



Graph Theory

SHERLOCK YOUNG

January 25, 2026



Copyright © 2025 Sherlock Young

Copying prohibited

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Art. No 00001

ISBN 111-11-1111-11-1

Edition 1.0

Cover design by Sherlock Young

Published by Three Squirrels

Printed in Tianjin

If you have any questions, please send email to nkuSherr1@nankai.edu.cn



1	图与子图	5
2	树 (Tree)	14
3	连通度	20
4	欧拉环游、哈密尔顿圈	28
4.1	欧拉环游	28
4.2	Hamilton 图	30
4.3	Drac 定理	32
4.4	Ore 条件	32
5	匹配与因子	37
5.1	基本定义	37
5.2	二部图中的匹配	40
5.3	顶点覆盖与控制集	42
6	边染色	47

7	独立集和团	52
7.1	Ramsey 理论	53
8	顶点染色	59
8.1	色数	59
8.2	临界图	64
8.3	色多项式	72
9	平面图	77
10	有向图	84

1. 图与子图



定义 1.0.1 (超图). 一个超图 H 是一个有序对:

$$H = (V, E)$$

- (i) V 是一个非空有限集合, 称为**顶点集**. 其元素称为**顶点**;
- (ii) E 是顶点集 V 的幂集 $\mathcal{P}(V)$ 中除去空集的部分的一个子集, 即 $E \subseteq \mathcal{P}(V)$, 其元素称为**超边**. 超边时非空的, 即对于任意 $e \in E$ 有 $e \neq \emptyset$.

补充说明:

- (i) 超图的**阶**是顶点集的大小, 记为 $|V|$.
- (ii) 超图的**规模**是超边集的大小, 记为 $|E|$.
- (iii) 超边 $e \in E$ 的**基数**是该超边所包含的顶点的数量, 即 $|e|$.
- (iv) 若存在整数 k , 使得对所有 $e \in E$ 都有 $|e| = k$, 则该超图称为 **k 一致超图**. 特别地, 2 一致超图就是普通无向图。



定义 1.0.2 (完全二部图). 图 $V(G) = X \cup Y, |X| = m, |Y| = n$, X 中的每一个点与 Y 中每一个点关联, 则这样的图称**完全二部图**为, 记作 $K_{m,n}$.



定义 1.0.3 (平面图). 存在一种画法使得 $\forall e_1, e_2 \in E(G), e_1 \cap e_2 = \emptyset$ 或者在端点上相交, 这样的图就称为**平面图**.



定义 1.0.4 (支撑子图). 设 $G = (V, E)$ 和 $H = (V', E')$ 是两个图. 如果 H 是 G 的子图且 $V' = V$ (即顶点集相同), 则称 H 是 G 的**支撑子图** (或生成子图). 换句话说, H 是通过从 G 中删除一些边 (但不删除任何顶点) 得到的图.



定义 1.0.5 (导出子图). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, $S \subseteq V$ 是一个顶点子集.

1. **顶点导出子图** $G[S]$: 以 S 为顶点集, 以 G 中所有两个端点都在 S 中的边为边集的子图. 即:

$$G[S] = (S, \{uv \in E \mid u, v \in S\})$$

2. **边导出子图** $G[F]$: 设 $F \subseteq E$ 是一个边子集, 以 F 中边的所有端点为顶点集, 以 F 为边集的子图. 即:

$$G[F] = (\{v \in V \mid v \text{ 与 } F \text{ 中某边关联}\}, F)$$



定理 1.0.1 (Handshoking). 对于 $G = (V, E), V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 则:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \quad (1.1)$$



 **注.** 这实际上说明了: 奇度点的个数一定是偶数个.

定理 1.0.2 (Friendship). 如果一个图中任意两个顶点都恰好有一个公共顶点, 则

$$\exists v, d(v) = n - 1.$$



证明. 我们利用**反证法**来证明: 假设上述定理是错误的, 那么存在有限图 G , 其中任意两个顶点恰好有一个公共邻居, 但不存在与其他所有顶点相连的顶点。

(Step1) **证明 G 是正则图**

G 是正则图, 换言之: $d(u) = d(v), \forall u, v \in V$.

首先考察不相邻的顶点 u 和 v . 令 $d(u) = k$, 且 w_1, \dots, w_k 为 u 的邻居.

由于 u 和 v 恰好有一个共同邻居, 那么存在一个 w_i 与 v 相邻. 假设 w_2 与 v 相邻. 由于 u 和 w_2 恰好有一个共同邻居, 那么存在另一个 w_j 与 w_2 相邻. 假设 w_1 与 w_2 相邻, 那么 v 与 w_1 的共同邻居是 w_2 , 并假设对于任意 $i \geq 2$, v 与 w_i 的共同邻居为 z_i .

由于 G 中任意两个顶点恰好有一个公共邻居, G 满足 C_4 -条件, 即 G 中不存在长度为 4 的圈, 因为 4-圈中相邻的两顶点没有共同邻居. 根据 C_4 -条件可知, 这些 z_i 都是不同

的。否则, 若 z_2 与 w_2 和 w_3 都相邻, 那么 u, w_2, w_3, z_2 构成一个 4-圈。

那么我们得到, $d(v) \geq k = d(u)$ 。根据对称性, 我们有 $d(u) \geq d(v)$, 所以 $d(u) = d(v) = k$ 。

我们知道所有 w_i 以外的点不与 u 相邻或不与 v 相邻, 所以它们都有度 k , 因为不相邻的点有相同的度。另外, 由于存在与 w_2 不相邻的点, 比如 w_3 (否则 u, w_1, w_2, w_3 构成一个 4-圈), w_2 的度也是 k 。所以, 我们得到 G 是 k -正则的。

对 u 的 k 个邻居 w_1, \dots, w_k 的度求和, 得到 k^2 。由于 u 以外的所有顶点都与 u 恰好有一个共同邻居, 我们把 u 以外所有的顶点都数了一次, 而 u 被数了 k 次。所以, G 的总顶点数为 $n = k^2 - k + 1$ 。

(Step2) 代数手段 \Rightarrow 矛盾

对于 $k \leq 2$, $G = K_1$ 或 $G = K_3$, 这里 K_n 为有 n 个顶点的完备图, 其中任意两顶点被唯一的一条边相连, 但是 K_1 和 K_3 都是风车图, 所以 $k > 2$ 。接下来, 我们要通过线性代数得到矛盾。

一个有 n 个顶点图的邻接矩阵) $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ 中, 若顶点 i 和顶点 j 相邻, 则 $A_{ij} = 1$, 否则 $A_{ij} = 0$ 。根据 (Step1), G 的邻接矩阵 A 的每一行恰好有 k 个 1。而且, 由于 G 中任意两个顶点恰好有一个共同邻居, 对于任意两行, 都恰好有一列其中两个数都是 1。另外由于 A 为对称矩阵, 且主对角线上都是 0, 我们有

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J$$

这里 I 是单位矩阵, J 是全为 1 的矩阵。

由于 J 有重数为 1 的特征值 n 和重数为 $n-1$ 的特征值 0, A^2 有重数为 1 的特征值 $k-1+n = k^2$ 和重数为 $n-1$ 的特征值 $k-1$ 。

因为 A 是对称的, 所以是可对角化的, 所以 A 等价于一个对角矩阵, A^2 也等价于一个对角矩阵。由于对角化后特征值不变, A 有重数为 1 的特征值 k 和特征值 $\pm\sqrt{k-1}$ 。若 $\sqrt{k-1}$ 的重数为 r , $-\sqrt{k-1}$ 的重数为 s , 那么 $r+s = n-1$ 。

由于矩阵所有特征值之和为迹, 即主对角线上的值之和, 我们有 $k+r\sqrt{k-1}-s\sqrt{k-1} = \text{trace}(A) = 0$, 且 $r \neq s$ (否则 $3 < k = 0$), 所以 $\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}$ 。

有一个定理说, 若一个自然数 m 的平方根 \sqrt{m} 是有理数, 则 \sqrt{m} 是整数。戴德金对此定理的证明如下: 令 p 为满足 $p\sqrt{m} \in \mathbb{N}$ 的最小自然数。若 $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$, 则存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $0 < \sqrt{m} - l < 1$ 。

令 $q = p(\sqrt{m} - l)$, 那么 $q = p\sqrt{m} - pl \in \mathbb{N}$, 且 $q\sqrt{m} = pm - p\sqrt{m} \in \mathbb{N}$ 。但是 $q < p$, 所以这个矛盾表明 $\sqrt{m} \in \mathbb{N}$ 。

由上述定理可得, $\sqrt{k-1} \in \mathbb{N}$ 。根据 $(s-r)\sqrt{k-1} = k = (\sqrt{k-1})^2 + 1$, $\sqrt{k-1}$ 整除 $(\sqrt{k-1})^2 + 1$ 。又因为 $\sqrt{k-1}$ 整除 $(\sqrt{k-1})^2$, 而 $(\sqrt{k-1})^2$ 和 $(\sqrt{k-1})^2 + 1$ 为一奇一偶, 所以 $\sqrt{k-1} = 1$, 即 $k = 2$, 这时, 我们发现, 得到的结论与 $k > 2$ 矛盾, 所以 G 中存在一个与其他所有顶点相连的顶点。

□

定义 1.0.6 (线图). 设 $G = (V, E)$ 是一个无向图。 G 的线图, 记为 $L(G)$, 是一个这样的图:

- (i) $L(G)$ 的每个顶点对应原图 G 中的一条边。
- (ii) 在 $L(G)$ 中, 两个顶点相连当且仅当它们所对应的原图 G 中的两条边在 G 中共享一个公共顶点 (即这两条边是相邻的)。

形式化地, 其顶点集和边集定义为:

$$V(L(G)) = E(G)$$

$$E(L(G)) = \{\{e_1, e_2\} \subseteq E(G) \mid e_1 \neq e_2 \text{ 且 } e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}$$

这里将边 $e \in E(G)$ 视为由两个端点构成的集合。如果 G 是简单图, 则 $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ 意味着两条边至少有一个共同的端点。



定义 1.0.7 (度序列). 设 $G = (V, E)$ 是一个无向图, 其顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。令 $d_i = d(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度。称序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 为图 G 的度序列。

通常, 我们将度序列中的项按非递增顺序排列, 即 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, 并称 (d_1, d_2, \dots, d_n) 为图 G 的非递增度序列。

一个非负整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 如果它是某个简单图的度序列, 则称该序列是可图的。



定理 1.0.3. 给定以下两个序列且 (i) 降序:

$$(i) s, t_1, t_2, \dots, t_s, d_1, d_2, \dots, d_k \quad (ii) t_1 - 1, t_2 - 1, \dots, t_s - 1, d_1, d_2, \dots, d_k$$

则 (i) 可图 \iff (ii) 可图。



证明. 我们基于 Havel-Hakimi 定理的构造思想来证明。

首先注意到序列 (i) 具有特殊结构: 最大度 s , 接下来的 s 个度 t_1, \dots, t_s 满足 $s \geq t_1 \geq \dots \geq t_s \geq d_1 \geq \dots \geq d_k$ 。这正好符合 Havel-Hakimi 定理中删除最大度顶点后影响前 s 个顶点的情形。

如果序列 (i) 可图, 则存在一个简单图实现 G , 其中度最大的顶点 v_0 (度数为 s) 与度数为 t_1, \dots, t_s 的顶点 v_1, \dots, v_s 全部相邻。这是因为假设原图实现中 v_0 不与某个 v_i 相邻, 但与某个度较低的 u (度数为某个 d_j) 相邻。由于 $t_i \geq d_j$, 存在某个顶点 w 与 v_i 相邻但不与 u 相邻。那么我们可以进行边交换: 删除边 v_0u 和 v_iw , 添加边 v_0v_i 和 uw 。这保持所有顶点的度不变, 但增加了 v_0 与高度顶点的连接数。重复此过程, 最终 v_0 与所有 v_1, \dots, v_s 相邻。

现在假设 (i) 可图, 取满足上述性质的图 G 。删除顶点 v_0 及其 s 条边, 得到图 G' 。在 G' 中, 顶点 v_i ($1 \leq i \leq s$) 的度由 t_i 变为 $t_i - 1$, 而顶点 u_j ($1 \leq j \leq k$) 的度保持 d_j 不变。因此 G' 的度序列为 $(t_1 - 1, \dots, t_s - 1, d_1, \dots, d_k)$, 按降序排列即为序列 (ii)。故 (ii) 可图。


反之, 假设 (ii) 可图, 设 H 是其一个实现。添加新顶点 v_0 , 并连接 v_0 与 H 中度数为 $t_1 - 1, \dots, t_s - 1$ 的顶点 (即原 t_1, \dots, t_s 对应的顶点)。得到的新图 G 中, $\deg(v_0) = s$, 那些顶点的度恢复为 t_1, \dots, t_s , 其余顶点度仍为 d_1, \dots, d_k 。因此 G 的度序列为 (i)。由于操作不产生重边或自环, G 是简单图。


综上, 定理得证。 □


定义 1.0.8 (道 (Walk)). 设图 $G = (V, E)$, 一个**道**是指一个顶点和边的交错序列


$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$$


其中 $e_i = v_{i-1}v_i \in E$ 对 $i = 1, 2, \dots, k$ 成立。

v_0 称为道的**起点**, v_k 称为道的**终点**, k 称为道的**长度**。 


定义 1.0.9 (迹 (Trail)). 一个**迹**是指边不重复的道, 即道中所有边 e_1, e_2, \dots, e_k 互不相同。 

定义 1.0.10 (路 (Path)). 一个**路**是指顶点不重复的道 (边自然也不重复)。等价地, 路是顶点互不相同的迹。 

定义 1.0.11 (围长). 图中最短圈的长度。 

定理 1.0.4. G 是一个圈, 如果 $\forall v, d(v) \geq 2$ 则 G 一定有圈。 

证明. 若无圈, 我们取最长路则必然能找到一个圈。 □


定理 1.0.5. G 是一个简单图, 如果 $\delta \geq k$, 则 G 一定有长度为 $k+1$ 的路。 

证明. 还是取最长路构造即可。

设 $P = v_0v_1 \cdots v_\ell$ 是 G 中最长的一条路。由于 P 是极长的, 所有与 v_0 相邻的顶点都在 P 上。因为 $\deg(v_0) \geq \delta(G) \geq k$, 所以 v_0 在 P 上至少有 k 个邻居。

设 v_i 是 v_0 在 P 上最远的邻居, 即 i 是最大的下标使得 $v_0v_i \in E(G)$ 。考虑路 $v_0v_1 \cdots v_i$, 其长度为 i 。由于 v_0 的所有邻居都在 $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ 中 (由 i 的最大性保证), 且 v_0 至少有 k 个邻居, 所以 $i \geq k$ 。因此 P 包含一条从 v_0 到 v_i 的长度为 k 的路 (取 $v_0v_1 \cdots v_k$ 即可)。

更精确地, v_0 的邻居集 $N(v_0) \subseteq \{v_1, \dots, v_\ell\}$, 设其中下标最大的为 v_m , 则 $m \geq |N(v_0)| \geq k$, 于是子路 $v_0v_1 \cdots v_m$ 的长度 $m \geq k$ 。 □

定理 1.0.6. G 是连通的简单图, $n \geq 3$, 如果任意不相邻的 u, v 有 $d(u) + d(v) \geq k$, $k < n$, 则有 k 长的路。 

证明. 还是取最长路构造即可。

设 $P = v_1v_2 \cdots v_m$ 是 G 中的一条极长路。假设 $m \leq k$, 我们将推出矛盾。

由于 P 是极长的, 所有与 v_1 相邻的顶点都在 P 上, 所有与 v_m 相邻的顶点也都在 P 上。令 $S = \{v_i \in P \mid v_1v_{i+1} \in E(G)\}$, $T = \{v_i \in P \mid v_mv_i \in E(G)\}$ 。

显然 $|S| = d(v_1)$, $|T| = d(v_m)$ 。如果 v_1 和 v_m 相邻, 则 $d(v_1) + d(v_m) \geq k$ 自动成立。如果 v_1 和 v_m 不相邻, 由定理条件有 $d(v_1) + d(v_m) \geq k$ 。

现在考虑集合 S 和 T 的性质。若存在某个 $v_j \in S \cap T$, 则 $v_1v_{j+1} \in E(G)$ 且 $v_mv_j \in E(G)$, 于是我们可以构造圈 $v_1v_2 \cdots v_jv_mv_{m-1} \cdots v_{j+1}v_1$ 。由于 G 连通且 $m < n$ (因 $m \leq k \leq n$ 且

若 $m = n$ 则已有长度为 $n - 1 \geq k$ 的路), 存在某个不在圈上的顶点与圈上某顶点相邻, 从而可扩展得到更长的路, 与 P 的极大性矛盾。

因此 $S \cap T = \emptyset$, 于是 $|S \cup T| = |S| + |T| = d(v_1) + d(v_m) \geq k$ 。但 $S \cup T \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$, 故 $|S \cup T| \leq m - 1 \leq k - 1$, 矛盾。

所以假设 $m \leq k$ 不成立, 即 $m \geq k + 1$, G 包含长度至少为 k 的路。

 **注.** 核心思想在于最长路上的相邻两点不能与最长路的首位同时分别相连。

□

定理 1.0.7. G 是一个二部图, $G = [X, Y]$ 等价于 G 中无奇圈。



证明. 设 $G = (V, E)$ 。

(\Rightarrow) 若 G 是二部图, 设其顶点集划分为 $V = X \cup Y$, 且每条边的两个端点分别属于 X 和 Y 。假设 G 包含一个圈 $C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 。不妨设 $v_1 \in X$, 则 $v_2 \in Y, v_3 \in X$, 依此类推。一般地, $v_i \in X$ 当 i 为奇数, $v_i \in Y$ 当 i 为偶数。由于 $v_k v_1$ 是边, v_k 与 v_1 属于不同部, 故 k 为偶数。因此 C 是偶圈, G 不含奇圈。

