资产的权重向量（不含无风险资产），$\mathbf{R}$ 为风险资产期望收益率向量，$\mathbf{V}$ 为协方差矩阵，$\mathbf{e}$ 为元素全为 1 的向量。

这是一个非线性优化问题。求解方法之一是将其转化为一个二次规划问题。记超额收益率向量 $\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - r_f \mathbf{e}$，则目标函数等价于最大化 $(\mathbf{x}^\top \widetilde{\mathbf{R}})^2 / (\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x})$，或者等价地，在约束 $\mathbf{x}^\top \widetilde{\mathbf{R}} =$ 常数下最小化 $\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x}$。最终可推导出切点组合 T 的权重向量：

$$\mathbf{x}_T = \frac{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{\mathbf{e}^\top \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})} \tag{2.76}$$

计算切点坐标的步骤

1. 给定无风险利率 r_f、风险资产期望收益率向量 $\mathbf{R}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{V}$。
2. 计算超额收益率向量 $\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - r_f \mathbf{e}$。
3. 计算权重 $\mathbf{x}_T$ 如式 (2.76)。
4. 计算切点组合的期望收益率和标准差：

$$E(r_m) = \mathbf{x}_T^\top \mathbf{R} \tag{2.77}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\mathbf{x}_T^\top \mathbf{V} \mathbf{x}_T} \tag{2.78}$$

5. 切点组合的夏普比率为 $S_m = \dfrac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}$。

注. 在图形上，切点 T 是过无风险资产点 $(0, r_f)$ 且与仅含风险资产的有效前沿（双曲线）相切的直线的切点。该直线的斜率即为 S_m，且是所有从 $(0, r_f)$ 出发到风险资产可行集射线的最大可能斜率。因此，寻找切点组合等价于寻找最大化夏普比率的风险资产组合。

3. 作业

3.1 作业一

问题. 两种面值 1000 元的债券在相同时期之末按票面偿还，票息每年末支付一次，剩余期限为整周期，现在购买它们都可得到 2% 的年收益率。第一种债券的票息率为 2.5%，目前售价为 1136.78 元，第二种债券的票息率为 1.25%，求第二种债券的价格。(按复利计算)

证明.

(i) **确定剩余期限** n

第一种债券：面值 $F = 1000$，年收益率为 $r = 0.02$，票息 $C_1 = F \times 0.025 = 25$，现价 $P_1 = 1136.78$。由债券现值公式我们可知：

$$P_1 = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_1}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

代入可得：

$$1136.78 = C_1 \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + F \times (1+r)^{-n}$$

$$1136.78 = 25 \times \frac{1-(1.02)^{-n}}{0.02} + 1000 \times (1.02)^{-n}$$
$$1136.78 = 1250 \times (1-(1.02)^{-n}) + 1000 \times (1.02)^{-n}$$

令 $X = (1.02)^{-n}$，则：

$$1136.78 = 1250 - 1250X + 1000X$$

$$250X = 1250 - 1136.78$$

$$250X = 113.22$$

$$X = (1.02)^{-n} = \frac{113.22}{250} = 0.45288$$

则

$$n = -\log_{1.02}(0.45288) = -\frac{\ln 0.45288}{\ln 1.02} \approx 40.00499$$

即我们可得剩余期限为 $n \approx 40$ 年。

(ii) **第二种债券的价格 P_2**

第二种债券：面值 $F = 1000$，票面利率 $c_2 = 0.0125$，年收益率 $r = 0.02$，期限 $n = 40$，票息 $C_2 = F \times c_2 = 1000 \times 0.0125 = 12.5$ 元。

第二种债券的价格 P_2 为：

$$P_2 = \sum_{t=1}^{40} \frac{C_2}{(1.02)^t} + \frac{F}{(1.02)^{40}}$$

$$P_2 = C_2 \times \frac{1-(1.02)^{-40}}{0.02} + F \times (1.02)^{-40}$$

代入已知值 $(1.02)^{-40} = 0.45288$：

$$P_2 = 12.5 \times \frac{1-0.45288}{0.02} + 1000 \times 0.45288$$

$$P_2 = 12.5 \times \frac{0.54712}{0.02} + 452.88$$

$$P_2 = 12.5 \times 27.356 + 452.88$$

$$P_2 = 341.95 + 452.88$$

$$P_2 = 794.83 \text{ 元}$$

综上我们可得第二种债券的价格为 $P_2 \approx 794.83$ 元。 □

3.2 作业二

问题.

$$\min \sigma_p^2 = x^T V x \quad \text{s.t.} \quad x^T e = 1$$

求满足上述优化问题的 x，$x^T R$，σ_p^2.