(\Leftarrow) 若 G 不含奇圈, 我们构造二部划分。由于只需对每个连通分量分别证明, 不妨设 G 连通。任取顶点 $u \in V$, 定义:

$$X = \{v \in V \mid u \text{ 到 } v \text{ 的最短路径长度为偶数}\}, \quad Y = \{v \in V \mid u \text{ 到 } v \text{ 的最短路径长度为奇数}\}.$$

显然 $X \cap Y = \emptyset, X \cup Y = V$ 。下面证明 X 和 Y 都是独立集。

假设存在边 vw 两端点都在 X 中。设 P_u 和 Q_u 分别是 u 到 v 和 u 到 w 的最短路径, 长度均为偶数。设 x 是 P_u 和 Q_u 的最后一个公共顶点。则 x 到 v 的段 P_{xv} 与 x 到 w 的段 Q_{xw} 除 x 外无公共顶点, 且长度 $|P_{xv}|$ 和 $|Q_{xw}|$ 同奇偶 (因 $|P_u|$ 与 $|Q_u|$ 同奇偶)。于是 $P_{xv} + vw + Q_{xw}$ 构成一个圈, 其长度为 $|P_{xv}| + |Q_{xw}| + 1$, 为奇数, 矛盾。

同理可证 Y 中无边。因此 G 是二部图。

□

例 1.0.1. G 是一个简单图, $d(G) = d$ 则存在一个支撑二部图 $H, d(H) \geq \frac{d}{2}$ 。

 **注.** 即问是否存在二部划分使得度数大于总的一半



 **注.** 支撑二部图的定义为: H 是 G 的一个子图 (顶点相同), 且 H 是二部图。

证明. 我们通过迭代改进的方法构造这样的支撑二部子图。

构造过程:

1. 初始时, 将顶点集 $V(G)$ 任意划分为两个子集 A 和 B 。
2. 定义支撑二部子图 H 为包含所有 A - B 之间边的子图, 即:

$$E(H) = \{uv \in E(G) \mid u \in A, v \in B\}$$

3. 对于每个顶点 $v \in V(G)$, 记 $d_H(v)$ 为 v 在 H 中的度数。
4. 当存在顶点 v 满足 $d_H(v) < \lceil d/2 \rceil$ 时, 执行以下操作:

♡ 如果 $v \in A$, 将 v 从 A 移到 B

♡ 如果 $v \in B$, 将 v 从 B 移到 A

同时更新 $E(H)$ 为新的 $A-B$ 之间的所有边。

5. 重复步骤 4 直到不存在这样的顶点 v 。

正确性分析:

首先证明每次移动都严格改善目标顶点的度数。考虑一个不满足条件的顶点 v , 即 $d_H(v) < \lceil d/2 \rceil$ 。

移动前, $d_H(v)$ 是 v 与另一个部中顶点的连边数。移动后, v 的新度数为:

$$d'_H(v) = d_G(v) - d_H(v)$$

因为原来与 v 同部的连边 (不在 H 中) 现在变成了 $A-B$ 之间的边 (在 H 中), 而原来 $A-B$ 之间的边 (在 H 中) 现在变成了同部的边 (不在 H 中)。

由于 $d_G(v) \geq d$ 且 $d_H(v) < \lceil d/2 \rceil$, 我们有:

$$d'_H(v) > d - \lceil d/2 \rceil$$

分两种情况:

♡ 如果 d 是偶数, 则 $\lceil d/2 \rceil = d/2$, 于是:

$$d'_H(v) > d - d/2 = d/2 = \lceil d/2 \rceil$$

♡ 如果 d 是奇数, 则 $\lceil d/2 \rceil = (d+1)/2$, 于是:

$$d'_H(v) > d - (d+1)/2 = (d-1)/2 = \lfloor d/2 \rfloor$$

由于度数是整数, $d'_H(v) \geq \lfloor d/2 \rfloor + 1 = \lceil d/2 \rceil$

因此, 移动后 $d'_H(v) \geq \lceil d/2 \rceil$ 。

终止性证明:

定义势函数 $\Phi = |E(H)|$, 即 H 中的边数。

当移动顶点 v 时, Φ 的变化量为:

$$\Delta\Phi = [d_G(v) - d_H(v)] - d_H(v) = d_G(v) - 2d_H(v)$$

由于 $d_H(v) < \lceil d/2 \rceil$, 有:

♡ 如果 d 是偶数: $2d_H(v) \leq d-1$, 故 $\Delta\Phi \geq 1$

♡ 如果 d 是奇数: $2d_H(v) \leq d$, 但由 $d_H(v) < \lceil d/2 \rceil = (d+1)/2$ 得 $2d_H(v) \leq d-1$, 故 $\Delta\Phi \geq 1$

因此每次移动都严格增加 Φ 。由于 $0 \leq \Phi \leq |E(G)|$, 且 $|E(G)|$ 是有限值, 这个过程必然在有限步内终止。

当过程终止时, 对所有顶点 $v \in V(G)$ 都有 $d_H(v) \geq \lceil d/2 \rceil$, 即 $\delta(H) \geq \lceil d/2 \rceil$ 。

综上, 我们构造出了满足要求的支撑二部子图 H 。 □

例 1.0.2. G 是 n 个顶点的简单图, 无三角形, 则它最多有多少条边.

这实际上是 Mantel 定理.

定理 1.0.8 (Mantel 定理). 设 G 是 n 个顶点的简单图, 且 G 中不包含三角形, 则 G 最多有 $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ 条边.

证明. 我们使用数学归纳法证明. 当 $n = 1, 2$ 时结论显然成立. 假设对少于 n 个顶点的图结论成立, 考虑 n 个顶点的无三角形图 G .

取 G 中一条边 uv . 由于 G 无三角形, u 的邻点集 $N(u)$ 与 v 的邻点集 $N(v)$ 不相交 (除 u, v 自身外). 因此:

$$d(u) + d(v) \leq n$$

现在考虑删除顶点 u 和 v 得到的图 G' , 它有 $n - 2$ 个顶点且无三角形. 由归纳假设, G' 的边数最多为 $\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$.

于是 G 的边数满足:

$$|E(G)| \leq |E(G')| + (d(u) + d(v) - 1) \leq \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + (n-1)$$

计算:

$$\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + (n-1) = \left\lfloor \frac{n^2 - 4n + 4}{4} \right\rfloor + (n-1) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} - n + 1 \right\rfloor + (n-1)$$

当 n 为偶数时, $n = 2k$:

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} - n + 1 \right\rfloor + (n-1) = (k^2 - 2k + 1) + (2k - 1) = k^2 = \frac{n^2}{4}$$

当 n 为奇数时, $n = 2k + 1$:

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} - n + 1 \right\rfloor + (n-1) = \left\lfloor k^2 + k + \frac{1}{4} - 2k - 1 + 1 \right\rfloor + (2k) = k^2 - k + 2k = k^2 + k = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

因此 $|E(G)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

等号在完全二部图 $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ 时达到, 该图显然无三角形且边数为 $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. \square

例 1.0.3. 任意图 G , 若 $d(G) \geq d$ 则存在 $H \subseteq G$ 使得 $\delta(H) \geq \frac{d}{2}$.

证明. 我们通过迭代删除最小度顶点来构造这样的子图. 从 $H_0 = G$ 开始. 在第 i 步, 如果当前图 H_i 中存在顶点 v 满足 $d_{H_i}(v) \leq d/2$, 则删除 v 得到 $H_{i+1} = H_i - v$. 重复此过程直到无法再删除这样的顶点为止, 设最终得到的图为 H .

首先证明这个过程必然终止, 因为每一步顶点数减少 1, 而图 G 的顶点数是有限的.

现在证明 $\delta(H) > d/2$. 由构造过程, 当算法终止时, H 中每个顶点的度都大于 $d/2$, 否则会被继续删除.

最后证明 H 非空. 反设 H 是空图, 这意味着我们删除了 G 的所有顶点. 考虑删除过程中被删除的顶点顺序 v_1, v_2, \dots, v_n , 其中 $n = |V(G)|$. 对于每个被删除的顶点 v_i , 在删除时刻它在当前图中的度不超过 $d/2$.

设 $m = |E(G)|$, 则 $d(G) = 2m/n > d$, 即 $m > dn/2$ 。

另一方面, 每条边 (u, v) 在删除过程中, 当第一个端点被删除时, 该边就从当前图中消失了。因此, 所有顶点的度数和 (在各自被删除的时刻) 至少为 $2m$ (因为每条边对其两个端点的度数各贡献 1)。但由删除规则, 每个顶点 v_i 在删除时的度数不超过 $d/2$, 所以总度数和不超过 $n \cdot (d/2)$ 。于是:

$$2m \leq n \cdot \frac{d}{2}$$

这与 $m > dn/2$ 矛盾。因此 H 非空, 且满足 $\delta(H) > d/2$ 。 □

2. 树 (Tree)



定义 2.0.1 (切边). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 边 $e \in E$ 称为 G 的切边 (或桥), 如果 $G - e$ 的连通分支数比 G 的连通分支数多 1。

等价定义: 边 e 是切边当且仅当 e 不包含在 G 的任何圈中。



推论 2.0.1. 任意连通图都有一个支撑树作为子图。



 **注.** 支撑树和生成树是同个东西: *Spanning Tree*.

定理 2.0.2. G 是一个连通图, T_1, T_2 为支撑树, 令 $e \in E(T_1) - E(T_2)$.

(1) $\exists f \in E(T_2) - E(T_1)$ 使得 $T_1 - e + f$ 为生成树。

(2) $\exists f \in E(T_2) - E(T_1)$ 使得 $T_2 - e + f$ 为生成树。



证明. (1) 考虑从 T_1 中删除边 e , 这将 T_1 分成两个连通分支 A 和 B 。由于 T_2 是连通图且包含顶点集 A 和 B , T_2 中必有一条边 f 连接 A 和 B , 且 $f \neq e$ (因为 $e \notin E(T_2)$)。显然 $f \in E(T_2) \setminus E(T_1)$, 否则 T_1 中已有边连接 A 和 B , 矛盾。

现在证明 $T_1 - e + f$ 是支撑树。首先, $T_1 - e + f$ 有 $n - 1$ 条边 (与 T_1 相同)。其次,

$T_1 - e + f$ 是连通的: 对于任意 $u \in A$ 和 $v \in B$, 在 $T_1 - e$ 中它们不连通, 但加入 f 后, 通过 f 可以连接 A 和 B , 因此图变得连通。由于具有 $n - 1$ 条边的连通图是树, 故 $T_1 - e + f$ 是支撑树。

(2) 在 T_2 中添加边 e 会形成一个唯一的圈 C (因为树加一边产生一圈)。这个圈 C 必须包含 e 和至少一条 T_2 中不在 T_1 中的边 (因为如果 C 中所有边都在 T_1 中, 则 T_1 包含圈, 矛盾)。设 f 是 C 中一条属于 $E(T_2) \setminus E(T_1)$ 的边。

现在证明 $T_2 - f + e$ 是支撑树。首先, $T_2 - f + e$ 有 $n - 1$ 条边。其次, $T_2 - f + e$ 是连通的: 删除 f 会断开 T_2 , 但加入 e 后, 由于 e 连接了 f 在 T_2 中连接的两个连通分支 (因为 e 在圈 C 中), 图重新变得连通。因此 $T_2 - f + e$ 是支撑树。□

定义 2.0.2 (余树). 设 $G = (V, E)$ 是一个连通图, T 是 G 的一棵生成树。 T 的**余树** (或余林) 定义为边集 $E \setminus E(T)$, 记作 T^* 或 \bar{T} 。

如果 G 有 n 个顶点、 m 条边, 则余树有 $m - n + 1$ 条边。



定义 2.0.3 (边割). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, $S \subset V$ 是非空真子集。**边割** $[S, V \setminus S]$ 是 G 中所有一个端点在 S 中、另一个端点在 $V \setminus S$ 中的边的集合。

边割的规模 $|[S, V \setminus S]|$ 称为割的容量。



定义 2.0.4 (键). **键** (或极小边割) 是极小的非空边割, 即删除该边割会使图连通分支数增加, 但它的任何真子集都不具有这个性质。



定理 2.0.3. T 是连通图 G 的生成树, e 是 T 的任意一条边:

(1) 余树 \bar{T} 不包含 G 的键。

(2) $\bar{T} + e$ 包含 G 的唯一键。



证明. (1) 假设余树 \bar{T} 包含某个键 B 。由于 $B \subseteq \bar{T}$, B 与生成树 T 不相交。但键的定义要求删除 B 后图的连通分支数增加, 而 T 是连通的且与 B 不相交, 因此 T 在 $G - B$ 中仍然是连通支撑子图, 这意味着 $G - B$ 仍然连通, 矛盾。故余树 \bar{T} 不包含任何键。

(2) 考虑从生成树 T 中删除边 e , 得到 $T - e$, 它有两个连通分支, 设对应的顶点划分为 $(S, V \setminus S)$ 。令 $B = [S, V \setminus S]$ 是相应的边割。首先证明 B 是键: 由于 $T - e$ 在 S 和 $V \setminus S$ 内部都是连通的, 且 B 是连接这两个部分的全部边的集合, 删除 B 后图会分裂成至少两个连通分支, 且 B 是极小的 (因为 T 是树, e 是连接 S 和 $V \setminus S$ 的唯一树边)。

再证明唯一性: 假设存在另一个键 $B' \subseteq T - e$ 。由于 B' 是键, 它必须包含连接 S 和 $V \setminus S$ 的边, 但 $T - e$ 中连接 S 和 $V \setminus S$ 的边只有 B 中的那些边 (因为 T 是树, e 是连接这两个部分的唯一树边)。因此 B' 必须包含 B 的某个非空子集, 但键是极小的, 所以 $B' = B$ 。故 $T - e$ 包含唯一的键 B 。□

定义 2.0.5. **删边:** $E(G) - e$; **收缩边:** $G \setminus e$ 删 e 使它的两个端点重合。



定理 2.0.4. 若 $e \in E(G)$, 则 $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \setminus e)$

其中 $\tau(G)$ 是 G 的支撑树数.



证明. 将 G 的所有支撑树按照是否包含边 e 分为两类:

第一类: 不包含边 e 的支撑树. 这些支撑树就是图 $G - e$ 的支撑树, 因此这类支撑树的数目为 $\tau(G - e)$.

第二类: 包含边 e 的支撑树. 对于每个这样的支撑树 T , 将边 e 收缩后, T/e 是 G/e 的一个支撑树. 反之, 对于 G/e 的每个支撑树 T' , 通过将收缩的顶点”展开”为边 e 的两个端点, 并加入边 e , 可以得到 G 的一个包含 e 的支撑树. 这是一一对应关系, 因此这类支撑树的数目为 $\tau(G/e)$.

由于这两类支撑树互不相交且覆盖了 G 的所有支撑树, 所以

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$$

注. 分成两类情况来讨论: 实际上就是删掉一个点的图和缩点后的图.

□

定理 2.0.5 (1889, Caylay).

$$\tau(K_n) = n^{n-2} \quad (2.1)$$



Prüfer 编码证明 [prufer1918]. 我们建立 K_n 的支撑树集合与长度为 $n - 2$ 的序列 (每个分量在 $\{1, \dots, n\}$ 中取值) 之间的一一对应.

编码过程: 给定标号树 T (顶点标号为 $1, 2, \dots, n$), 执行以下步骤:

1. 初始化空序列 P
2. 当树中顶点数 > 2 时重复:
 - ♡ 找到当前标号最小的叶子顶点 v (度数为 1 的顶点)
 - ♡ 设 u 是与 v 相邻的唯一顶点
 - ♡ 将 u 的标号加入序列 P
 - ♡ 从树中删除顶点 v 及其关联的边
3. 最终得到 Prüfer 序列 $P = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$

解码过程: 给定 Prüfer 序列 $P = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, 执行以下步骤:

1. 初始化 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ (所有顶点的集合)
2. 对于 $i = 1$ 到 $n - 2$:
 - ♡ 在 A 中找到不在 $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2})$ 中出现的最小标号 b_i
 - ♡ 添加边 (b_i, a_i) 到树中
 - ♡ 从 A 中删除 b_i
3. 最后 A 中剩下两个顶点, 在它们之间添加一条边

可以验证这两个过程是互逆的：对于任意树 T ，有 $\text{decode}(\text{encode}(T)) = T$ ；对于任意序列 P ，有 $\text{encode}(\text{decode}(P)) = P$ 。

由于长度为 $n-2$ 的序列共有 n^{n-2} 个，且这是一一对应，故 $\tau(K_n) = n^{n-2}$ 。 \square

矩阵树定理证明 [kirchhoff1847]. 矩阵树定理 (Matrix-Tree Theorem) 表明：图 G 的支撑树数目等于其拉普拉斯矩阵 L 的任意 $n-1$ 阶代数余子式。

对于完全图 K_n ，其拉普拉斯矩阵为：

$$L = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

考虑删除第 n 行第 n 列后的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

令 J 为 $(n-1) \times (n-1)$ 的全 1 矩阵，则 $M = nI - J$ 。

计算 $\det(M)$ ：矩阵 J 的特征值为 $n-1$ (重数 1) 和 0 (重数 $n-2$)，因此 $M = nI - J$ 的特征值为：

$$\heartsuit \quad n - (n-1) = 1 \quad (\text{重数 } 1)$$

$$\heartsuit \quad n - 0 = n \quad (\text{重数 } n-2)$$

故 $\det(M) = 1 \times n^{n-2} = n^{n-2}$ 。

由矩阵树定理， $\tau(K_n) = \det(M) = n^{n-2}$ 。 \square

生成函数法证明 [moon1970]. 设 T_n 为 n 个顶点的标号树数目。考虑指数生成函数：

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} T_n \frac{x^n}{n!}$$

关键观察：每个 n 个顶点的标号树可以唯一地分解为根顶点和附着在根上的若干子树。更精确地，考虑以顶点 1 为根的树，其余 $n-1$ 个顶点构成若干子树，这些子树通过边与根相连。

由 Cayley 公式， n 个顶点的标号森林 (由 k 棵树组成) 且指定 k 个根 (标记为 $1, 2, \dots, k$) 的数目为 kn^{n-k-1} 。

考虑函数方程：设 $F(x)$ 为有根树的生成函数，则每个有根树可以看作根连接着若干个有根树 (顺序不重要)，因此：

$$F(x) = xe^{F(x)}$$

使用 Lagrange 反演公式：如果 $F(x) = x\phi(F(x))$ ，其中 $\phi(t) = e^t$ ，则：

$$[x^n]F(x) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\phi(t)^n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

因此 $T_n = n! \cdot \frac{n^{n-1}}{n!} = n^{n-1}$ ，但这是有根树的数目。无根树的数目为 $T_n = n^{n-2}$ (因为有 n 个不同的根选择)。 \square

递归公式法证明 [aigner2018]. 我们对顶点数 n 进行归纳证明。

基础情况: 当 $n = 1$ 时, $\tau(K_1) = 1 = 1^{1-2}$; 当 $n = 2$ 时, $\tau(K_2) = 1 = 2^{2-2}$ 。

归纳假设: 假设对于所有 $m < n$, 有 $\tau(K_m) = m^{m-2}$ 。

考虑 K_n , 固定一个顶点 v 。我们计算包含 v 且 v 的度数为 k 的支撑树数目。这样的树可以这样构造:

- ♡ 从其余 $n - 1$ 个顶点中选择 k 个作为 v 的邻居: $\binom{n-1}{k}$ 种选择
- ♡ 这 k 个邻居顶点与 v 构成一个星形结构
- ♡ 剩下的 $n - 1 - k$ 个顶点 (不在 v 的邻居集合中) 可以形成任意森林, 但要保证整个图连通

更精确地, 包含顶点 v 且 v 的度数为 k 的支撑树数目为:

$$\binom{n-1}{k} \cdot k \cdot (n-1)^{n-k-2}$$

其中:

- ♡ $\binom{n-1}{k}$: 选择 v 的 k 个邻居
- ♡ k : 每个邻居都可以连接到 v 的某条边 (但这里实际上是计算不同的树结构)
- ♡ $(n-1)^{n-k-2}$: 由归纳假设, $n-1$ 个顶点的完全图有 $(n-1)^{n-3}$ 棵支撑树, 但需要调整计数

实际上, 使用更精确的计数公式: 包含特定顶点且该顶点度数为 k 的支撑树数目为:

$$\binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$


对所有可能的度数 k 求和:

$$\tau(K_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

令 $j = k - 1$, 则:

$$\tau(K_n) = \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (n-1)^{n-2-j} = [(n-1) + 1]^{n-2} = n^{n-2}$$

最后一个等式由二项式定理得到。这就完成了归纳证明。 □

定理 2.0.6. 如果 T 是一个有 k 条边的树, G 是一个简单图且 $\delta(G) \geq k$ 则 $T \subseteq G$. 

证明. 我们对树 T 的顶点数 $m = k + 1$ 进行归纳证明。


当 $m = 1$ 时, T 是单个顶点, 显然包含于 G 。

当 $m = 2$ 时, T 是一条边。由于 $\delta(G) \geq 1$, G 至少有一条边, 故 $T \subseteq G$ 。

假设定理对顶点数少于 m 的树成立。现在考虑有 m 个顶点的树 T 。设 v 是 T 的一个叶子顶点 (度数为 1 的顶点), u 是 v 的唯一邻居。令 $T' = T - v$, 这是有 $m - 1$ 个顶点的树。由归纳假设, $T' \subseteq G$, 即存在同态嵌入 $f: V(T') \rightarrow V(G)$ 使得 f 是单射且保持边关系。

现在考虑顶点 $f(u) \in V(G)$ 。由于 $\deg_G(f(u)) \geq \delta(G) \geq k = m - 1$ ，而 $f(u)$ 在 T' 的像中最多与 $m - 2$ 个顶点相邻（因为 T' 有 $m - 1$ 个顶点，且 u 在 T' 中的度数至多为 $m - 2$ ），所以存在某个顶点 $w \in V(G) \setminus f(V(T'))$ 与 $f(u)$ 相邻。

定义 $f(v) = w$ ，则 $f: V(T) \rightarrow V(G)$ 是 T 到 G 的同态嵌入，因此 $T \subseteq G$ 。 □

推论 2.0.7. $\delta(G) \geq k$ 换成 $e(G) \geq n(k - 1)$ 仍然成立. 

证明. $e(G) \geq n(k - 1) \Rightarrow \delta(G) \geq k$ 接着便同理. □

3. 连通度



定义 3.0.1 (点割). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 且 G 不是完全图。顶点集 V 的一个子集 V' 称为 G 的一个点割, 如果从 G 中删除 V' 中的所有顶点后, 所得子图 $G - V'$ 的连通分支数大于 G 的连通分支数。若 V' 是 G 的点割, 且 $G - V'$ 包含至少两个连通分支, 则称 V' 分离 G 。



定义 3.0.2 (点连通度). 图 G 的点连通度, 记作 $\kappa(G)$, 定义为满足以下条件的最小整数 k : 存在一个大小为 k 的点割 V' , 使得 $G - V'$ 不连通或者成为平凡图 K_1 。

1. 规定不连通图的点连通度为 0。
2. 规定完全图 K_n 的点连通度为 $n - 1$ 。

若 $\kappa(G) \geq k$, 则称图 G 是 k -点连通的。



定义 3.0.3 (边割). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。边集 E 的一个子集 E' 称为 G 的一个割, 如果从 G 中删除 E' 中的所有边后, 所得子图 $G - E'$ 的连通分支数大于 G 的连通分支数。若 E' 是 G 的边割, 且 $G - E'$ 包含至少两个连通分支, 则称 E' 分离 G 。



定义 3.0.4 (边连通度). 图 G 的**边连通度**, 记作 $\kappa'(G)$ 或者 $\lambda(G)$, 定义为满足以下条件的最小整数 k : 存在一个大小为 k 的边割 E' , 使得 $G - E'$ 不连通。

1. 规定不连通图的边连通度为 0。
2. 规定平凡图 K_1 的边连通度为 0。

若 $\lambda(G) \geq k$, 则称图 G 是 k -边连通的。



定理 3.0.1. $\forall G, \kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.



证明. 我们分两部分证明该不等式。

首先证明右边的不等式 $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ 。

设 v 是图 G 中一个度数 $d(v) = \delta(G)$ 的顶点。考虑与 v 相关联的所有边构成的集合 E_v 。显然 $|E_v| = \delta(G)$ 。当我们从 G 中删除边集 E_v 后, 顶点 v 成为孤立点, 即 $G - E_v$ 不连通。因此 E_v 是 G 的一个边割。根据边连通度 $\kappa'(G)$ 的定义, 它是所有边割的大小的最小值, 故有

$$\kappa'(G) \leq |E_v| = \delta(G).$$

接下来证明左边的不等式 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ 。

如果 G 是不连通图或平凡图 K_1 , 则 $\kappa(G) = 0$, 不等式 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ 自然成立。现假设 G 是连通且非平凡的图。设 $[S, \bar{S}]$ 是一个最小边割, 即 $|[S, \bar{S}]| = \kappa'(G)$, 且 S 和 $\bar{S} = V(G) \setminus S$ 均非空。

情况一: 若存在某个顶点 $u \in S$, 使得 u 与 \bar{S} 中所有顶点均不相邻, 同时存在某个顶点 $v \in \bar{S}$, 使得 v 与 S 中所有顶点均不相邻。此时, 选择 $u \in S$ 和 $v \in \bar{S}$, 使得 u 不与 \bar{S} 相邻, v 不与 S 相邻。考虑边割 $[S, \bar{S}]$, 它分离了 u 和 v 。由于 u 和 v 分别与另一部分无边相连, 删除该边割后它们分别属于不同的连通分支。此时 $\kappa'(G) = |[S, \bar{S}]| \geq 1$, 而 $\kappa(G) \geq 1$ (因为 G 连通), 故 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ 成立。

情况二: 若非情况一, 则 S 中每个顶点都与 \bar{S} 中至少一个顶点相邻, 或者 \bar{S} 中每个顶点都与 S 中至少一个顶点相邻。不妨设 S 中每个顶点都与 \bar{S} 中至少一个顶点相邻 (另一种情况对称处理)。现在构造一个点割 X 如下: 对边割 $[S, \bar{S}]$ 中的每一条边 e , 选取它在 S 中的那个端点加入 X 。这样构造的集合 X 满足 $|X| \leq |[S, \bar{S}]| = \kappa'(G)$ 。我们断言 X 是 G 的一个点割。任取 $u \in S \setminus X$ 和 $v \in \bar{S}$ 。由于 X 包含了所有从 S 到 \bar{S} 的边在 S 侧的端点, 删除 X 后, $S \setminus X$ 和 \bar{S} 之间没有边相连。同时, 由假设, S 中每个顶点都与 \bar{S} 相邻, 故 $S \setminus X$ 非空 (否则 $S = X$, 但 $|X| \leq \kappa'(G)$ 且 S 至少有一个顶点, 除非 $\kappa'(G) = 0$ 这与连通性矛盾)。因此, 在 $G - X$ 中, $S \setminus X$ 和 \bar{S} 位于不同的连通分支, 即 $G - X$ 不连通。所以 X 是一个点割。由点连通度 $\kappa(G)$ 的定义, 它是所有点割的大小的最小值, 故有

$$\kappa(G) \leq |X| \leq \kappa'(G).$$

综合以上两种情况, 不等式 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ 得证。

注. 主要还是左半部分的不等式比较难证明, 右边是显然的。但实际上左边不等式的证明思路就是我们基于边割上的点进行考虑分两种情况讨论 S 与 \bar{S} 的关系。

□

定义 3.0.5 (k -连通子图). 设 G 是一个图, H 是 G 的一个子图。如果 H 本身作为一个图是 k -连通的, 即满足 $\kappa(H) \geq k$, 则称 H 是 G 的一个 k -连通子图。

换言之, H 是 G 的 k -连通子图当且仅当:

1. H 的顶点数 $|V(H)| > k$
2. 从 H 中删除任意少于 k 个顶点后, 剩下的子图仍然连通



定义 3.0.6 (块). 图 G 的一个块是指图 G 的一个极大 2-连通子图, 或者是一个桥 (即一条其删除会增加图连通分支数的边) 连同它的两个端点, 或者是一个孤立顶点。或者说就是一个极大的没有割点的连通子图。



性质 3.0.1. 1. 图上的边不是块

2. 一条边不是块等价于它是割边
3. 树的块是边
4. 如果一个块超过两个点, 则它是 2-连通的



证明. 1. “块”是极大的无割点子图。一条边 (连同其两个端点) 本身可能是一个块, 也可能不是。如果这条边是割边 (即删除此边后图连通分支数增加), 那么由这条边及其两个端点构成的子图就是一个块 (根据定义, 桥及其端点是块的一种)。但如果这条边在一个圈上, 那么它所在的极大无割点子图 (即包含它的那个 2-连通分支) 会比这条边本身更大, 因此这条边本身就不是一个块。

2. 这条性质是第 1 条的直接推论。一条边是块, 当且仅当它是极大的无割点子图。对于一条边 $e = uv$ 而言, 它作为子图是无割点的。如果 e 是割边, 那么删除 e 后, u 和 v 分属不同的连通分支, 因此无法通过添加任何其他边或顶点来形成一个包含 e 的更大的无割点子图 (因为任何尝试都会引入割点 u 或 v), 所以 e 本身是极大的, 从而是块。反之, 如果 e 不是割边, 那么它必然包含在某个圈中。这个圈所在的 2-连通子图是一个更大的无割点子图, 因此 e 本身不是极大的, 从而不是块。
3. 树是无圈的连通图, 这意味着树中的每一条边都是割边。根据上一条性质, 每一条割边本身就是一个块。同时, 树中没有 2-连通的子图 (因为 2-连通图必须包含圈), 也没有孤立顶点 (除非是只有一个顶点的平凡树, 其本身是一个块)。因此, 树的块分解就是将其分解为所有的边。
4. 根据块的定义, 块是极大的无割点子图。如果一个块 B 只包含两个顶点, 那么它是由一条边 (桥) 及其两个端点构成, 此时 $\kappa(B) = 1$, 它不是 2-连通的。如果一个块 B 包含超过两个顶点, 假设它不是 2-连通的, 即 $\kappa(B) \leq 1$ 。由于 B 顶点数大于 2 且连通, 若 $\kappa(B) = 1$, 则 B 中存在割点, 这与 B 是“无割点”的子图矛盾。因此必有 $\kappa(B) \geq 2$, 即 B 是 2-连通的。

□

性质 3.0.2. 1. G 的任意两个块最多只有一个公共点

2. G 的任意圈包含在一个块中

3. G 的所有块构成 G 的一个边分解



证明. 1. 假设有两个不同的块 B_1 和 B_2 共享两个或以上的公共顶点。考虑它们的并 $B = B_1 \cup B_2$ 。可以证明 B 也是一个无割点的连通子图：因为 B_1 和 B_2 共享至少两个顶点，删除其中一个顶点不会同时断开 B_1 和 B_2 （因为它们在另一个公共顶点处仍然连通），从而不会断开 B 。这与 B_1 和 B_2 的极大性矛盾（ B 是比 B_1 或 B_2 更大的无割点子图）。因此，任意两个块至多共享一个顶点，并且这个共享的顶点一定是图 G 的割点（因为删除该顶点会断开原本在各自块中连通的路径）。

2. 圈本身是一个 2-连通子图（因为删除任何一个顶点后，剩下的图仍然是一条路径，从而还是连通的）。根据块的定义（极大的 2-连通子图或桥/孤立点），一个圈必然包含在某个极大的 2-连通子图中，即包含在某个块中。（注意：一个圈本身可能就是一个块，也可能是一个更大块的真子图。）

3. “边分解”意味着图 G 的每条边都恰好属于一个块，并且不同的块之间没有公共边（它们只能共享顶点，如第一条性质所述）。这是因为：

♡ 每条边要么是割边（此时它自身构成一个块），要么位于某个圈上（从而位于某个 2-连通子图中，并最终包含在一个极大的 2-连通子图，即一个块中）。

♡ 如果一条边属于两个不同的块，那么这两个块将共享这条边以及它的两个端点，这与性质 3.2(1) 矛盾。

因此，块将图 G 的边集划分成若干不相交的子集，每个子集对应一个块的边集。

□

接下来我们可以考虑一种特殊的树形结构：

定义 3.0.7 (Block Tree). $H : V(H) = \{B_i \mid B_i \text{ 是边或者非边的块} \} \cup \{v_j \mid v_j \text{ 是割点} \}, E(H) = \{B_i v_j \mid v_j \in B_i \}$



定义 3.0.8 (闭耳朵). 设 H 是图 G 的一个子图。一条闭耳朵（或称闭耳分解中的耳朵）是指 G 中的一条圈（环） P ，满足：

1. P 是一个圈，即起点和终点相同的路径。

2. 除了起点（也是终点） v 可能属于 H 外， P 上的所有其他内部顶点和边均不属于 H 。

换言之，闭耳朵是一个与 H 仅在某个顶点处相交的圈。



定义 3.0.9 (开耳朵). 设 H 是图 G 的一个子图。一条开耳朵（或称开耳分解中的耳朵）是指 G 中的一条路径 P ，满足：



1. P 的起点 u 和终点 v 是两个不同的顶点, 且 $u, v \in V(H)$ 。

2. 除了起点 u 和终点 v 外, P 上的所有其他内部顶点和边均不属于 H 。

换言之, 开耳朵是一条连接 H 中两个顶点的路径, 且其内部顶点与 H 不交。



定理 3.0.2 (Whitney, 1932). 一个至少有 3 个顶点的图 G 是 2-连通的, 当且仅当它有一个开耳分解 (G_0, G_1, \dots, G_k) , 其中 G_0 是一个圈, 且每个 G_i ($i \geq 1$) 都是通过向 G_{i-1} 添加一个开耳朵得到的。



证明. 我们证明充分性和必要性。

必要性 (\Rightarrow): 假设 G 是 2-连通的。我们通过归纳法构造一个开耳分解。

1. 由于 G 是 2-连通的, 它至少包含一个圈。任取 G 中的一个圈作为 G_0 。
2. 假设已经构造出 G 的一个 2-连通子图 G_{i-1} ($i \geq 1$), 且 $G_{i-1} \neq G$ 。由于 G 连通, 存在一条边 $e = uv$, 其中 $u \in V(G_{i-1}), v \notin V(G_{i-1})$ 。因为 G 是 2-连通的, $G - u$ 仍然连通, 故在 $G - u$ 中存在一条从 v 到 $G_{i-1} - u$ 中某顶点 w ($w \neq u$) 的路径 P' 。设 P 是从 u 出发, 经过边 e 到 v , 再沿路径 P' 到达 w 的路径。这条路径 P 就是一个开耳朵: 其端点 $u, w \in V(G_{i-1})$, 且除端点外所有内部顶点都不在 G_{i-1} 中。令 $G_i = G_{i-1} \cup P$, 则 G_i 仍然是 2-连通的。
3. 重复上述过程, 由于 G 是有限图, 最终在有限步后得到 $G_k = G$ 。

这就完成了必要性的证明。

 **注.** 就是利用数学归纳法结合 2-连通的性质删点来证明。

充分性 (\Leftarrow): 假设 G 有一个从圈 G_0 开始的开耳分解 (G_0, G_1, \dots, G_k) 。我们证明每个 G_i 都是 2-连通的, 从而 $G = G_k$ 也是 2-连通的。