解. 我们令:

$$\mathcal{L} = x^T V x - \lambda(x^T e - 1)$$

求偏导并令其为零:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2Vx - \lambda e = 0 \quad \Rightarrow \quad Vx = \frac{\lambda}{2} e$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x^T e = 0$$

由 $Vx = \frac{\lambda}{2} e$ 可得:

$$x = \frac{\lambda}{2} V^{-1} e$$

代入约束条件 $x^T e = 1$:

$$\left(\frac{\lambda}{2} V^{-1} e \right)^T e = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2} e^T V^{-1} e = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{e^T V^{-1} e}$$

因此最优解 x 为:

$$x = \frac{V^{-1} e}{e^T V^{-1} e}$$

对应的期望收益 $x^T R$ 为:

$$x^T R = \frac{e^T V^{-1} R}{e^T V^{-1} e}$$

最小方差 σ_p^2 为:

$$\sigma_p^2 = x^T V x = \frac{e^T V^{-1} V V^{-1} e}{(e^T V^{-1} e)^2} = \frac{e^T V^{-1} e}{(e^T V^{-1} e)^2} = \frac{1}{e^T V^{-1} e}$$

综上:

$$\boxed{x = \frac{V^{-1} e}{e^T V^{-1} e}}, \quad \boxed{x^T R = \frac{e^T V^{-1} R}{e^T V^{-1} e}}, \quad \boxed{\sigma_p^2 = \frac{1}{e^T V^{-1} e}}$$

□

3.3 作业三

问题. 已知两个风险证券 A、B 的相关数据如下:

证券	收益率	期望收益率	标准差	组合比例
A	r_A	8%	12%	x
B	r_B	13%	20%	$1-x$

证券 A、证券 B 收益率的相关系数为 $\rho = 0.25$。现将证券 A 和证券 B 构造投资组合 p，其组合比例为 x、$1-x$。无风险证券的收益率为 $r_f = 5\%$，投资组合 p 的收益率、期望收益率、标准差分别记为 r_p、$E(r_p)$、σ_p。
试求 $\max \dfrac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$ 时投资组合 p 中证券 A、证券 B 的组合比例及 $E(r_p)$、σ_p^2。

解. 由题意：$E(r_A) = 0.08, E(r_B) = 0.13$，故组合 p 的期望收益率为：

$$E(r_p) = xE(r_A) + (1-x)E(r_B) = 0.08x + 0.13(1-x) = 0.13 - 0.05x$$

由题意：$\sigma_A = 0.12, \sigma_B = 0.2$ 组合 p 方差为：

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (x\sigma_A)^2 + ((1-x)\sigma_B)^2 + 2\rho \cdot x\sigma_A \cdot (1-x)\sigma_B \\ &= 0.0144x^2 + 0.04(x^2 - 2x + 1) + 0.012(x - x^2) \\ &= 0.0424x^2 - 0.068x + 0.04\end{aligned}$$

则：

$$\max \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \max \frac{0.13 - 0.05x - 0.05}{\sqrt{\sigma_p^2}} = \max \frac{0.08 - 0.05x}{\sqrt{0.0424x^2 - 0.068x + 0.04}}$$

我们只需求 $y = \dfrac{0.08 - 0.05x}{\sqrt{0.0424x^2 - 0.068x + 0.04}}$ 的最大值即可：

$$y = \frac{0.08 - 0.05x}{\sqrt{0.0424x^2 - 0.068x + 0.04}}$$

$$\Rightarrow y^2(0.0424x^2 - 0.068x + 0.04) = 0.0064 - 0.008x + 0.0025x^2$$

$$\Rightarrow (0.0424y^2 - 0.0025)x^2 - (0.068y^2 - 0.008)x + (0.04y^2 - 0.0064) = 0$$

我们利用上述关于 x 方程的 $\Delta \geq 0$ 可得：

$$(0.068y^2 - 0.008)^2 - 4(0.0424y^2 - 0.0025)(0.04y^2 - 0.0064) \geq 0$$

令 $t = y^2 \geq 0$，代入得：

$$(0.068t - 0.008)^2 - 4(0.0424t - 0.0025)(0.04t - 0.0064) \geq 0$$

第一项：

$$(0.068t - 0.008)^2 = 0.004624t^2 - 0.001088t + 0.000064$$

第二项：

$$(0.0424t - 0.0025)(0.04t - 0.0064) = 0.001696t^2 - 0.00037136t + 0.000016$$

乘以 4：

$$4(0.001696t^2 - 0.00037136t + 0.000016) = 0.006784t^2 - 0.00148544t + 0.000064$$

两式相减：

$$[0.004624t^2 - 0.001088t + 0.000064] - [0.006784t^2 - 0.00148544t + 0.000064] = -0.00216t^2 + 0.00039744t$$

故我们只需解不等式：

$$-0.00216t^2 + 0.00039744t \geq 0 \iff t(-0.00216t + 0.00039744) \geq 0$$

因 $t \geq 0$，故：

$$\begin{gathered}-0.00216t + 0.00039744 \geq 0 \\ t \leq \frac{0.00039744}{0.00216} = 0.184\end{gathered}$$

即 $y^2 \leq 0.184$，所以：

$$|y| \leq \sqrt{0.184} \approx 0.428$$

这表明

$$\max \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \max y = 0.428$$

下面我们求 $\dfrac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$ 最大时 x 的值：我们将 $y^2 = 0.184$ 代入方程：

$$(0.0424y^2 - 0.0025)x^2 - (0.068y^2 - 0.008)x + (0.04y^2 - 0.0064) = 0$$

可将方程化为：

$$0.0053016x^2 - 0.004512x + 0.00096 = 0$$

其中：

$$\Delta = (0.004512)^2 - 4 \times 0.0053016 \times 0.00096 = 0$$

故：

$$x = \frac{0.004512}{2 \times 0.0053016} = \frac{0.004512}{0.0106032} \approx 0.4255$$

则

$$1 - x = 0.5745$$

$$E(r_p) = 0.13 - 0.05x \approx 0.108725$$

$$\sigma_p^2 = 0.0424x^2 - 0.068x + 0.04 \approx 0.01874$$

综上：

证券 A 组合比例	证券 B 组合比例	组合 p 期望收益率 $E(r_P)$	组合 p 方差 σ_p^2
0.4255	0.5745	0.108725	0.01874

□

3.4 作业四

问题 (1)**.** 利用夏普比率求切点坐标对应的投资组合比例：

$$\max S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R} - r_f}{(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x})^{1/2}}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e} = 1$$

解. 利用约束条件 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e} = 1$，我们可将夏普比率改写为：

$$S_p = \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R} - r_f \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}} = \frac{\boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{R} - r_f \boldsymbol{e})}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}}. \tag{3.1}$$

注. 实际上我们将原约束优化问题转化为无约束问题。

记 $\boldsymbol{R}_f=\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e}$，则问题等价于：

$$\max_{\boldsymbol{x}}\ \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}}.$$

我们令 $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})^2$，即：

$$g(\boldsymbol{x})=\frac{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f)^2}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}.$$

那么：

$$\begin{aligned}\nabla g(\boldsymbol{x})&=\frac{2(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f)\boldsymbol{R}_f\cdot(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f)^2\cdot 2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})^2}\\&=\frac{2(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f)}{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})^2}\left[\boldsymbol{R}_f(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f)\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}\right].\end{aligned}$$

令 $\nabla g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}>0$（$\boldsymbol{V}$ 正定），且 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f\neq 0$，可得：

$$\boldsymbol{R}_f(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f)\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}.$$

注. 若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $g(\boldsymbol{x})$ 的一个局部极大值点，且 g 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处可微，则必有 $\nabla g(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$。我们正是利用这一必要条件来计算可能的最优解。

令 $\lambda=\dfrac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}_f}$，则上式化为：

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{R}_f.$$

由于 $\boldsymbol{V}$ 可逆，解得：

$$\boldsymbol{x}^*=\lambda\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f.$$

将 $\boldsymbol{x}^*$ 代入约束条件 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{e}=1$：

$$\lambda\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f=1\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}.$$

因此此时投资组合比例 $\boldsymbol{x}^*$ 为：

$$\boldsymbol{x}^*=\frac{\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}=\frac{\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}.$$

将 $\boldsymbol{x}^*$ 代入式 (3.1) 计算最大夏普比率 S_p^*：

$$\begin{aligned}S_p^*&=\frac{(\boldsymbol{x}^*)^T(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^*}}\\&=\frac{\frac{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}}{\sqrt{\frac{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}{[\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})]^2}}}\\&=\frac{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})/\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}{\sqrt{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}/|\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})|}\\&=\sqrt{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}.\end{aligned}$$

故最大夏普比率 S_p^* 为：

$$S_p^*=\sqrt{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}.$$

此时的期望收益率 μ_p^* 为：

$$\mu_p^*=(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{R}=\frac{(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}-r_f\boldsymbol{e})}.$$

方差 $(\sigma_p^*)^2$ 为：

$$(\sigma_p^*)^2 = (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^* = \frac{(\boldsymbol{R} - r_f \boldsymbol{e})^T \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{R} - r_f \boldsymbol{e})}{[\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{R} - r_f \boldsymbol{e})]^2}.$$