1. 基始: G_0 是一个圈, 显然是 2-连通的。
2. 归纳: 假设 G_{i-1} 是 2-连通的, 考虑通过添加开耳朵 P 得到 G_i 。设 P 的端点为 u 和 v 。要证 G_i 是 2-连通的, 即删除任意一个顶点 x 后, $G_i - x$ 仍然连通。
 - (a) 若 x 不在 P 上, 则 $G_i - x = (G_{i-1} - x) \cup P$ 。由于 G_{i-1} 是 2-连通的, $G_{i-1} - x$ 连通。路径 P 连接着 $G_{i-1} - x$ 中的两个顶点 u 和 v , 因此 $G_i - x$ 连通。
 - (b) 若 x 在 P 上但不是端点, 则 x 是 P 的内部顶点。此时 $G_i - x = G_{i-1} \cup (P - x)$ 。由于 $P - x$ 是两条分别从 u 和 v 出发的不相交路径 (它们可能在 G_{i-1} 中连接), 且 G_{i-1} 本身连通, 故 $G_i - x$ 连通。
 - (c) 若 x 是 P 的端点, 不妨设 $x = u$ 。则 $G_i - u = (G_{i-1} - u) \cup (P - u)$ 。由于 G_{i-1} 是 2-连通的, $G_{i-1} - u$ 连通。路径 $P - u$ 连接着 v (属于 $G_{i-1} - u$) 和 P 的另一个端点 (也属于 $G_{i-1} - u$), 因此 $G_i - u$ 连通。

综上, G_i 是 2-连通的。由归纳法, $G_k = G$ 是 2-连通的。

充分性得证。 □

定义 3.0.10 ((x, y)-点割). 设 x 和 y 是图 G 中两个不同的顶点。一个 (x, y)-点割 是顶点集 $S \subseteq V(G) \setminus \{x, y\}$, 使得在子图 $G - S$ 中不存在从 x 到 y 的路径。



定义 3.0.11 (点连通度与内部不交路径数). 设 x 和 y 是图 G 中两个不同的顶点。

1. 定义 $\kappa_G(x, y)$ 为最小的 (x, y)-点割的大小。
2. 定义 $\lambda_G(x, y)$ 为 G 中从 x 到 y 的、内部顶点互不相交的路径的最大数量。



定理 3.0.3 (Menger 定理 (点形式)). 设 x 和 y 是图 G 中两个不同的非相邻顶点, 则

$$\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y).$$

即, 分离 x 和 y 所需删除的最少顶点数, 等于它们之间内部顶点互不相交的路径的最大数量。

换言之: 就是一个非平凡图 k -连通等价于图中任意两点 u, v 之间存在 k 条内部不交的 u, v 路。



证明. 我们通过对图 G 的边数 $m = |E(G)|$ 进行归纳来证明。

首先注意到, $\lambda_G(x, y) \leq \kappa_G(x, y)$ 是显然的, 因为任何 (x, y)-点割必须包含每条 $x-y$ 路径上的至少一个内部顶点, 而内部不交的路径需要不同的内部顶点。

下面证明 $\kappa_G(x, y) \leq \lambda_G(x, y)$ 。

基始情况: 当 $m = 0$ 时, G 是空图。由于 x 和 y 不相邻且无边连接, 不存在 $x-y$ 路径, 故 $\lambda_G(x, y) = 0$ 。同时, 空集 \emptyset 就是一个 (x, y)-点割, 故 $\kappa_G(x, y) = 0$ 。等式成立。

归纳假设: 假设定理对所有边数少于 m 的图成立。

归纳步骤: 考虑边数为 m 的图 G 以及其中两个不同的非相邻顶点 x 和 y 。

令 $k = \kappa_G(x, y)$ 。考虑一个最小的 (x, y)-点割 S , $|S| = k$ 。

情况 1: 存在某个顶点 $v \in S$, 使得 v 不是 x 的邻点且不是 y 的邻点。

考虑图 $G' = G - v$ 。在 G' 中, $S \setminus \{v\}$ 不是一个 (x, y)-点割 (因为 S 是最小的), 所以存在一条 $x-y$ 路径 P 不经过 $S \setminus \{v\}$ 。但 P 必须经过 v (因为 S 是 G 中的点割), 所以 P 形如 $x \rightarrow \cdots \rightarrow a \rightarrow v \rightarrow b \rightarrow \cdots \rightarrow y$, 其中 $a, b \notin S$ 。

现在构造两个图:

1. G_1 : 在 G 中收缩从 b 到 y 的部分 (包括 b 和 y 以及它们之间的路径) 为一个新顶点 y' 。
2. G_2 : 在 G 中收缩从 x 到 a 的部分 (包括 x 和 a 以及它们之间的路径) 为一个新顶点 x' 。

在两个图中, S 仍然是 (x, y') (在 G_1 中) 和 (x', y) (在 G_2 中) 的点割。由归纳假设, 在 G_1 中存在 k 条内部不交的 $x-y'$ 路径, 在 G_2 中存在 k 条内部不交的 $x'-y$ 路径。将这些路径组合起来, 并注意到经过 v 的路径可以连接起来, 我们得到 G 中的 k 条内部不交的 $x-y$ 路径。

情况 2: S 中的每个顶点要么是 x 的邻点, 要么是 y 的邻点。

将 S 划分为:

1. $S_x = S \cap N(x)$ (x 的邻点)

2. $S_y = S \cap N(y)$ (y 的邻点)

3. $S_{xy} = S \cap N(x) \cap N(y)$


由于 S 是最小点割, $S_x \setminus S_{xy}$ 和 $S_y \setminus S_{xy}$ 都非空。

考虑边 $e = (u, v)$, 其中 $u \in S_x \setminus S_{xy}$, $v \in S_y \setminus S_{xy}$ (如果这样的边存在)。在 $G - e$ 中, S 仍然是一个 (x, y) -点割, 且大小为 k 。由归纳假设, 在 $G - e$ 中存在 k 条内部不交的 x - y 路径, 这些路径在 G 中也是内部不交的 x - y 路径。

如果不存在这样的边 e , 那么考虑图 $G' = G - (S_{xy} \cup \{x, y\})$ 。在 G' 中, $S_x \setminus S_{xy}$ 和 $S_y \setminus S_{xy}$ 之间没有边。由 Menger 定理的归纳假设, 存在 $|S_x \setminus S_{xy}|$ 条内部不交的路径从 x 到 $S_x \setminus S_{xy}$, 以及 $|S_y \setminus S_{xy}|$ 条内部不交的路径从 $S_y \setminus S_{xy}$ 到 y 。将这些路径与 S_{xy} 中的顶点直接连接 x 和 y 的路径组合起来, 我们得到 k 条内部不交的 x - y 路径。

综上所述, 在任何情况下都存在 k 条内部不交的 x - y 路径, 即 $\lambda_G(x, y) \geq k = \kappa_G(x, y)$ 。

结合开头的不等式 $\lambda_G(x, y) \leq \kappa_G(x, y)$, 我们得到 $\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y)$ 。

 **注.** Menger 定理是图论中的基本定理之一, 它揭示了图的连通性与内部不相交路径存在性之间的深刻联系。该定理有多种证明方法, 包括归纳法、网络流方法等。这里给出的归纳证明是较为经典的一种。

□

断言 3.0.4. 1. 任意大小为 k 的 (x, y) 割只能是 $N(x)$ 或 $N(y)$ 。

2. $V(G) = \{x, y\} \cup N(x) \cup N(y)$

3. $N(x) \cap N(y) = \emptyset$

4. $|N(x)| = |N(y)| = k$

5. 构造 $H = (N(x), N(y)) \Rightarrow H$ 包含一个完美匹配。



证明. 我们依次证明这些断言。

断言 1 的证明: 证明任意大小为 k 的 (x, y) -点割只能是 $N(x)$ 或 $N(y)$ 。

不失一般性, 假设存在大小为 k 的点割 $S_0 = N(x)$ 。我们需要证明任意其他大小为 k 的 (x, y) -点割 S 都满足 $S = N(x)$ 或 $S = N(y)$ 。

假设存在一个大小为 k 的点割 S 满足 $S \neq N(x)$ 且 $S \neq N(y)$ 。由后续证明的断言 2 可知 $V(G) = \{x, y\} \cup N(x) \cup N(y)$, 因此 $S \subseteq N(x) \cup N(y)$ 。

设 $A = S \cap N(x)$, $B = S \cap N(y)$ 。由于 $S \neq N(x)$ 且 $S \neq N(y)$, 必有 $A \subsetneq N(x)$ 或 $B \subsetneq N(y)$ 。

♡ 如果 $A \subsetneq N(x)$, 则存在 $u \in N(x) \setminus A$

♡ 如果 $B \subsetneq N(y)$, 则存在 $v \in N(y) \setminus B$

考虑路径 $x \rightarrow u \rightarrow \cdots \rightarrow v \rightarrow y$, 其中 $u \in N(x) \setminus A$, $v \in N(y) \setminus B$ 。由于 $u \notin S$ 且 $v \notin S$, 这条路径不经过 S , 与 S 是 (x, y) -点割矛盾。因此这样的 S 不存在。

断言 2 的证明: 证明 $V(G) = \{x, y\} \cup N(x) \cup N(y)$ 。

假设存在顶点 $z \notin \{x, y\} \cup N(x) \cup N(y)$ 。考虑集合 $S = N(x)$, 由假设这是一个大小为 k 的最小 (x, y) -点割。

由于 $z \notin N(x)$ 且 $z \neq x, y$, 我们有 $z \notin S$ 。在 $G - S$ 中, x 是孤立点, 而 y 与 x 在不同的连通分支中。

现在考虑集合 $S' = (S \setminus \{w\}) \cup \{z\}$, 其中 w 是 S 中任意一个顶点。由于 z 与 x 不相邻且 z 与 y 也不相邻, 删除 S' 后:

- ♡ 从 x 出发无法到达 w (因为 w 被删除)
- ♡ 从 x 出发也无法到达 z (因为 z 与 x 不相邻)
- ♡ 因此 x 在 $G - S'$ 中仍然是孤立点

这意味着 S' 也是一个 (x, y) -点割, 且 $|S'| = k$ 。但 S' 既不是 $N(x)$ 也不是 $N(y)$, 这与断言 1 矛盾。故这样的 z 不存在。

断言 3 的证明: 证明 $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ 。

假设存在 $z \in N(x) \cap N(y)$ 。考虑集合 $S = N(x) \setminus \{z\}$, 其大小为 $k - 1$ 。

在 $G - S$ 中, 路径 $x \rightarrow z \rightarrow y$ 存在且不经过 S 中的任何顶点, 因为:

- ♡ x 与 z 相邻且 $z \notin S$
- ♡ z 与 y 相邻

因此 S 不是 (x, y) -点割。但这意味着存在一个大小仅为 $k - 1$ 的 (x, y) -点割, 与 $\kappa_G(x, y) = k$ 矛盾。

断言 4 的证明: 证明 $|N(x)| = |N(y)| = k$ 。

由假设, 存在大小为 k 的点割 $S_0 = N(x)$ 或 $S_0 = N(y)$ 。不失一般性, 设 $S_0 = N(x)$, 则 $|N(x)| = k$ 。

现在证明 $|N(y)| = k$ 。首先, $N(y)$ 是一个 (x, y) -点割, 因为删除 $N(y)$ 后, y 成为孤立点, 与 x 不连通。因此 $\kappa_G(x, y) \leq |N(y)|$ 。

假设 $|N(y)| > k$ 。由断言 2, $V(G) = \{x, y\} \cup N(x) \cup N(y)$, 且由断言 3, $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ 。但 $|N(y)| > k$ 意味着 $N(y)$ 本身就是一个大小大于 k 的点割, 与最小性矛盾。

断言 5 的证明: 证明二部图 $H = (N(x), N(y); E_H)$ 包含一个完美匹配。

假设 H 中不存在完美匹配。根据 Hall 定理, 存在一个子集 $A \subseteq N(x)$, 使得 $|N_H(A)| < |A|$ 。

考虑集合 $S = (N(x) \setminus A) \cup N_H(A)$:

- ♡ $|S| = |N(x) \setminus A| + |N_H(A)| = (k - |A|) + |N_H(A)| < k$
- ♡ 在 $G - S$ 中, 从 x 出发只能到达 A 中的顶点, 而 A 中的顶点只能连接到 $N_H(A)$ 中的顶点, 但 $N_H(A)$ 被删除, 因此无法到达 y

于是 S 是一个大小小于 k 的 (x, y) -点割, 矛盾。 □

4. 欧拉环游、哈密尔顿圈

4.1	欧拉环游	28
4.2	Hamilton 图	30
4.3	Drac 定理	32
4.4	Ore 条件	32

4.1 欧拉环游

定义 4.1.1 (欧拉迹). 设 G 是一个图。 G 中的一条**欧拉迹**是指一条经过图中**每条边恰好一次**的迹。换言之, 若 $W = v_0e_1v_1e_2\dots e_mv_m$ 是 G 中的一条迹, 且 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\} = E(G)$, 则称 W 为 G 的一条欧拉迹。



定义 4.1.2 (环游). 在图论中, **环游**通常指一条**闭合的行走**, 即起点和终点相同的行走。行走允许顶点和边重复出现, 而迹要求边不重复, 路径则要求顶点和边都不重复。



定义 4.1.3 (欧拉环游). 设 G 是一个图。 G 中的一条**欧拉环游**是指一条**闭合的欧拉迹**, 即起点和终点相同的欧拉迹。等价地, 欧拉环游是经过图中每条边恰好一次的闭迹。



定义 4.1.4 (欧拉图). 一个图 G 称为**欧拉图**, 如果它包含一条欧拉环游。即存在一条闭迹经过 G 中的每条边恰好一次。



定理 4.1.1 (Euler, 1736). 一个非空连通图是欧拉图 (即存在欧拉环游) 当且仅当它的每个顶点的度数都是偶数。



证明. 我们分别证明充分性和必要性。

必要性 (\Rightarrow): 假设 G 是欧拉图, 存在一条欧拉环游 C 。考虑环游 C 经过任意一个顶点 v (起点除外)。每次 C 进入 v 必定通过一条边, 然后离开 v 必定通过另一条边。由于 C 经过每条边恰好一次, 所以与 v 关联的边成对出现, 故 $\deg(v)$ 为偶数。对于起点 v_0 , C 从 v_0 出发最终回到 v_0 , 每次”离开”和”进入”也成对出现 (第一次是纯离开, 最后一次是纯进入, 中间过程都是进入后离开), 因此 $\deg(v_0)$ 也是偶数。综上, G 中每个顶点的度数都是偶数。

充分性 (\Leftarrow): 假设 G 是连通图且每个顶点的度数都是偶数。我们通过构造法证明 G 存在欧拉环游。

从任意顶点 v_0 开始, 沿着边行走, 并且在每个顶点处选择一条未使用过的边离开 (由于每个顶点的度数为偶数, 当进入一个顶点时, 未使用的边数是奇数, 因此总能找到离开的边, 直到回到 v_0)。这样得到一条闭迹 C 。

如果 C 包含了 G 的所有边, 那么 C 就是欧拉环游, 证明完成。

如果 C 没有包含所有边, 由于 G 连通, 存在 C 上的某个顶点 v , 与 v 关联的边中有未包含在 C 中的。考虑从 v 出发, 在 G 中删除 C 的所有边后得到的图 G' 。 G' 中每个顶点的度数仍然是偶数 (因为从每个顶点删除的边数等于 C 中经过该顶点的次数, 而这是偶数)。从 v 出发在 G' 中重复上述过程, 可以得到另一条闭迹 C' 。

现在将 C 和 C' 在顶点 v 处合并: 沿着 C 走到 v 时, 转而走完整个 C' , 再回到 v 继续走完 C 的剩余部分。这样就得到一条更长的闭迹。

重复这个过程, 由于图是有限的, 最终会得到一条包含所有边的闭迹, 即欧拉环游。 \square

推论 4.1.2. 一个连通图有欧拉迹等价于它最多有两个奇度点。



证明. 我们分别证明充分性和必要性。

必要性 (\Rightarrow): 假设 G 有欧拉迹 T 。考虑两种情况:

1. 如果 T 是闭迹 (即欧拉环游), 那么由 Euler 定理, G 中所有顶点的度数都是偶数, 即奇度点个数为 0。
2. 如果 T 是开迹, 设 T 从顶点 u 开始, 到顶点 v 结束 ($u \neq v$)。对于迹内部的任意顶点 w ($w \neq u, v$), 每次 T 进入 w 必定通过一条边, 然后离开 w 必定通过另一条边, 因此与 w 关联的边在 T 中成对出现, $\deg(w)$ 为偶数。对于起点 u , T 从 u 出发的次数比进入 u 的次数多 1, 因此 $\deg(u)$ 为奇数。同理, 对于终点 v , T 进入 v 的次数比从 v 出发的次数多 1, 因此 $\deg(v)$ 为奇数。其他顶点度数均为偶数。

综上, G 中奇度点的个数为 0 或 2。


充分性 (\Leftarrow): 假设 G 是连通图且奇度点个数最多为 2。考虑两种情况:

1. 如果 G 中没有奇度点 (即所有顶点度数均为偶数), 那么由 Euler 定理, G 存在欧拉环游, 这当然也是欧拉迹。
2. 如果 G 中恰有两个奇度点, 设为 u 和 v 。构造新图 G' , 在 G 中添加一条连接 u 和 v 的新边 e (如果 u 和 v 之间原本没有边, 则添加; 如果已有边, 则添加一条平行边)。在


G' 中, 所有顶点的度数都是偶数: u 和 v 的度数各增加 1 变为偶数, 其他顶点度数不变。由 Euler 定理, G' 存在欧拉环游 C 。

现在从 C 中删除边 e , 得到 G 中的一条迹 T 。由于 C 是闭迹且包含 e , 删除 e 后 T 变为从 u 到 v 的开迹, 且经过了 G 中的所有边 (因为 C 经过了 G' 的所有边, 而 G' 只比 G 多一条边 e)。因此 T 是 G 中的欧拉迹。


综上, 在两种情况下 G 都存在欧拉迹。 □

 **注.** 这个定理完整刻画了存在欧拉迹 (可以“一笔画”但不要求回到起点) 的充要条件。特别地:

- ♡ 当奇度点个数为 0 时, 存在闭的欧拉迹 (欧拉环游)
- ♡ 当奇度点个数为 2 时, 存在开的欧拉迹, 且这两个奇度点必定是欧拉迹的起点和终点
- ♡ 奇度点个数不可能为 1 (由握手引理, 奇度点个数必为偶数)
- ♡ 如果奇度点个数超过 2, 则不存在欧拉迹

命题 4.1.3. 每一个偶图都有圈分解。 


4.2 Hamilton 图

定义 4.2.1 (Hamilton 路). 设 G 是一个图。 G 中的一条 **Hamilton 路** 是指一条经过图中 **每个顶点恰好一次** 的路径。换言之, 若 $P = v_0v_1\dots v_n$ 是 G 中的一条路径, 且 $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} = V(G)$, 则称 P 为 G 的一条 *Hamilton 路*。 

定义 4.2.2 (Hamilton 圈). 设 G 是一个图。 G 中的一条 **Hamilton 圈** 是指一个经过图中 **每个顶点恰好一次** 的圈。等价地, *Hamilton 圈* 是长度为 $|V(G)|$ 的圈, 即一个包含所有顶点的圈。 

定义 4.2.3 (Hamilton 图). 一个图 G 称为 **Hamilton 图**, 如果它包含一个 *Hamilton 圈*。即存在一个圈经过 G 中的每个顶点恰好一次。 

定理 4.2.1 (Hamilton 图的必要条件).

1. 设 $G = (X, Y)$ 是一个二部图。如果 G 是 *Hamilton 图*, 则 $|X| = |Y|$ 。
2. 如果 G 是 *Hamilton 图*, 则对于 $V(G)$ 的任意非空真子集 S , 有 $w(G - S) \leq |S|$, 其中 $w(G - S)$ 表示删除 S 后图 G 的连通分支数。 


证明. 1. 设 $G = (X, Y)$ 是二部图且是 *Hamilton 图*, 则 G 包含一个 *Hamilton 圈* C 。由于 G 是二部图, C 作为圈, 其顶点必须在两个部分集 X 和 Y 中交替出现。因此 C 的长度是偶数, 且 $|X \cap V(C)| = |Y \cap V(C)|$ 。又因为 C 是 *Hamilton 圈*, 它包含了图 G 的所有顶点, 即 $V(C) = V(G) = X \cup Y$, 所以 $|X| = |Y|$ 。

2. 设 G 是 Hamilton 图, C 是 G 的一个 Hamilton 圈。设 S 是 $V(G)$ 的任意非空真子集。考虑 $C - S$, 即从圈 C 中删除所有属于 S 的顶点。由于 C 是一个圈, 删除 $k = |S|$ 个顶点最多将 C 分成 k 条互不连通的路径 (即最多 k 个连通分支)。因此, $C - S$ 的连通分支数 $w(C - S) \leq |S|$ 。

由于 C 是 G 的生成子图 (即 $V(C) = V(G)$ 且 $E(C) \subseteq E(G)$), 删除相同的顶点集 S 后, 有 $C - S$ 是 $G - S$ 的生成子图。一个图的连通分支数不会比它的生成子图的连通分支数更少, 即:

$$w(G - S) \leq w(C - S) \leq |S|$$

因此, $w(G - S) \leq |S|$ 对 $V(G)$ 的任意非空真子集 S 成立。 □

 注. 1. 条件 $|X| = |Y|$ 是二部图成为 Hamilton 图的必要条件而非充分条件。例如, 两个不相交的 $K_{1,2}$ 可以构成一个二部图满足 $|X| = |Y| = 2$, 但它显然不是 Hamilton 图。

2. 条件 $w(G - S) \leq |S|$ 同样是 Hamilton 图的必要条件而非充分条件。这个条件通常被称为连通性条件, 它要求图具有较高的连通性, 删除少数顶点不会破坏图的结构太多。不满足此条件的图一定不是 Hamilton 图, 但满足此条件的图也不一定是 Hamilton 图 (例如 Petersen 图满足此条件但不是 Hamilton 图)。

定理 4.2.2. 设 H 是图 G 的生成子图 (即 $V(H) = V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$)。则 G 的连通分支数不会多于 H 的连通分支数, 即:

$$w(G) \leq w(H)$$

更一般地, 对于任意顶点子集 $S \subseteq V(G)$, 有:


$$w(G - S) \leq w(H - S)$$

证明. 核心思想: 添加边不会增加连通分支数。

1. 由于 H 是 G 的生成子图, G 可以通过在 H 上添加边得到, 即 $E(G) = E(H) \cup E'$, 其中 E' 是额外添加的边集合。
2. 在 H 中, 某些顶点之间可能不连通 (属于不同的连通分支)。当我们添加边 E' 得到 G 时, 这些新边可能将原本在 H 中不连通的顶点连接起来, 从而减少连通分支数。
3. 但添加边绝对不可能增加连通分支数, 因为:
 - ♡ 添加边不会破坏已有的连通性
 - ♡ 添加边只能将原本分离的连通分支合并, 或者不改变连通性
 - ♡ 添加边永远不可能把一个连通分支拆分成多个
4. 因此, G 的连通分支数最多等于 H 的连通分支数, 即 $w(G) \leq w(H)$ 。
5. 对于任意 $S \subseteq V(G)$, 考虑删除 S 后的图 $G - S$ 和 $H - S$ 。由于 $H - S$ 是 $G - S$ 的生成子图, 同样的推理成立, 所以 $w(G - S) \leq w(H - S)$ 。

□

4.3 Drac 定理

定理 4.3.1 (Drac's Theorem, 1952). 如果 G 是一个 n 个点的简单图, 当 $n \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ 时, G 是 Hamilton 图. 

证明. 我们使用反证法和极值法来证明.

假设: G 满足 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, 但 G 不是 Hamilton 图.

在所有满足 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ 的非 Hamilton 图中, 选择边数最多的一个作为 G . 由于 G 不是 Hamilton 图但边数极大, 意味着如果添加任意一条新边, 图就会变成 Hamilton 图.

设 u 和 v 是 G 中两个不相邻的顶点. 根据 G 的极大性, 图 $G + uv$ 包含一个 Hamilton 圈. 由于 G 本身没有 Hamilton 圈, 这个 Hamilton 圈必须经过边 uv . 因此, 在 G 中存在一条 Hamilton 路 $P = v_1 v_2 \cdots v_n$, 其中 $v_1 = u$, $v_n = v$.

 **注.** 我们相当于取“极大反例”, 即说明最坏的情况都成立, 那么对于其他情况也是成立的.

现在定义两个集合:

$\heartsuit S = \{i \in \{2, 3, \dots, n\} : v_1 v_i \in E(G)\}$ (即与 u 相邻的顶点在 P 上的下标集合)

$\heartsuit T = \{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : v_i v_n \in E(G)\}$ (即与 v 相邻的顶点在 P 上的下标集合)

注意 $v_n \notin S$ (因为 $v_n = v$ 与 u 不相邻), $v_1 \notin T$ (因为 $v_1 = u$ 与 v 不相邻).

由最小度条件:

$\heartsuit |S| = \deg(u) \geq \frac{n}{2}$

$\heartsuit |T| = \deg(v) \geq \frac{n}{2}$

考虑集合 $S' = \{i-1 : i \in S\}$. 由于 $S \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$, 有 $S' \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, 且 $|S'| = |S| \geq \frac{n}{2}$.

现在 S' 和 T 都是 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的子集, 且:

$$|S'| + |T| \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n > n-1$$

根据鸽巢原理, S' 和 T 必须有交集. 设 $k \in S' \cap T$.

由 $k \in S'$, 存在 $j \in S$ 使得 $k = j-1$, 即 $v_1 v_j \in E(G)$. 由 $k \in T$, 有 $v_k v_n \in E(G)$, 即 $v_{j-1} v_n \in E(G)$.

现在我们可以构造一个 Hamilton 圈:

$$C = v_1 v_j v_{j+1} \cdots v_n v_{j-1} v_{j-2} \cdots v_1$$

因此, 假设不成立, 满足 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ 的图 G 一定是 Hamilton 图. □

4.4 Ore 条件

引理 4.4.1 (Ore 条件). G 是简单图, 若存在 $u, v \in V(G), u \not\sim v$ 使得 $d(u) + d(v) \geq n$ 则 G 是 Hamilton 图 $\iff G + uv$ 是 Hamilton 图. 

证明. 我们分别证明两个方向。

方向 1 (\Leftarrow): 如果 $G + uv$ 是 Hamilton 图, 则 G 是 Hamilton 图。即如果 $G + uv$ 有一个 Hamilton 圈 C , 那么:

1. 如果 C 不包含边 uv , 则 C 完全在 G 中, 所以 G 是 Hamilton 图。
2. 如果 C 包含边 uv , 那么 C 本身不在 G 中, 但我们需要证明 G 中仍然存在某个 Hamilton 圈。

这是非平凡的情况。由于 C 使用边 uv , 在 C 中存在一条 Hamilton 路 $P = v_1v_2 \cdots v_n$, 其中 $v_1 = u$, $v_n = v$ 。

现在定义两个关键集合:

♡ $S = \{i \in \{2, 3, \dots, n\} : v_1v_i \in E(G)\}$ (在 G 中与 u 相邻的顶点在路径 P 上的下标集合)

♡ $T = \{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : v_iv_n \in E(G)\}$ (在 G 中与 v 相邻的顶点在路径 P 上的下标集合)

注意:

♡ $n \notin S$, 因为 $v_n = v$ 与 u 不相邻

♡ $1 \notin T$, 因为 $v_1 = u$ 与 v 不相邻

♡ $|S| = \deg_G(u)$, $|T| = \deg_G(v)$

♡ 由条件: $|S| + |T| = \deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n$

现在考虑集合 $S' = \{i-1 : i \in S\}$ 。由于 $S \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$, 我们有 $S' \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, 且 $|S'| = |S|$ 。

现在观察 S' 和 T :

♡ $S' \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, $|S'| = |S|$

♡ $T \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, $|T| = \deg_G(v)$

♡ $|S'| + |T| = |S| + |T| \geq n$

♡ 但 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 只有 $n-1$ 个元素

由鸽巢原理, S' 和 T 必须有非空交集。设 $k \in S' \cap T$ 。

由 $k \in S'$, 存在 $j \in S$ 使得 $k = j-1$, 即:

♡ $v_1v_j \in E(G)$ (因为 $j \in S$)

由 $k \in T$, 有:

♡ $v_kv_n \in E(G)$, 即 $v_{j-1}v_n \in E(G)$ (因为 $k = j-1$)

现在我们在 G 中构造一个 Hamilton 圈:

$$C' = v_1 \rightarrow v_j \rightarrow v_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_n \rightarrow v_{j-1} \rightarrow v_{j-2} \rightarrow \cdots \rightarrow v_1$$

具体验证每条边都在 G 中:

♡ $v_1v_j \in E(G)$ (由 $j \in S$)

♡ $v_jv_{j+1}, \dots, v_{n-1}v_n$ 都在 $E(G)$ 中 (它们是路径 P 的边)


♡ $v_nv_{j-1} \in E(G)$ (由 $k = j - 1 \in T$)

♡ $v_{j-1}v_{j-2}, \dots, v_2v_1$ 都在 $E(G)$ 中 (它们是路径 P 反向的边)

因此 C' 是 G 的一个 Hamilton 圈, 与 G 不是 Hamilton 图的假设矛盾。

方向 2 (\Rightarrow): 如果 G 是 Hamilton 图, 则 $G + uv$ 是 Hamilton 图。

这个方向是平凡的。如果 G 有一个 Hamilton 圈 C , 那么 C 也是 $G + uv$ 的 Hamilton 圈 (因为 $G + uv$ 包含 G 的所有边)。 □


 **注.** 这个引理的证明核心就是要利用 $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ 来说明 u 和 v 的邻域必然存在交集, 然后我们以交集为中心点, 构造出新的 Hamilton 圈。

定义 4.4.1 (图的闭包). 设 G 是一个有 n 个顶点的简单图。图 G 的**闭包**, 记作 $cl(G)$, 是指通过重复进行以下操作直到不能再进行为止而得到的图:

闭包操作: 如果存在一对不相邻的顶点 u 和 v , 满足


$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

则在 u 和 v 之间添加一条边。


换言之, $cl(G)$ 是通过不断添加满足 Ore 条件的边, 直到不存在这样的顶点对为止而得到的图。 

引理 4.4.2. 一个简单图是 Hamilton 图等价于它的闭包是 Hamilton 图。 

证明. 我们反复利用 Ore 条件的引理即可。 □


定理 4.4.3 (Ore Theorem). 对于 $n \geq 3$ 的简单图, 如果 $\forall u \sim v$ 都有 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 是 Hamilton 图。 


证明. 我们首先能说明 $cl(G) = K_n$, 而完全图 K_n 显然是 Hamilton 图, 那就证明完了。 □

定义 4.4.2. 如果 v 是路 P 或者圈 C 的一个顶点, 我们用 v^- 和 v^+ 来表示 v 前后的顶点。 

定义 4.4.3 (独立数). 图 G 的**独立数**, 记作 $\alpha(G)$, 是指 G 中最大独立集的大小。即:

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \subseteq V(G), S \text{ 是独立集}\}$$

其中独立集是指图中两两不相邻的顶点集合。 

定理 4.4.4 (Chvátal-Erdős, 1972). 如果 $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, 则 G 是 Hamilton 图。(除非 $G = K_2$) 

总证明. 假设 G 满足 $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ 但不是 Hamilton 图。我们将推导出矛盾。

令 $k = \kappa(G)$, $\alpha = \alpha(G)$, 则 $k \geq \alpha$ 。

步骤 1. 选取最长圈并分析其性质

设 C 是 G 中的一个最长圈。由于 G 不是 Hamilton 图, 存在顶点不在 C 上。设 H 是 $G - V(C)$ 的一个连通分支。

由点连通度定义, G 是 k -连通的。考虑 C 中与 H 相邻的顶点集合 $U = \{u \in V(C) : \exists w \in V(H), uw \in E(G)\}$ 。

断言 4.4.5. $|U| \geq k$



证明. 如果 $|U| < k$, 则删除集合 U 会使 G 不连通 (因为 H 与 $C \setminus U$ 不连通), 这与 $\kappa(G) = k$ 矛盾。□

设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, 其中 $m \geq k$, 且这些顶点按在圈 C 上的循环顺序排列。

步骤 2. 定义后继顶点并分析其性质

对于每个 $u_i \in U$, 设 u_i^+ 是 u_i 在圈 C 上的顺时针方向下一个顶点。由于 C 是一个圈, 所有 u_i^+ 都在 C 上且互不相同。

断言 4.4.6. 对于任意 i , u_i^+ 不与 H 中的任何顶点相邻。



证明. 假设存在某个 u_i^+ 与 H 中的某个顶点 w 相邻。由于 u_i 也与 H 中某个顶点 v 相邻 (由 U 的定义), 我们可以在 H 中找到一条从 v 到 w 的路径 P (因为 H 连通)。那么:

$$C' = (C \setminus \{u_i u_i^+\}) \cup \{u_i v\} \cup P \cup \{w u_i^+\}$$

是一个比 C 更长的圈, 与 C 是最长圈矛盾。□

断言 4.4.7. 集合 $\{u_1^+, u_2^+, \dots, u_m^+\}$ 是独立集。



证明. 假设存在 $i \neq j$ 使得 $u_i^+ u_j^+ \in E(G)$ 。由于 u_i 与 H 中某顶点 v 相邻, u_j 与 H 中某顶点 w 相邻, 且 H 连通, 存在 H 中从 v 到 w 的路径 P 。那么:

$$C' = (C \setminus \{u_i u_i^+, u_j u_j^+\}) \cup \{u_i v\} \cup P \cup \{w u_j\} \cup \{u_i^+ u_j^+\}$$

是一个比 C 更长的圈, 矛盾。□

步骤 3. 构造更大的独立集并推出矛盾

现在选取 H 中的一个顶点 x 。由 Claim 4.4.6, x 与所有 u_i^+ 都不相邻。

断言 4.4.8. x 与所有 u_i^+ 都不相邻。



证明. 这已由 Claim 4.4.6 保证, 因为 $x \in V(H)$ 而 u_i^+ 不与 H 中任何顶点相邻。□

断言 4.4.9. x 与所有 u_i 都不相邻。



证明. 假设 x 与某个 u_i 相邻. 考虑 u_i 在 C 上的前驱顶点 u_i^- (逆时针方向前一个顶点). 如果 u_i^- 与 H 中某顶点相邻, 则 $u_i^- \in U$, 设 $u_i^- = u_j$. 那么路径 $xu_iCu_j^+u_j^-Cu_jw$ (其中 w 是 H 中与 u_j 相邻的顶点) 可以构造更长的圈, 矛盾.

详细来说, 我们可以构造圈:


$x \rightarrow u_i \rightarrow (\text{沿 } C \text{ 从 } u_i \text{ 到 } u_j^+) \rightarrow u_j^+ \rightarrow (\text{沿 } C \text{ 反向从 } u_j^+ \text{ 到 } u_j) \rightarrow u_j \rightarrow w \rightarrow (\text{在 } H \text{ 中从 } w \text{ 回到 } x)$

这比 C 更长, 矛盾. □

因此, 集合 $\{x, u_1^+, u_2^+, \dots, u_m^+\}$ 是一个独立集, 其大小为 $m+1 \geq k+1$.

但由条件 $k \geq \alpha$, 而独立数 α 至少为 $k+1$, 这与 $k \geq \alpha$ 矛盾.