注. 好像还有一点不大严谨的是：我们需要说明利用梯度为 0 求出来的 $\boldsymbol{x}^*$ 为最大值的点(梯度为 0 是 g 极值点的必要条件，还需要确定到底是极小值点还是极大值点)，还需要进一步说明：

考虑函数 $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R}_f)^2}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}$，其中 $\boldsymbol{R}_f = \boldsymbol{R} - r_f \boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{V}$ 是正定对称矩阵。

我们已经通过梯度为零求得驻点 $\boldsymbol{x}^* = \dfrac{\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}{\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{R}_f}$。现在我们需要验证该点对应的是最大值而不是最小值，我们可以通过计算 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处的黑塞矩阵并证明其在约束切空间上的负定性则可说明选取的 $\boldsymbol{x}^*$ 是最大值条件。

首先我们先来计算黑塞矩阵。记 $\alpha = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R}_f$，$\beta = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}$，则 $g(\boldsymbol{x}) = \alpha^2/\beta$。

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} \right) = \frac{2\alpha \boldsymbol{R}_f \beta - \alpha^2 (2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})}{\beta^2} = \frac{2\alpha}{\beta^2} (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}).$$

此时我们对梯度再求导得到黑塞矩阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \nabla^2 g(\boldsymbol{x})$：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\frac{2\alpha}{\beta^2} (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}) \right] = 2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left[\frac{\alpha}{\beta^2} \right] (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x})^T + \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}).$$

其中：

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \right) = \frac{\boldsymbol{R}_f \beta^2 - \alpha (2\beta \cdot 2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})}{\beta^4} = \frac{\boldsymbol{R}_f}{\beta^2} - \frac{4\alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}{\beta^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}_f (2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})^T - [\boldsymbol{R}_f (\boldsymbol{V}\boldsymbol{x})^T + \alpha \boldsymbol{V}] = \boldsymbol{R}_f \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} - \alpha \boldsymbol{V}.$$

代入得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) &= 2 \left(\frac{\boldsymbol{R}_f}{\beta^2} - \frac{4\alpha \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}{\beta^3} \right) (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x})^T + \frac{2\alpha}{\beta^2} (\boldsymbol{R}_f \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} - \alpha \boldsymbol{V}) \\ &= \frac{2}{\beta^2} \boldsymbol{R}_f (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x})^T - \frac{8\alpha}{\beta^3} \boldsymbol{V}\boldsymbol{x} (\beta \boldsymbol{R}_f - \alpha \boldsymbol{V} \boldsymbol{x})^T + \frac{2\alpha}{\beta^2} (\boldsymbol{R}_f \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{V} - \alpha \boldsymbol{V}). \end{aligned}$$

在驻点 $\boldsymbol{x}^*$ 处，由一阶条件有 $\beta^* \boldsymbol{R}_f = \alpha^* \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^*$，其中 $\alpha^* = (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{R}_f$，$\beta^* = (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^*$。代入上式，前两项均为零，只剩第三项：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*) = \frac{2\alpha^*}{(\beta^*)^2} (\boldsymbol{R}_f (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V} - \alpha^* \boldsymbol{V}).$$

利用关系 $\boldsymbol{R}_f = \dfrac{\alpha^*}{\beta^*} \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^*$，可得：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*) = \frac{2\alpha^*}{(\beta^*)^2} \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^* (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V} - \alpha^* \boldsymbol{V} \right) = \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^3} \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^* (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V} - \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \boldsymbol{V}.$$

由一阶条件有：

$$\beta^* \boldsymbol{R}_f = \alpha^* \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^* \iff \boldsymbol{x}^* = \frac{\beta^*}{\alpha^*} \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{R}_f$$

将 $\boldsymbol{x}^*$ 代入 $\boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^* (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V}$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^* (\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{V} \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*} \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{R}_f \right) \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*} \boldsymbol{R}_f^T (\boldsymbol{V}^{-1})^T \right) \boldsymbol{V} \\ &= \frac{(\beta^*)^2}{(\alpha^*)^2} \boldsymbol{V} \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{R}_f \boldsymbol{R}_f^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{V} \\ &= \frac{(\beta^*)^2}{(\alpha^*)^2} \boldsymbol{R}_f \boldsymbol{R}_f^T \end{aligned}$$

故:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*) &= \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^3}\left[\frac{(\beta^*)^2}{(\alpha^*)^2}\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T\right] - \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\boldsymbol{V} \\ &= \frac{2}{\beta^*}\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T - \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\boldsymbol{V} \\ &= \frac{2}{(\beta^*)^2}\left[\beta^*\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T - (\alpha^*)^2\boldsymbol{V}\right]\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{x}^*$ 的表达式代入 α^* 的定义式:

$$\alpha^* = (\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{R}_f = \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*}\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\right)\boldsymbol{R}_f = \frac{\beta^*}{\alpha^*}\left(\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f\right) \Rightarrow \boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f = \frac{(\alpha^*)^2}{\beta^*}$$

故:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*) &= \frac{2}{(\beta^*)^2}\left[\beta^*\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T - (\alpha^*)^2\boldsymbol{V}\right] \\ &= \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\left[\frac{\beta^*}{(\alpha^*)^2}\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T - \boldsymbol{V}\right] \\ &= \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\left[\frac{1}{\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T - \boldsymbol{V}\right] \\ &= -\frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\left[\boldsymbol{V} - \frac{\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T}{\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}\right]\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} - \dfrac{\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{R}_f^T}{\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}$，则 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*) = -\frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\boldsymbol{A}$。

现在我们只需要证明 $\boldsymbol{A}$ 在约束切空间 $\mathcal{T} = \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{e} = 0\}$ 上是正定的。对任意非零 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{z} - \frac{(\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{R}_f)^2}{\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f}.$$

由 *Cauchy-Schwarz* 不等式 $(\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{R}_f)^2 \le (\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{z})(\boldsymbol{R}_f^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f)$，可知 $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \ge 0$。等号成立当且仅当 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f$ 共线，即 $\boldsymbol{z} = k\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f$。由于 $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f > 0$，故 $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f$ 不在切空间 $\mathcal{T}$ 中，因此对任意非零 $\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}$，$\boldsymbol{z}$ 不与 $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}_f$ 共线，从而 $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} > 0$。这表明 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathcal{T}$ 上是正定的。

于是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*) = -\frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2}\boldsymbol{A}$ 在 $\mathcal{T}$ 上是负定的。根据约束优化问题的二阶充分条件，在满足一阶条件的驻点处，若拉格朗日函数关于变量的黑塞矩阵在约束切空间上负定，则该点是局部极大值点。

而这样的点只有一个，故我们能说明这个极大值点就是全局最大值点！

□

3.5 作业五

设 n 个风险证券的相关数据或相关符号等如下：它们的收益率为 r_i，期望收益率为 $E(r_i)$；$i = 1, 2, \cdots, n$，收益率的协方差矩阵 $V = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵。

记 $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$，$r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$，$R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T$，$R_i = E(r_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$；$R_i$ 不全相同。$\theta = \{x \mid x^T e = 1\}$。

问题. 设投资组合 p 是由上述 n 个风险证券构成的一个已知投资组合，其组合比例为 x_p（$x_p^T e = 1$），收益率为 r_p，期望收益率为 $E(r_p)$，收益率标准差为 σ_p。

(i) 试求投资组合 Q 的组合比例 x_q，其中 x_q 为满足下述模型的解。

$$\begin{aligned}&\min\left\{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\right\}\\&\text{s.t.}\\&(x_q - x_p)^T R = \mu \quad (\text{其中 } \mu \text{ 为非零常数})\\&x_q^T e = 1\end{aligned}$$

(ii) 试求在 $(\sigma^2, E(r))$ 坐标下，通过坐标原点及全局最小方差组合 (MVP) 的射线与上述 n 个风险证券构成的投资组合边界曲线的交点 M（非全局最小方差组合）所对应的边界组合的方差 σ_M^2、期望收益 $E(r_M)$ 和组合比例 x_M。

(iii) 证明在 (i) 得出的解中，$(x_q - x_p)$ 为 $(x_M - x_{MVP})$ 的倍数，$\left\{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\right\}$ 为 $(\sigma_M^2 - \sigma_{MVP}^2)$ 的倍数。

解.

(i) 求 x_q:

令 $y = x_q - x_p$，则 $x_q = x_p + y$。此时约束条件化为

$$\mu = (x_q - x_p)^T R = y^T R, \quad 0 = 1 - 1 = x_q^T e - x_p^T e = (x_q - x_p)^T e = y^T e.$$

即

$$y^T R = \mu, \quad y^T e = 0.$$

我们构造拉格朗日函数:

$$\mathcal{L}(y, \lambda_1, \lambda_2) = y^T V y + \lambda_1 (y^T R - \mu) + \lambda_2 (y^T e).$$

对 y 求梯度

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y^T V y) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}(y^T R) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(y^T e)\\&= 2Vy + \lambda_1 R + \lambda_2 e.\end{aligned}$$