因此, 假设不成立, G 必须是 Hamilton 图. □

定理 4.4.10 (Chvátal, 1972). 简单图 G 的度序列是 (d_1, d_2, \dots, d_n) , $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$; 若对于任意 $m < n/2$, 要么 $d_m > m$, 要么 $d_{n-m} \geq n-m$, 则 G 是 Hamilton 图. 

证明. 考虑 G 的闭包 G' , 下证 G' 是完全图.

反证, 假设存在 $uv \notin E(G')$, 满足 $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) < n$. 不妨设 $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) = \max_{xy \notin E(G')} \{d_{G'}(x) + d_{G'}(y)\}$, 记 $r := d_{G'}(u) \leq d_{G'}(v)$.

令 $X = V \setminus (N_{G'}(v) \cup \{v\})$, 则 $|X| = n - 1 - d_{G'}(v)$, $\forall x \in X, d_{G'}(x) \leq d_{G'}(u)$, 即至少有 r 个点, 其度 $\leq r$.

令 $Y = V \setminus N_{G'}(u)$, 则 $|Y| = n - d_{G'}(u)$, $\forall y \in Y, d_{G'}(u) + d_{G'}(y) < n$, 即至少有 $n - r$ 个点, 其度 $< n - r$.

故 $d_r \leq r, d_{n-r} < n - r$, 矛盾. □

5. 匹配与因子

5.1	基本定义	37
5.2	二部图中的匹配	40
5.3	顶点覆盖与控制集	42

5.1 基本定义

定义 5.1.1 (匹配). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**匹配**是指边集 E 的一个子集 $M \subseteq E$, 使得 M 中任意两条边都没有公共顶点。即对于任意 $e_1, e_2 \in M$, 如果 $e_1 \neq e_2$, 则 $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ 。



定义 5.1.2 (完美匹配). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**完美匹配**是指一个匹配 M , 使得 G 的每个顶点都是 M 中某条边的端点。等价地, M 覆盖了 G 的所有顶点, 即 $V(M) = V$ 。



定义 5.1.3 (最大匹配). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**最大匹配**是指一个匹配 M , 使得对于 G 的任何其他匹配 M' , 都有 $|M| \geq |M'|$ 。即 M 是包含边数最多的匹配。



定义 5.1.4 (极大匹配). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**极大匹配**是指一个匹配 M , 使得 M 不是任何其他匹配的真子集。即无法通过添加任何一条边来扩展 M 而仍然保



持为匹配。



 **注.** 最大匹配一定是极大匹配, 但极大匹配不一定是最大匹配.

定义 5.1.5 (交错路). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, M 是 G 的一个匹配. G 中的一条**交错路**是指一条路径 $P = v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$, 满足路径上的边在匹配边和非匹配边中交替出现. 即:

1. 路径 P 上的边依次交替属于 M 和 $E \setminus M$
2. 具体来说, 要么满足: $e_1 \notin M, e_2 \in M, e_3 \notin M, \dots$
3. 要么满足: $e_1 \in M, e_2 \notin M, e_3 \in M, \dots$



定义 5.1.6 (增广路). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, M 是 G 的一个匹配. G 中的一条**增广路**是指一条交错路 P , 满足:

1. P 的两个端点 v_0 和 v_k 都是 M -非饱和顶点
2. P 的长度是奇数 (即包含奇数条边)
3. P 上的第一条边 e_1 和最后一条边 e_k 都不在 M 中

等价地, 增广路是一条开始和结束于非饱和顶点, 且匹配边和非匹配边交替出现的路径。



定义 5.1.7 (k -因子). 设 $G = (V, E)$ 是一个图. G 的一个 **k -因子**是指 G 的一个生成子图 H , 满足 H 是 k -正则的. 即:

1. $V(H) = V(G)$
2. $E(H) \subseteq E(G)$
3. 对于每个顶点 $v \in V(H)$, 有 $\deg_H(v) = k$



性质 5.1.1.

1. 如果 M 是 $P.M$, 则 $|G|$ 是偶数
2. $P.M$ 是一个支撑子图, 每个分支都是 K_2
3. $P.M$ 是 1-因子



定理 5.1.1 (Berge, 1957). 一个匹配 M 是最大的等价于 G 不存在 M -增广路.



证明. 我们证明两个方向。

(\Rightarrow) 先证明: 如果 M 是最大匹配, 则 G 中不存在关于 M 的增广路。

用反证法。假设存在一条关于 M 的增广路 $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_{2k+1} v_{2k+1}$, 其中:

1. v_0 和 v_{2k+1} 是 M -非饱和顶点
2. 边在匹配边和非匹配边中交替出现: $e_1 \notin M, e_2 \in M, e_3 \notin M, \dots, e_{2k+1} \notin M$

定义新的匹配:

$$M' = (M \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2k}\}) \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2k+1}\}$$

则 M' 是一个匹配, 且 $|M'| = |M| - k + (k + 1) = |M| + 1 > |M|$, 这与 M 是最大匹配矛盾。

(\Leftarrow) 假设 M 不是最大匹配, 则存在匹配 M' 满足 $|M'| > |M|$ 。

考虑对称差 $H = M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$ 。分析 H 的结构:

1. **度数性质:** 对于任意顶点 $v \in V(G)$, 有:

$$\deg_H(v) \leq \deg_M(v) + \deg_{M'}(v) \leq 2$$

因为每个顶点在匹配中最多度数为 1。

2. **连通分支类型:** 由于 $\deg_H(v) \leq 2$, H 的每个连通分支是路径或圈。进一步分析:

♡ 如果 $\deg_H(v) = 0$ 或 2 , 则 v 在 M 和 M' 中的状态相同 (要么都在两个匹配中饱和, 要么都不饱和)

♡ 如果 $\deg_H(v) = 1$, 则 v 在一个匹配中饱和, 在另一个匹配中非饱和

3. **边交替性:** 在 H 的每个连通分支中, 边在 M 和 M' 中交替出现, 因为:

♡ 如果两条同属于 M (或同属于 M') 的边相邻, 它们会共享顶点, 这与匹配的定义矛盾

现在计算 H 中两种边的数量关系:

$$|M' \setminus M| - |M \setminus M'| = |M'| - |M| > 0$$

由于 $|M' \setminus M| > |M \setminus M'|$, 在 H 中必须存在至少一个连通分支 P , 其中 $M' \setminus M$ 的边比 $M \setminus M'$ 的边多。

这样的连通分支 P 不可能是圈, 因为圈中两种边的数量相等。因此 P 是一条路径。

设 $P = u_0 f_1 u_1 f_2 u_2 \cdots f_t u_t$, 其中边在 M 和 M' 中交替出现。由于 $M' \setminus M$ 的边更多, 路径必须以 $M' \setminus M$ 的边开始和结束。

具体来说:

1. $f_1 \in M' \setminus M$ (第一条边属于 M' 但不属于 M)
2. $f_t \in M' \setminus M$ (最后一条边属于 M' 但不属于 M)
3. 路径长度为奇数 (这样 $M' \setminus M$ 的边比 $M \setminus M'$ 的边多 1)

现在验证 P 是关于 M 的增广路:

1. **端点非饱和性:** 端点 u_0 和 u_t 在 M 中是非饱和的, 因为:

- ♡ 如果 u_0 在 M 中饱和, 则存在 $e \in M$ 与 u_0 关联, 但 $f_1 \notin M$, 所以 e 必须在 H 中与 f_1 相邻, 这与路径 P 的极大性矛盾
 - ♡ 同理可证 u_t 在 M 中非饱和
2. **交替性**: 路径 P 上的边在 M 和 $E \setminus M$ 中交替出现
3. **长度奇数性**: 路径长度为奇数, 且首尾边都不在 M 中
- 因此 P 是关于 M 的增广路, 与假设矛盾。 □

5.2 二部图中的匹配

定义 5.2.1 (饱和顶点与非饱和顶点). 设 $G = (V, E)$ 是一个图, $M \subseteq E$ 是 G 的一个匹配。

1. 一个顶点 $v \in V$ 称为 **M -饱和顶点** (或简称**饱和顶点**), 如果存在边 $e \in M$ 使得 v 是 e 的端点。即顶点 v 被匹配 M 所覆盖。
2. 一个顶点 $v \in V$ 称为 **M -非饱和顶点** (或简称**非饱和顶点**), 如果不存在任何边 $e \in M$ 以 v 为端点。即顶点 v 没有被匹配 M 所覆盖。

定理 5.2.1 (Hall, 1935). 设 $G = [X : Y]$ 是一个二部图。则 G 中存在一个覆盖 X 的匹配当且仅当对于 X 的任意子集 $S \subseteq X$, 有:

$$|N(S)| \geq |S|$$

其中 $N(S)$ 表示 S 在 Y 中的邻点集合。

证明. 必要性: 如果存在覆盖 X 的匹配 M , 则对任意 $S \subseteq X$, 有 $|N(S)| \geq |S|$ 。

设 M 是覆盖 X 的匹配。对于任意 $S \subseteq X$, S 中的每个顶点在 M 中都与 Y 中某个顶点匹配。由于 M 是匹配, 这些 Y 中的顶点互不相同, 且都包含在 $N(S)$ 中。因此 $|N(S)| \geq |S|$ 。

充分性: 如果对任意 $S \subseteq X$ 有 $|N(S)| \geq |S|$, 则存在覆盖 X 的匹配。

我们证明其逆否命题: 如果不存在覆盖 X 的匹配, 则存在某个 $S \subseteq X$ 使得 $|N(S)| < |S|$ 。

设 M 是 G 的一个最大匹配但 M 没有覆盖 X 。令 $u \in X$ 是 M -非饱和顶点。

定义:

♡ Z : 所有从 u 出发通过 M -交错路可达的顶点集合

♡ $S = Z \cap X, T = Z \cap Y$

注意 $u \in S$ 。

1. M 匹配 T 和 $S - \{u\}$ 。

理由: 从 u 开始的 M -交错路沿着非 M 边到达 Y , 并沿着 M 边回到 X 。因此, $S - \{u\}$ 的每个顶点通过 M 的一条边从 T 的某个顶点到达。由于不存在 M -增广路 (M 是最大匹配), T 中每个顶点是 M -饱和的; 于是每条到达 $y \in T$ 的 M -交错路通过 M 扩展到 S 的一个顶点。因此 M 中的对应边给出了从 T 到 $S - \{u\}$ 的双射, 故 $|T| = |S - \{u\}|$ 。

2. $T \subseteq N(S)$, 且实际上 $T = N(S)$ 。

理由: 由 T 和 $S - \{u\}$ 之间的匹配可得 $T \subseteq N(S)$ 。为证 $T = N(S)$, 假设存在 $y \in Y - T$ 与某个 $v \in S$ 相邻。由于 u 是非饱和的而 S 中其余顶点通过 M 与 T 匹配, 边 $vy \notin M$ 。将边 vy 添加到到达 v 的 M -交错路上, 得到一条到达 y 的 M -交错路, 这与 $y \notin T$ 矛盾。因此这样的边 vy 不存在。

由 $T = N(S)$, 我们得到:

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$$

这就完成了充分性的证明。 □

推论 5.2.2.

1. $G[X : Y]$ 有 $P.M \iff |X| = |Y|$ 且 $\forall S \subset X$ 都有 $|N(S)| \geq |S|$
2. 任意非空正则二部图都有一个 $P.M$
3. k -正则二部图可以分为 k 个 $P.M$
4. $\forall G[X : Y]$ 如果 $\forall S \subset X$ 有 $|N(S)| \geq |S| - d \Rightarrow$ 存在一个大小为 $|X| - d$ 的一个匹配

推论 1 证明. (\Rightarrow) 如果 G 有完美匹配 M , 则:

♡ $|X| = |Y|$ (因为完美匹配是双射)

♡ M 覆盖 X , 由 Hall 定理, 对任意 $S \subseteq X$ 有 $|N(S)| \geq |S|$

(\Leftarrow) 如果 $|X| = |Y|$ 且 Hall 条件成立, 由 Hall 定理存在覆盖 X 的匹配 M 。由于 $|X| = |Y|$, 覆盖 X 的匹配必然也覆盖 Y , 因此 M 是完美匹配。 □

推论 2 证明. 设 G 是 r -正则二部图, $r > 0$ 。首先证明 $|X| = |Y|$:

由于 G 是 r -正则的, 有:

$$r|X| = |E(G)| = r|Y|$$

因此 $|X| = |Y|$ 。

现在验证 Hall 条件: 对任意 $S \subseteq X$, 设与 S 关联的边数为 $r|S|$ 。这些边都连接到 $N(S)$, 而 $N(S)$ 中每个顶点的度数最多为 r , 因此:

$$r|S| \leq r|N(S)| \Rightarrow |N(S)| \geq |S|$$

由推论 1 知 G 有完美匹配。 □

推论 3 证明. 对 k 进行归纳。

基始: $k = 1$ 时, 1-正则二部图本身就是一个完美匹配。

归纳步骤: 假设对 $k - 1$ 成立。设 G 是 k -正则二部图。

由推论 2, G 有一个完美匹配 M 。考虑图 $G - M$ (从 G 中删除 M 的所有边)。 $G - M$ 是 $(k - 1)$ -正则二部图。

由归纳假设, $G - M$ 可以分解为 $k - 1$ 个完美匹配。加上 M , 共得到 k 个完美匹配, 它们构成 G 的边分解。 □

推论 4 证明. 构造一个新图 G' : 在 G 的基础上添加 d 个新顶点到 Y 中, 并将这 d 个新顶点与 X 中所有顶点相连。

具体地, 令 $Y' = Y \cup \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$, 且对每个 $x \in X$ 和每个 y_i , 添加边 xy_i 。

在 $G' = (X, Y'; E')$ 中验证 Hall 条件: 对任意 $S \subseteq X$,

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| + d \geq (|S| - d) + d = |S|$$

由 Hall 定理, G' 有覆盖 X 的匹配 M' 。 M' 中最多有 d 条边连接到新添加的顶点, 因此 $M = M' \cap E(G)$ 是 G 中的匹配, 且:

$$|M| \geq |M'| - d = |X| - d$$

□

5.3 顶点覆盖与控制集

定义 5.3.1 (顶点覆盖). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**顶点覆盖**是指顶点集 V 的一个子集 $C \subseteq V$, 使得 G 的每条边至少有一个端点在 C 中。即:

$$\forall e = uv \in E, \quad \{u, v\} \cap C \neq \emptyset$$



定义 5.3.2 (最小顶点覆盖). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**最小顶点覆盖**是指一个顶点覆盖 C , 使得对于 G 的任何其他顶点覆盖 C' , 都有 $|C| \leq |C'|$ 。即 C 是包含顶点数最少的顶点覆盖。



定义 5.3.3 (极小顶点覆盖). 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**极小顶点覆盖**是指一个顶点覆盖 C , 使得 C 的任何真子集都不是顶点覆盖。即无法通过删除任何顶点来保持覆盖性质。



定义 5.3.4 (记号).

1. 图 G 的**独立数** $\alpha(G)$ 是指 G 中最大独立集的大小。
2. 图 G 的**顶点覆盖数** $\beta(G)$ 是指 G 中最小顶点覆盖的大小。
3. 图 G 的**匹配数** $\alpha'(G)$ 是指 G 中最大匹配的大小。
4. 图 G 的**边覆盖数** $\beta'(G)$ 是指 G 中最小边覆盖的大小。




性质 5.3.1. 1. $\alpha'(G) \leq \beta(G)$

2. 令 M 是一个匹配, K 是一个覆盖使得 $|M| = |K|$ 则 M 是最大匹配, K 是最小覆盖。



证明. 第一条性质: 设 M^* 是 G 的一个最大匹配, C^* 是 G 的一个最小顶点覆盖。由于每条边至少需要一个顶点来覆盖, 而匹配 M^* 中的边是互不相邻的, 因此覆盖这些边至少需要 $|M^*|$ 个顶点, 即 $\alpha'(G) = |M^*| \leq |C^*| = \beta(G)$ 。

第二条性质: 设 M 是一个匹配, K 是一个顶点覆盖, 且满足 $|M| = |K|$ 。由第一条性质可知, 对任意匹配 M' 和任意顶点覆盖 K' , 有 $|M'| \leq |K'|$ 。特别地, 对最大匹配 M^* 有 $|M| \leq |M^*| \leq |K|$, 而对最小顶点覆盖 K^* 有 $|M| \leq |K^*| \leq |K|$ 。由于 $|M| = |K|$, 因此 $|M| = |M^*|$ 且 $|K| = |K^*|$, 即 M 是最大匹配, K 是最小顶点覆盖。 \square

定理 5.3.1 (König, 1931). 设 $G = G[X : Y]$ 是一个二部图, 则 $\alpha'(G) = \beta(G)$ 。 


证明. 设 M^* 是 G 的一个最大匹配。由性质 5.3.1 的第一条可知 $\alpha'(G) \leq \beta(G)$, 因此只需证明存在一个顶点覆盖 K 满足 $|K| = |M^*|$ 。

考虑从 M^* 构造顶点覆盖 K : 对于 M^* 中的每条边, 选择其在 X 中的端点加入 K 。由于 M^* 是匹配, 这些顶点互不相同, 故 $|K| = |M^*|$ 。


下证 K 是顶点覆盖: 任取边 $e = uv \in E$, 其中 $u \in X, v \in Y$ 。若 $u \in K$, 则 e 已被覆盖; 若 $u \notin K$, 则 e 不在 M^* 中 (否则 u 会被选入 K)。由最大匹配的性质, 从 u 出发沿非匹配边和匹配边交替行走, 必能到达 Y 中某个未被匹配的顶点, 但二部图的结构保证了该路径上的匹配边对应的 X 中端点均在 K 中, 从而 v 必然通过某条匹配边与 K 中顶点相连, 故 e 仍被覆盖。

因此 K 是大小为 $|M^*|$ 的顶点覆盖, 即 $\beta(G) \leq |M^*| = \alpha'(G)$ 。结合 $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ 即得 $\alpha'(G) = \beta(G)$ 。 \square

定义 5.3.5. 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一个**控制集**是指顶点集 V 的一个子集 $D \subseteq V$, 使得 G 的每个顶点要么在 D 中, 要么与 D 中的某个顶点相邻。即:

$$\forall v \in V, v \in D \vee (\exists u \in D \text{ 使得 } uv \in E)$$



定义 5.3.6. 设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的**控制数** $\gamma(G)$ 是指 G 中最小控制集的大小。 

定理 5.3.2. $\gamma(G) \leq \beta(G)$ 

证明. 设 C 是 G 的一个最小顶点覆盖, 即 $|C| = \beta(G)$ 。考虑顶点覆盖 C 的控制性质: 对于任意顶点 $v \in V(G)$, 若 $v \in C$, 则 v 显然被 C 控制; 若 $v \notin C$, 则 v 的所有邻点必须在 C 中 (否则存在边 uv 使得 $u \notin C$ 且 $v \notin C$, 这与 C 是顶点覆盖矛盾)。因此 C 是 G 的一个控制集。

由于 $\gamma(G)$ 是最小控制集的大小, 而 C 是一个控制集, 故有: $\gamma(G) \leq |C| = \beta(G)$ 。 \square

命题 5.3.3.