注.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^T V y) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}(y^T R) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(y^T e)$$

♡ $\frac{\partial}{\partial y}(y^T V y)$:

设 $V = (V_{ij})_{n \times n}$ 对称，$y = (y_1, \ldots, y_n)^T$，则

$$y^T V y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} y_i y_j.$$

对 y_k 求偏导 $(k=1,\dots,n)$：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n V_{ij}y_iy_j\right) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n V_{ij}\frac{\partial}{\partial y_k}(y_iy_j)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n V_{ij}\left(\delta_{ik}y_j+y_i\delta_{jk}\right) \quad (\text{其中}\delta_{ik}\text{ 为 }Kronecker\text{ 符号})\\ &= \sum_{j=1}^n V_{kj}y_j+\sum_{i=1}^n V_{ik}y_i.\end{aligned}$$

利用 V 的对称性 $V_{ik}=V_{ki}$，得

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(y^TVy)=\sum_{j=1}^n V_{kj}y_j+\sum_{i=1}^n V_{ki}y_i=2\sum_{j=1}^n V_{kj}y_j.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^TVy)=\begin{pmatrix}2\sum_{j=1}^n V_{1j}y_j\\ 2\sum_{j=1}^n V_{2j}y_j\\ \vdots\\ 2\sum_{j=1}^n V_{nj}y_j\end{pmatrix}=2Vy.$$

♡ $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^TR)$:
$R=(R_1,\dots,R_n)^T$，则

$$y^TR=\sum_{i=1}^n R_iy_i.$$

对 y_k 求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^n R_iy_i\right)=R_k.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^TR)=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{pmatrix}=R.$$

♡ $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^Te)$:
由于 $e=(1,1,\dots,1)^T$，有

$$y^Te=\sum_{i=1}^n y_i.$$

对 y_k 求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)=1.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^Te)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=e.$$

将以上三项的梯度代入，得

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2Vy + \lambda_1 R + \lambda_2 e.$$

令梯度为 0

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2Vy + \lambda_1 R + \lambda_2 e = 0.$$

于是

$$Vy = -\frac{1}{2}(\lambda_1 R + \lambda_2 e) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}V^{-1}(\lambda_1 R + \lambda_2 e). \tag{3.2}$$

注. V 为正定矩阵，故可逆。

我们记：$A = e^T V^{-1} e, \quad B = e^T V^{-1} R = R^T V^{-1} e, \quad C = R^T V^{-1} R, \quad \Delta = AC - B^2$

代入约束条件 $y^T e = 0$ 得

$$-\frac{1}{2}(\lambda_1 e^T V^{-1} R + \lambda_2 e^T V^{-1} e) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 B + \lambda_2 A) = 0 \implies \lambda_2 = -\frac{B}{A}\lambda_1.$$

代入约束 $y^T R = \mu$ 得

$$-\frac{1}{2}(\lambda_1 R^T V^{-1} R + \lambda_2 R^T V^{-1} e) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 C + \lambda_2 B) = \mu.$$

将 $\lambda_2 = -B\lambda_1/A$ 代入：

$$-\frac{1}{2}\left(\lambda_1 C - \frac{B^2}{A}\lambda_1\right) = \mu \implies -\frac{\lambda_1}{2} \cdot \frac{AC - B^2}{A} = \mu.$$

解得

$$\lambda_1 = -\frac{2A\mu}{AC - B^2} = -\frac{2A\mu}{\Delta}, \quad \lambda_2 = -\frac{B}{A}\lambda_1 = \frac{2B\mu}{\Delta}.$$

代入 (3.2)：

$$y = -\frac{1}{2}V^{-1}\left[-\frac{2A\mu}{\Delta}R + \frac{2B\mu}{\Delta}e\right] = \frac{\mu}{\Delta}V^{-1}(AR - Be).$$

因此

$$x_q = x_p + \frac{\mu}{\Delta}V^{-1}(AR - Be) = x_p + \mu \cdot \frac{V^{-1}\left[(e^T V^{-1} e)R - (e^T V^{-1} R)e\right]}{(e^T V^{-1} e)(R^T V^{-1} R) - (e^T V^{-1} R)^2}. \tag{3.3}$$

(ii) 求交点 M 所对应的边界组合的方差 σ_M^2、期望收益 $E(r_M)$ 和组合比例 x_M：

> **定义** (全局最小方差组合)**.** 全局最小方差组合（MVP）的组合比例、期望收益率、方差为：
>
> $$x_{\text{MVP}} = \frac{V^{-1}e}{A}, \quad E_{\text{MVP}} = \frac{B}{A}, \quad \sigma^2_{\text{MVP}} = \frac{1}{A}.$$
>
> 注. 第五章课件第 *41* 页（我这里的 A 和 C 和课件上是反着来的）.

由 (i) 我们可知在 (σ^2, E) 平面上满足方程

$$\sigma^2 = \min\left\{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\right\} = \min\left\{y^T V y\right\} = \frac{AE^2 - 2BE + C}{\Delta}. \tag{3.4}$$

注. 这里直接拿课件上的公式，具体可见第五章课件第 *47* 面的定理 *4.1*

过原点 $(0,0)$ 与点 $(\sigma^2_{\text{MVP}}, E_{\text{MVP}})$ 的射线方程为

$$\frac{E}{\sigma^2} = \frac{E_{\text{MVP}}}{\sigma^2_{\text{MVP}}} = \frac{B/A}{1/A} = B \implies E = B\sigma^2. \tag{3.5}$$

将 (3.5) 代入 (3.4):

$$\sigma^2 = \frac{A(B\sigma^2)^2 - 2B(B\sigma^2) + C}{\Delta} = \frac{AB^2\sigma^4 - 2B^2\sigma^2 + C}{\Delta}.$$

整理得

$$AB^2\sigma^4 - (AC + B^2)\sigma^2 + C = 0. \tag{3.6}$$

因为 $\sigma^2 = 1/A$ 对应 MVP 点，故 $(\sigma^2 - 1/A)$ 是 (3.6) 的一个因子。解得另一根为

$$\sigma^2_M = \frac{C}{B^2}.$$

代入 $E = B\sigma^2$ 得

$$E_M = B \cdot \frac{C}{B^2} = \frac{C}{B}.$$

注. 由第五章课件第 38 面我们可知，$M - V$ 组合最优解的组合比例一般形式为 $x = g + hE$，其中

$$g = \frac{CV^{-1}e - BV^{-1}R}{\Delta}, \quad h = \frac{AV^{-1}R - BV^{-1}e}{\Delta}.$$

代入 $E_M = C/B$:

$$\begin{aligned}
x_M &= g + h \cdot \frac{C}{B} \\
&= \frac{CV^{-1}e - BV^{-1}R}{\Delta} + \frac{AV^{-1}R - BV^{-1}e}{\Delta} \cdot \frac{C}{B} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left[CV^{-1}e - BV^{-1}R + \frac{AC}{B}V^{-1}R - CV^{-1}e\right] \\
&= \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{AC}{B} - B\right)V^{-1}R\right] \\
&= \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{AC - B^2}{B} V^{-1}R \\
&= \frac{V^{-1}R}{B}.
\end{aligned}$$

综上,

$$\sigma^2_M = \frac{C}{B^2}, \quad E_M = \frac{C}{B}, \quad x_M = \frac{V^{-1}R}{B}. \tag{3.7}$$

(iii) 证明倍数关系:

由 (3.3) 知 $y = x_q - x_p = \frac{\mu}{\Delta}V^{-1}(AR - Be)$,

由 (3.7) 及 $x_{\text{MVP}} = V^{-1}e/A$ 得

$$x_M - x_{\text{MVP}} = \frac{V^{-1}R}{B} - \frac{V^{-1}e}{A} = \frac{1}{AB}V^{-1}(AR - Be).$$

比较两式可得

$$x_q - x_p = \frac{\mu AB}{\Delta}(x_M - x_{\text{MVP}}). \tag{3.8}$$

因此 $(x_q - x_p)$ 是 $(x_M - x_{\mathrm{MVP}})$ 的倍数。

进一步，我们有:

$$\begin{aligned}(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p) &= y^T V y \\ &= \left(\frac{\mu A B}{\Delta}\right)^2 (x_M - x_{\mathrm{MVP}})^T V (x_M - x_{\mathrm{MVP}}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(x_M - x_{\mathrm{MVP}})^T V (x_M - x_{\mathrm{MVP}}) &= x_M^T V x_M + x_{\mathrm{MVP}}^T V x_{\mathrm{MVP}} - 2 x_M^T V x_{\mathrm{MVP}} \\ &= \frac{C}{B^2} + \frac{1}{A} - \frac{2}{A} \\ &= \frac{C}{B^2} - \frac{1}{A} = \sigma_M^2 - \sigma_{\mathrm{MVP}}^2.\end{aligned}$$

注. $\sigma_M^2 = \frac{C}{B^2}, \sigma_{\mathrm{MVP}}^2 = \frac{1}{A}$

于是

$$(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p) = \frac{\mu^2 A^2 B^2}{\Delta^2} (\sigma_M^2 - \sigma_{\mathrm{MVP}}^2). \tag{3.9}$$