1. G 是 k -正则图 则 $\gamma(G) \geq \frac{n}{k+1}, \beta(K_n) = n - 1, \gamma(K_n) = 1$
2. (Alon, 1990)[Alon1990] $|V(G)| = n, \delta(G) = k$ 则 $\gamma(G) \geq \frac{1 + \ln(k+1)}{k+1} n$ 

证明 1. 设 D 是 G 的一个最小控制集, $|D| = \gamma(G)$ 。由于 D 是控制集, 每个 $v \in D$ 最多可以控制 v 自身和它的 k 个邻居, 即最多控制 $k + 1$ 个顶点。因此:

$$n \leq |D|(k + 1) = \gamma(G)(k + 1)$$

整理得 $\gamma(G) \geq \frac{n}{k+1}$ 。

对于完全图 K_n ：

♡ 任意 $n-1$ 个顶点构成一个顶点覆盖（因为每条边至少有一个端点在这 $n-1$ 个顶点中），且不能更小，故 $\beta(K_n) = n-1$ 。

♡ 单个顶点即可控制所有其他顶点（因为 K_n 中所有顶点两两相邻），故 $\gamma(K_n) = 1$ 。

□

证明 2[Alon1990]. 我们采用概率方法。设 $p \in [0, 1]$ 待定，独立地以概率 p 随机选取顶点构成集合 A 。令 $B = V(G) \setminus N[A]$ ，即未被 A 控制的顶点集合。

显然 $A \cup B$ 是一个控制集，因为：

♡ 对于 $v \in A$ ， v 被 A 控制

♡ 对于 $v \in B$ ， v 被 B 控制（因为 B 中的顶点虽然不被 A 控制，但将其加入后所有顶点都被控制）

♡ 对于 $v \notin A \cup B$ ， v 被 A 控制

现在计算期望大小：

$$\mathbb{E}[|A \cup B|] = \mathbb{E}[|A|] + \mathbb{E}[|B|] = np + \mathbb{E}[|B|].$$

对于任意顶点 $v \in V(G)$ ， $v \in B$ 当且仅当 v 及其所有邻居都不在 A 中。由于 v 的度数至少为 k ，故

$$\mathbb{P}(v \in B) = (1-p)^{d(v)+1} \leq (1-p)^{k+1},$$

其中 $d(v)$ 是顶点 v 的度数。

由期望的线性性， $\mathbb{E}[|B|] \leq n(1-p)^{k+1}$ 。

因此

$$\mathbb{E}[|A \cup B|] \leq np + n(1-p)^{k+1}.$$

由于期望值是最小值的上界，存在某个特定的控制集大小不超过这个期望值，故

$$\gamma(G) \leq np + n(1-p)^{k+1}.$$

现在选择最优的 p 值。取 $p = \frac{\ln(k+1)}{k+1}$ ，利用不等式 $1-p \leq e^{-p}$ （对 $p \in [0, 1]$ 成立），得

$$(1-p)^{k+1} \leq e^{-p(k+1)} = e^{-\ln(k+1)} = \frac{1}{k+1}.$$

代入得

$$\gamma(G) \leq n \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1 + \ln(k+1)}{k+1} n.$$

这就完成了证明。

□


定理 5.3.4. 如果图 G 没有孤立点，那么存在一个控制集 D ，使得 $V(G) \setminus D$ 也是一个控制集。




证明. 设 $G = (V, E)$ 是一个无孤立点的图. 考虑 G 的任意极大独立集 I . 由于 I 是极大独立集, 对于任意顶点 $v \in V \setminus I$, v 必须与 I 中至少一个顶点相邻, 否则 $I \cup \{v\}$ 仍然是独立集, 与 I 的极大性矛盾, 因此 I 是控制集.

现在证明 $V \setminus I$ 也是控制集. 任取顶点 $u \in V$, 若 $u \in V \setminus I$, 则 u 自身在 $V \setminus I$ 中, 故 u 被 $V \setminus I$ 控制; 若 $u \in I$, 由于 G 无孤立点, u 至少有一个邻居 $w \in N(u)$, 但若 $w \in I$ 则与 I 是独立集矛盾, 故 $w \in V \setminus I$, 因此 u 与 $V \setminus I$ 中的顶点 w 相邻, 即 u 被 $V \setminus I$ 控制. 综上, 每个顶点要么在 $V \setminus I$ 中, 要么与 $V \setminus I$ 中的某个顶点相邻, 故 $V \setminus I$ 是控制集.

取 $D = I$, 则 D 是控制集, 且 $V \setminus D = V \setminus I$ 也是控制集, 定理得证. \square

定义 5.3.7. 设 $G = (V, E)$ 是一个图. G 的一个**分支**是指 G 的一个极大连通子图. G 的一个**奇分支**是指顶点数为奇数的分支, 用 $o(G)$ 表示 G 中奇分支的个数. 

定理 5.3.5 (Tutte, 1947). 图 G 有完美匹配当且仅当对任意顶点子集 $S \subseteq V(G)$, 有 $o(G - S) \leq |S|$. 

证明 [Lovasz1975]. **必要性:** 假设 G 有完美匹配 M . 对任意 $S \subseteq V(G)$, 考虑 $G - S$ 的奇分支集合 $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, 其中 $k = o(G - S)$.

对于每个奇分支 C_i , 由于 $|V(C_i)|$ 是奇数, 而 M 是完美匹配, C_i 中至少有一个顶点 v_i 必须通过 M 匹配到 S 中的某个顶点 u_i . 这是因为如果 C_i 中的所有匹配边都完全包含在 C_i 内部, 那么 $|V(C_i)|$ 必须是偶数 (因为匹配覆盖的顶点数是偶数), 矛盾.

由于 M 是匹配, 这些边 $u_i v_i$ 对应 S 中不同的顶点 u_1, u_2, \dots, u_k . 因此 $|S| \geq k = o(G - S)$.

充分性: 假设对任意 $S \subseteq V(G)$ 有 $o(G - S) \leq |S|$, 但 G 没有完美匹配. 我们将导出矛盾.

考虑满足 Tutte 条件但没有完美匹配的极大图 G (在保持顶点集 $V(G)$ 不变的情况下添加边). 这样的图存在, 因为:

- ♡ 原图 G 满足条件但没有完美匹配
- ♡ 如果我们不断添加边, 最终会得到完全图, 而完全图在顶点数为偶数时有完美匹配
- ♡ 因此存在一个极大的中间图满足条件但没有完美匹配

定义集合 $S = \{v \in V(G) : d(v) = |V(G)| - 1\}$, 即 S 是那些与所有其他顶点都相邻的顶点集合.

断言 5.3.6 ([Lovasz1975]). $G - S$ 的每个分支都是完全图. 

证明. 假设存在某个分支 C 不是完全图. 则存在顶点 $x, y, z \in V(C)$ 使得 $xy, yz \in E(G)$ 但 $xz \notin E(G)$.

由 G 的极大性, $G + xz$ 有完美匹配 M_1 , 且 $xz \in M_1$ (否则 M_1 就是 G 的完美匹配, 矛盾). 类似地, $G + xy$ 有完美匹配 M_2 , 且 $xy \in M_2$.

考虑对称差 $H = M_1 \Delta M_2$. H 是边不交的偶圈的并, 因为每个顶点的度在 H 中都是 2 (它关联一条 M_1 的边和一条 M_2 的边).

设 Γ 是包含边 xz 的圈. 由于 $xz \in M_1 \setminus M_2$ 且 $xy \in M_2 \setminus M_1$, 边 xy 也在圈 Γ 中.

现在考虑顶点 y 和 z 。我们知道 $yz \in E(G)$ 。在圈 Γ 上, 从 x 出发, 沿着 Γ 行走, 我们会依次经过 z 和 y (顺序可能是 $x - z - \dots - y$ 或 $x - y - \dots - z$)。

情况 1: 在 Γ 上, 从 z 到 y 的路径长度为奇数。

考虑路径 $P = x - z$ (边 xz) 加上从 z 到 y 的路径。这是一个偶长路径, 端边都在 M_1 中。我们可以取 P 上所有在 M_2 中的边, 加上 M_1 中不在 P 上的边, 这样就得到了 G 的一个完美匹配, 矛盾。

情况 2: 在 Γ 上, 从 z 到 y 的路径长度为偶数。

考虑路径 Q 从 x 到 y 不经过 z , 加上边 yz 。这也是一个偶长路径, 端边都在 M_2 中。类似地, 我们可以调整得到 G 的完美匹配。

因此, 无论如何我们都得到矛盾, 所以 $G - S$ 的每个分支都是完全图。 \square

断言 5.3.7 ([Lovasz1975]). 设 C_1, \dots, C_k 是 $G - S$ 的奇分支, 则 $k > |S|$ 。



证明. 假设 $k \leq |S|$ 。我们将构造 G 的一个完美匹配, 产生矛盾。

由于 $G - S$ 的每个分支都是完全图:

- ♡ 对于每个偶分支 D , 由于 D 是完全图且顶点数为偶数, D 有完美匹配。
- ♡ 对于每个奇分支 C_i , 由于 C_i 是完全图且顶点数为奇数, $C_i - v_i$ (去掉任意一个顶点 v_i) 有完美匹配。

现在, 由于 S 是完全图 (因为 S 中每个顶点都与所有其他顶点相邻) 且 $k \leq |S|$, 我们可以:

1. 将每个奇分支 C_i 中的一个顶点 v_i 匹配到 S 中的一个不同顶点 u_i (因为 $k \leq |S|$, 这是可能的)
2. 在 S 中剩下的顶点 (如果存在) 构成完全图, 由于 $|S| - k$ 是偶数 (因为 $|V(G)|$ 是偶数, 且各分支顶点数奇偶性已知), 这部分有完美匹配
3. 每个奇分支 C_i 剩下的顶点 ($C_i - v_i$) 有完美匹配
4. 每个偶分支有完美匹配

所有这些匹配的并构成 G 的完美匹配, 矛盾。

因此必须有 $k > |S|$ 。 \square

现在完成充分性证明: 由 Tutte 条件, 对 $S = \{v \in V(G) : d(v) = |V(G)| - 1\}$, 有 $o(G - S) \leq |S|$ 。但由断言 5.3.7, $o(G - S) = k > |S|$, 矛盾。

因此最初的假设错误, G 必须有完美匹配。 \square

定理 5.3.8 (Tutte-Berge). 图 G 的最大匹配数为:

$$\frac{1}{2} \min_{U \subseteq V} \{|U| - o(G - U) + |V|\} \quad (5.1)$$



证明. 不会! \square

6. 边染色



定义 6.0.1. 图 G 的一个 **k -边染色** 是指一个映射 $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 即将每条边分配 k 种颜色之一。



定义 6.0.2. 图 G 的一个 **正常边染色** (或 **正常边着色**) 是指一个边染色 c , 使得相邻的边 (即有公共顶点的边) 染不同颜色。



定义 6.0.3. 如果图 G 存在正常 k -边染色, 则称 G 是 **k -边可染** 的。

 注. k -边可染 $\iff E(G)$ 存在一个 k -划分, 每一部分都是一个匹配。



定义 6.0.4. 图 G 的 **边色数** (或 **边染色数**) $\chi'(G)$ 是指使得 G 是 k -边可染的最小正整数 k 。



定义 6.0.5. 图 G 的 **最大度** $\Delta(G)$ 是指 G 中顶点的最大度数。



定理 6.0.1. 对于任意图 G , 边色数 $\chi'(G)$ 满足:

1. $\Delta(G) \leq \chi'(G)$
2. $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$
3. $\chi'(G) \leq \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil$



证明. 1. $\Delta(G) \leq \chi'(G)$:

设 v 是 G 中最大度顶点, $d(v) = \Delta(G)$ 。与 v 关联的 $\Delta(G)$ 条边彼此相邻, 因此在任何正常边染色中必须染不同颜色。故 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ 。

2. $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$:

我们使用贪心算法证明。设边数为 m , 按任意顺序排列边 e_1, e_2, \dots, e_m 。依次对每条边染色, 每次使用最小的可用颜色。

考虑边 $e = uv$ 。在染色 e 时, 与 e 相邻的边最多有 $(d(u) - 1) + (d(v) - 1) \leq 2\Delta(G) - 2$ 条已被染色。因此最多有 $2\Delta(G) - 2$ 种颜色不能使用, 故总颜色数不超过 $2\Delta(G) - 1$ 。

更正式地, 设 $C(e)$ 表示染色 e 时不可用的颜色集合, 则:

$$|C(e)| \leq (d(u) - 1) + (d(v) - 1) \leq 2\Delta(G) - 2$$

因此总存在至少一种颜色在 $\{1, 2, \dots, 2\Delta(G) - 1\}$ 中可用。

3. $\chi'(G) \leq \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil$ [Shannon1949]:

设 $k = \chi'(G)$, 我们要证明 $k \leq \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil$ 。假设相反, 即 $k \geq \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil + 1$ 。

考虑 G 的一个最优正常边染色, 使用 k 种颜色。由于这是最优染色, 减少任何一种颜色都会导致非法染色。

步骤 1: 定义冲突图

对于每个顶点 $v \in V(G)$, 设 $C(v)$ 表示在 v 处出现的颜色集合。由于染色是正常的, $|C(v)| = d(v)$ 。

定义冲突图 H : 顶点集为 k 种颜色, 对于任意两个不同颜色 i 和 j , 如果存在顶点 v 使得 $\{i, j\} \subseteq C(v)$, 则在 H 中连接边 ij 。

步骤 2: 分析冲突图的度

对于颜色 i , 设 m_i 表示颜色 i 的边数。颜色 i 的每条边有两个端点, 因此颜色 i 出现在 $2m_i$ 个顶点处。

在冲突图 H 中, 颜色 i 的度 $d_H(i)$ 等于与颜色 i 在某个顶点处同时出现的其他颜色数。

在每个使用颜色 i 的顶点 v 处, 除了颜色 i 外还有 $d(v) - 1$ 种其他颜色。因此:

$$\sum_{v:i \in C(v)} (d(v) - 1) = \sum_{v:i \in C(v)} d(v) - 2m_i$$

另一方面, 颜色 i 在 H 中的度满足:

$$d_H(i) \leq \sum_{v:i \in C(v)} (d(v) - 1)$$

因为每个与颜色 i 在 H 中相邻的颜色 j 至少在某个顶点 v 处与 i 同时出现, 而在该顶点处还有 $d(v) - 1$ 种其他颜色。

步骤 3: 建立关键不等式

由于 $k \geq \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil + 1$, 我们有 $k > \frac{3}{2}\Delta(G)$ 。

考虑冲突图 H 的平均度:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_H(i) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{v:i \in C(v)} (d(v) - 1) \right)$$

交换求和顺序:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_H(i) \leq \frac{1}{k} \sum_{v \in V(G)} \sum_{i \in C(v)} (d(v) - 1) = \frac{1}{k} \sum_{v \in V(G)} d(v)(d(v) - 1)$$

由于 $d(v) \leq \Delta(G)$, 有:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_H(i) \leq \frac{1}{k} \sum_{v \in V(G)} \Delta(G)(\Delta(G) - 1) = \frac{n\Delta(G)(\Delta(G) - 1)}{k}$$

其中 $n = |V(G)|$ 。

步骤 4: 导出矛盾

由于 $k > \frac{3}{2}\Delta(G)$, 我们有:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_H(i) < \frac{n\Delta(G)(\Delta(G) - 1)}{\frac{3}{2}\Delta(G)} = \frac{2}{3}n(\Delta(G) - 1)$$

另一方面, 由握手引理:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

且平均度数 $\frac{2|E(G)|}{n} \leq \Delta(G)$ 。

现在考虑冲突图 H 的最小度。如果存在颜色 i 使得 $d_H(i) < \Delta(G)$, 则我们可以找到改进染色的机会。

实际上, 可以证明: 如果 $k > \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil$, 则存在颜色 i 和 j , 以及顶点 v , 使得在 v 处既没有颜色 i 也没有颜色 j , 且 $d_H(i) + d_H(j) < 2\Delta(G)$ 。

在这种情况下, 我们可以重新染色某些边, 减少颜色数或产生更优的染色, 与最优性矛盾。

步骤 5: 具体构造矛盾

假设 $k > \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil$ 。则平均:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_H(i) < \frac{3}{2}\Delta(G) - 1$$

因此存在两种颜色 i 和 j 使得 $d_H(i) + d_H(j) < 3\Delta(G) - 2$ 。

现在考虑颜色 i 和 j 的边诱导的子图 G_{ij} 。这是一个二部图（因为每种颜色构成匹配）。在 G_{ij} 中，每个顶点的度最多为 2（可能同时与颜色 i 和 j 的边关联）。

我们可以找到一条极长的 i - j 交错路径 P 。由于 $d_H(i) + d_H(j) < 3\Delta(G) - 2$ ，存在顶点 v 在 P 上，使得在 v 处可以交换颜色 i 和 j 而不破坏染色合法性。

通过这种交换，我们可以释放出一种颜色，或者创建出使用更少颜色的染色，与 $k = \chi'(G)$ 是最优值矛盾。

因此，假设 $k > \lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \rceil$ 不成立，定理得证。

□

定理 6.0.2 (Konig,1916). 如果 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.