故 $(x_q - x_p)$ 为 $(x_M - x_{MVP})$ 的倍数，$\{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\}$ 为 $(\sigma_M^2 - \sigma_{MVP}^2)$ 的倍数。

□

3.6 作业六

问题. 设投资组合 p 是由 3 个风险证券构成的一个已知投资组合，其组合比例为 $w_p = (w_1, w_2, w_3)^T$，收益率为 r_p，期望收益率为 $E(r_p)$。
考虑如下单因素模型：$r_i = \alpha_i + \beta_i r_p + \varepsilon_i$，$i = 1, 2, 3$，

$$\mathrm{cov}(r_p, \varepsilon_i) = 0, \quad E(\varepsilon_i) = 0, \quad \mathrm{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = 0, \quad i \neq j$$

若记 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$，$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$，求 $\alpha^T V^{-1} \beta$。（三证券收益率的协方差矩阵 V 为正定矩阵）

证明. 我们把单因素模型

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_p + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

写成向量形式 $r = \alpha + \beta r_p + \varepsilon$, 其中 $E(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon, r_p) = 0$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon) = D = \mathrm{diag}(\sigma_{\varepsilon_1}^2, \sigma_{\varepsilon_2}^2, \sigma_{\varepsilon_3}^2)$ 为对角矩阵。

则证券收益率的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}V &= \mathrm{Cov}(r) = \mathrm{Cov}(\alpha + \beta r_p + \varepsilon) \\ &= \mathrm{Cov}(\beta r_p + \varepsilon) \\ &= \mathrm{Cov}(\beta r_p) + \mathrm{Cov}(\varepsilon) + 2\,\mathrm{Cov}(\beta r_p, \varepsilon) \\ &= \mathrm{Cov}(\beta r_p) + D \\ &= \beta\beta^T\,\mathrm{Var}(r_p) + D \\ &= \sigma_p^2 \beta\beta^T + D,\end{aligned}$$

由于 $r_p = w_p^T r$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(r, w_p^T r) &= \mathbb{E}\big[(r-\mathbb{E}[r])(w_p^T r - \mathbb{E}[w_p^T r])^T\big] \\
&= \mathbb{E}\big[(r-\mathbb{E}[r])(r-\mathbb{E}[r])^T w_p\big] \\
&= \mathbb{E}\big[(r-\mathbb{E}[r])(r-\mathbb{E}[r])^T\big] w_p \\
&= \mathrm{Cov}(r)\, w_p \\
&= V w_p.
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(r, r_p) &= \mathrm{Cov}(\alpha + \beta r_p + \varepsilon, r_p) \\
&= \mathrm{Cov}(\beta r_p, r_p) + \mathrm{Cov}(\varepsilon, r_p) \\
&= \beta\, \mathrm{Cov}(r_p, r_p) \\
&= \beta\, \mathrm{Var}(r_p) \\
&= \beta \sigma_p^2.
\end{aligned}
$$

因此

$$V w_p = \beta \sigma_p^2$$

即

$$w_p^T V = \sigma_p^2 \beta^T$$

将上述右乘 V^{-1}

$$w_p^T V V^{-1} = \sigma_p^2 \beta^T V^{-1} \Rightarrow w_p^T = \sigma_p^2 \beta^T V^{-1}$$

对上述取转置：

$$w_p = \sigma_p^2 (V^{-1})^T \beta = \sigma_p^2 V^{-1} \beta$$

将 $r_p = w_p^T r$ 代入模型得

$$r_p = w_p^T \alpha + (w_p^T \beta) r_p + w_p^T \varepsilon.$$

比较系数可得

$$w_p^T \beta = 1, \qquad w_p^T \alpha = 0. \tag{3.10}$$

现在，将 w_p 的表达式代入 $w_p^T \alpha = 0$：

$$(\sigma_p^2 V^{-1} \beta)^T \alpha = 0 \iff \sigma_p^2 \beta^T (V^{-1})^T \alpha = 0 \iff \sigma_p^2 \beta^T V^{-1} \alpha = 0$$

因为 $\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(r_p) = w_p^T V w_p > 0$，所以：

$$\beta^T V^{-1} \alpha = 0$$

由于 $\alpha^T V^{-1} \beta$ 是一个标量，且 V^{-1} 是对称矩阵，所以 $(\alpha^T V^{-1} \beta)^T = \beta^T (V^{-1})^T \alpha = \beta^T V^{-1} \alpha$。

$$\alpha^T V^{-1} \beta = \beta^T V^{-1} \alpha = 0$$

□

To be continue...