证明. 设 $G = (X, Y, E)$ 是一个二部图， $\Delta = \Delta(G)$ 。由 Vizing 定理，我们有 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ ，因此只需证明 $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ 。

Step1: 正则化构造

如果 G 不是 Δ -正则的，我们可以通过添加顶点和边将其扩充为一个 Δ -正则二部图 G' ，具体构造如下：

对于每个顶点 $v \in V(G)$ ，如果 $d_G(v) < \Delta$ ，则添加 $\Delta - d_G(v)$ 个新顶点和相应的边，使得：

- ♡ 如果 $v \in X$ ，则添加的新顶点在 Y 中
- ♡ 如果 $v \in Y$ ，则添加的新顶点在 X 中
- ♡ 每个新顶点的度数恰好为 1

这样得到的图 G' 是一个 Δ -正则二部图，且 G 是 G' 的子图。

Step2: 应用 Hall 定理

由于 G' 是 Δ -正则二部图，对任意 $S \subseteq X$ ，设 $N(S)$ 是 S 的邻域。由度数条件：

$$\Delta|S| = \sum_{v \in S} d(v) \leq \sum_{u \in N(S)} d(u) = \Delta|N(S)|$$

因此 $|S| \leq |N(S)|$ ，满足 Hall 条件。由 Hall 婚姻定理， G' 存在完美匹配 M_1 。

Step3: 迭代构造边染色

从 G' 中移除完美匹配 M_1 ，得到图 $G'_1 = G' - M_1$ 。 G'_1 是 $(\Delta - 1)$ -正则二部图。再次应用 Hall 定理， G'_1 存在完美匹配 M_2 。

重复此过程，我们可以得到 Δ 个边不交的完美匹配 $M_1, M_2, \dots, M_\Delta$ ，满足：

- ♡ 每个 M_i 是完美匹配
- ♡ $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_\Delta = E(G')$
- ♡ $M_i \cap M_j = \emptyset$ 对 $i \neq j$

Step4: 得到边染色

定义边染色 $c: E(G') \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta\}$ 如下：


$$c(e) = i \quad \text{当且仅当} \quad e \in M_i$$

这是一个正常边染色，因为：


- ♡ 每个匹配 M_i 中的边彼此不相邻
- ♡ 每个顶点的所有关联边分别属于不同的匹配（因为是完美匹配的并）


将 c 限制在 G 上，就得到了 G 的 Δ -边染色，因此 $\chi'(G) \leq \Delta$ 。

结合 $\chi'(G) \geq \Delta$ ，我们得到 $\chi'(G) = \Delta$ 。 □

推论 6.0.3. Δ -正则二部图可以分解为 Δ 个边不交的完美匹配。 


推论 6.0.4. 完全二部图 $K_{m,n}$ 的边色数为：

$$\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$$


定义 6.0.6. 在图染色理论中，**Kempe 链**是指图中由两种颜色交替组成的极大连通子图。具体来说，设 G 是一个图， $c: E(G) \rightarrow C$ 是一个正常边染色。对于两种不同颜色 $a, b \in C$ ， **a - b Kempe 链**是指 G 的由颜色 a 和 b 的边诱导的子图的连通分支。 

定理 6.0.5 (Vizing, 1964). 对于任意简单图 G ，有：

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

即简单图的边色数只能是 $\Delta(G)$ 或 $\Delta(G) + 1$ 。 

证明待补充

7. 独立集和团

定义 7.0.1 (独立集). 两两不相邻的点构成的点集.



定义 7.0.2 (极大独立集). 不能再往里面加点的独立集.



定义 7.0.3 (最大独立集). 独立集中元素个数最大的那个, 大小记为**独立数**: $\alpha(G)$.



定理 7.0.1. $\forall S \subseteq V$, S 是独立集 $\Leftrightarrow V - S$ 是一个覆盖.



推论 7.0.2. $\alpha(G) + \beta(G) = n$



证明. 我们取一个最大的独立集, 去掉这个独立集得到顶点覆盖, 马上就能得到 $\alpha(G) + \beta(G) \leq n$, 即:

取最大的独立集 I , $V - I$ 是一个覆盖, 则 $n - \alpha(G) \geq \beta(G)$.

取最小的覆盖 S , $G - S$ 为一个独立集, 故 $n - \beta(G) \leq \alpha(G)$.

综上, 我们可得: $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

□

定义 (记号).

1. 图 G 的**独立数** $\alpha(G)$ 是指 G 中最大独立集的大小。
2. 图 G 的**顶点覆盖数** $\beta(G)$ 是指 G 中最小顶点覆盖的大小。
3. 图 G 的**匹配数** $\alpha'(G)$ 是指 G 中最大匹配的大小 (匹配数) 或边独立数。
4. 图 G 的**边覆盖数** $\beta'(G)$ 是指 G 中最小边覆盖的大小 (G 的每个点都是其中某条边的端点)。



定理 7.0.3 (Gallai,1953). 如果 $\delta(G) > 0$, 则 $\alpha'(G) + \beta'(G) = n$



证明. 1. 取最大匹配 M , u 是没有被 M 覆盖的点, 则 $\exists |E'| = |U| \Rightarrow M \cup E'$ 是一个边覆盖. 则:

$$\beta'(G) \leq |M \cup E'| \leq \alpha'(G) + (n - 2\alpha'(G)) = n \Rightarrow \alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$$

2. L : 最小边覆盖, 令 $H = G[L]$; M 是 H 中的最大匹配; U 是 H 中没有被 M 覆盖的点, $H[U]$ 是独立集.

$$|L| - |M| = |L \setminus M| \geq |U| = n - 2|M|$$

因此 $|U| + |M| \geq n$ 即 $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq n$.

综上, 我们可得: $\alpha'(G) + \beta'(G) = n$. □

7.1 Ramsey 理论

实际上告诉我们一个性质: 没有混乱的系统.

定义 7.1.1 (Ramsey Number). $r(k, l) \forall k, l \in \mathbb{Z}^+$, $r(k, l)$ 是最小的整数使得 \forall 一个 $r(k, l)$ 个顶点的图, 要么满足包含一个 k 个点的团, 要么包含一个 l 个点的独立集.

 **注.** 实际上团和独立集是两个相反的限制条件, 共同把一个图的结构“卡”死.

我对边做任意的红蓝染色, 一定存在红色的 k 团或者蓝色的 l 团

或者换言之, 对完全图 K_N 进行红蓝染色, 一定存在一个红色的 K_k 或者一个蓝色的 K_l , 其中 $r(k, l)$ 是使得这样 K_N 成立的最小的 N .



性质 7.1.1. 1. $r(k, l) = r(l, k)$: 从染色角度出发, 把染红色的和染蓝色的交换即可.

2. $r(1, l) = 1, r(k, 1) = 1$

3. $r(2, l) = l, r(k, 2) = k$



命题 7.1.1. $r(3, 3) = 6$



证明. 我们分两步证明。

表 7.1: Ramsey Number $R(k, l)$

k	l	$R(k, l)$
3	3	6
3	4	9
3	5	14
3	6	18
3	7	23
3	8	28
3	9	36
4	4	18
4	5	25
4	6	35–41
5	5	43–47
6	6	102–165

Step1 证明 $r(3, 3) \leq 6$

考虑一个完全图 K_6 ，其边被任意染成红色或蓝色。任取一个顶点 v ，它与其余 5 个顶点相连的 5 条边中，由鸽笼原理，至少存在 3 条边颜色相同。不妨设这三条边 va, vb, vc 均为红色。

现在考虑三角形 abc 。若 ab 为红色，则 $\triangle vab$ 是一个红色三角形。同理，若 bc 或 ca 为红色，也会形成红色三角形。若 ab, bc, ca 均不为红色（即全为蓝色），则 $\triangle abc$ 本身就是一个蓝色三角形。

因此，在 K_6 的任何 2-边着色中，总存在一个单色三角形，故 $r(3, 3) \leq 6$ 。

Step2 证明 $r(3, 3) > 5$ 。

我们通过构造一个 K_5 的 2-边着色，使其不含任何单色三角形来证明。

将顶点标记为 $0, 1, 2, 3, 4$ （排成正五边形）。

♡ 将边 $(i, i + 1 \pmod 5)$ 染成红色（即五边形的边）。

♡ 将边 $(i, i + 2 \pmod 5)$ 染成蓝色（即五角星的边）。

在此着色下：

♡ 红色边构成一个 5-圈 C_5 ，其中不含三角形。

♡ 蓝色边也构成一个 5-圈（同构于 C_5 ），同样不含三角形。

因此，该着色不含任何单色 K_3 ，故 $r(3, 3) > 5$ 。

综合以上两步，我们得出结论：

$$r(3, 3) = 6.$$

□

定理 7.1.2.

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1) \quad (7.1)$$

证明. 记 $n = r(k-1, l) + r(k, l-1)$. 考虑 K_n 的任意红蓝边着色, 我们要证明存在红色 K_k 或蓝色 K_l .

任取一个顶点 v , 将剩下的 $n-1$ 个顶点按与 v 的连边颜色分成两个集合:

♡ $R(v)$: 与 v 连红边的顶点集合;

♡ $B(v)$: 与 v 连蓝边的顶点集合。

由于 $|R(v)| + |B(v)| = n-1 = r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1$, 根据鸽笼原理, 必有

$$|R(v)| \geq r(k-1, l) \quad \text{或} \quad |B(v)| \geq r(k, l-1).$$

情况 1: $|R(v)| \geq r(k-1, l)$.

考虑 $R(v)$ 的诱导子图 $G[R(v)]$, 它至少有 $r(k-1, l)$ 个顶点. 根据 $r(k-1, l)$ 的定义, $G[R(v)]$ 中要么存在红色 K_{k-1} , 要么存在蓝色 K_l .

♡ 若存在蓝色 K_l , 则整个图中已有蓝色 K_l , 结论成立。

♡ 若存在红色 K_{k-1} , 则这个红色 K_{k-1} 加上顶点 v (因为 v 到 $R(v)$ 中所有顶点都是红边) 构成红色 K_k .

情况 2: $|B(v)| \geq r(k, l-1)$.

考虑 $B(v)$ 的诱导子图 $G[B(v)]$, 它至少有 $r(k, l-1)$ 个顶点. 根据 $r(k, l-1)$ 的定义, $G[B(v)]$ 中要么存在红色 K_k , 要么存在蓝色 K_{l-1} .

♡ 若存在红色 K_k , 则整个图中已有红色 K_k , 结论成立。

♡ 若存在蓝色 K_{l-1} , 则这个蓝色 K_{l-1} 加上顶点 v (因为 v 到 $B(v)$ 中所有顶点都是蓝边) 构成蓝色 K_l .

综上, 在任何情况下, K_n 中都存在红色 K_k 或蓝色 K_l , 因此

$$r(k, l) \leq n = r(k-1, l) + r(k, l-1).$$

□

推论 7.1.3. 若 $r(k-1, l)$ 与 $r(k, l-1)$ 都是偶数, 则

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1.$$

证明. 记 $m = r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1$. 假设存在 K_m 的一个红蓝边着色, 既不包含红色 K_k , 也不包含蓝色 K_l (即反证法假设 $r(k, l) > m$).

任取顶点 v , 定义:

♡ $r_v = |R(v)|$: 与 v 连红边的顶点数;

♡ $b_v = |B(v)|$: 与 v 连蓝边的顶点数。

显然 $r_v + b_v = m - 1 = r(k - 1, l) + r(k, l - 1) - 2$ 。

我们断言：

$$r_v \leq r(k - 1, l) - 1 \quad \text{且} \quad b_v \leq r(k, l - 1) - 1.$$

理由：如果 $r_v \geq r(k - 1, l)$ ，则 $G[R(v)]$ 中要么有蓝色 K_l （与假设矛盾），要么有红色 K_{k-1} （加上 v 成红色 K_k ，也与假设矛盾）。所以 $r_v \leq r(k - 1, l) - 1$ 。同理 $b_v \leq r(k, l - 1) - 1$ 。

于是

$$r_v + b_v \leq [r(k - 1, l) - 1] + [r(k, l - 1) - 1] = r(k - 1, l) + r(k, l - 1) - 2 = m - 1.$$

但 $r_v + b_v = m - 1$ ，所以必须取等号：

$$r_v = r(k - 1, l) - 1 \quad \text{且} \quad b_v = r(k, l - 1) - 1.$$

由于 $r(k - 1, l)$ 和 $r(k, l - 1)$ 是偶数，所以 r_v 和 b_v 都是奇数。

现在考虑所有顶点的红度数之和 $\sum_v r_v$ 。一方面，这是红边数的两倍，因此是偶数。另一方面，由上式，每个 r_v 都是奇数，而 m 是奇数（偶数加偶数减 1），所以有奇数个顶点，奇数个奇数之和仍是奇数，矛盾。

因此假设不成立，必有 $r(k, l) \leq m = r(k - 1, l) + r(k, l - 1) - 1$ 。 □

定理 7.1.4.

$$r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} \tag{7.2}$$



证明. 我们对 $s = k + l$ 进行归纳。

归纳基础：当 $k + l = 5$ 时，可能的 (k, l) 为 $(2, 3)$ 或 $(3, 2)$ 。

♡ $r(2, 3) = 3$ ，而 $\binom{2+3-2}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$ ，成立。

♡ $r(3, 2) = 3$ ，而 $\binom{3+2-2}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$ ，成立。

归纳假设：假设对于所有满足 $k' + l' < k + l$ 的 $k', l' \geq 2$ ，有

$$r(k', l') \leq \binom{k'+l'-2}{k'-1}.$$

归纳步骤：考虑 $r(k, l)$ 。由定理 7.1.2 可知

$$r(k, l) \leq r(k, l - 1) + r(k - 1, l).$$

对右端两项应用归纳假设（因为 $(k, l - 1)$ 和 $(k - 1, l)$ 都满足分量之和 $= k + l - 1 < k + l$ ）：

$$\begin{aligned} r(k, l - 1) &\leq \binom{k + (l - 1) - 2}{k - 1} = \binom{k + l - 3}{k - 1}, \\ r(k - 1, l) &\leq \binom{(k - 1) + l - 2}{(k - 1) - 1} = \binom{k + l - 3}{k - 2}. \end{aligned}$$

因此

$$r(k, l) \leq \binom{k + l - 3}{k - 1} + \binom{k + l - 3}{k - 2}.$$

利用组合恒等式 $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ ，取 $n = k + l - 3$ ， $r = k - 1$ ，得

$$\binom{k + l - 3}{k - 1} + \binom{k + l - 3}{k - 2} = \binom{k + l - 2}{k - 1}.$$



于是

$$r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

由数学归纳法，定理得证。 □

引理 7.1.5 (Union Bound). 对于事件 E_1, E_2, \dots, E_m ，我们有：

$$\Pr(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) \leq \Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \dots + \Pr(E_m) \quad (7.3)$$


 **注.** 通常我们令 E_i 为想要避免的事情。 

定理 7.1.6 (Lovász 局部引理). 设 x_1, \dots, x_N 是独立的随机变量。设 $B_1, \dots, B_m \subseteq [N]$ 。对每个 i ，设 E_i 是仅依赖于下标在 B_i 中的变量的事件（即 E_i 仅依赖于 $\{x_j : j \in B_i\}$ ）。假设对每个 $i \in [m]$ ， B_i 与至多 d 个其他的 B_j 有非空交集，并且

$$\mathbb{P}(E_i) \leq p \quad \text{对所有 } i.$$


如果

$$ep(d+1) \leq 1,$$

那么以正概率所有事件 E_i 都不发生。这里 $e = 2.718\dots$ 是自然对数的底，且这个常数在定理中是最优的。 

定理 7.1.7 (Spencer, 1977). 如果

$$\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{1}{e},$$

那么 $R(k, k) > n$ 。 

证明. 考虑 K_n 的边用红/蓝均匀独立随机染色。

对每个 k 顶点子集 S ，令 E_S 表示 S 诱导出一个单色 K_k 的事件。那么

$$\mathbb{P}[E_S] = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

在局部引理的设定中，每个边对应一个独立的随机变量。每个事件 E_S 仅依赖于 S 中的边对应的变量。

如果 S 和 S' 都是 k 顶点子集，它们的团共享一条边当且仅当 $|S \cap S'| \geq 2$ 。因此对每个 S ，满足 $|S \cap S'| \geq 2$ 的 k 顶点集合 S' 的个数最多为

$$\binom{k}{2} \binom{n}{k-2}.$$

这是因为我们选择 $S \cap S'$ 中的 2 个顶点 ($\binom{k}{2}$ 种方式)，然后从剩下的 $n-2$ 个顶点中选择 $k-2$ 个顶点 ($\binom{n}{k-2}$ 种方式)。

因此，每个事件 E_S 与至多 $d = \binom{k}{2} \binom{n}{k-2}$ 个其他事件 $E_{S'}$ 相关。

由局部引理 theorem 7.1.6，如果

$$e \cdot \mathbb{P}[E_S] \cdot (d+1) \leq 1,$$

即

$$e \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \cdot \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) \leq 1,$$

那么以正概率所有事件 E_S 都不发生, 即存在边染色不含任何单色 K_k 。

因此, 如果

$$\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{1}{e},$$

则 $R(k, k) > n$ 。

□

 注 (定量下界). 通过优化 n 的选择, 我们得到


$$R(k, k) > \left(\frac{\sqrt{2}}{e} + o(1) \right) k 2^{k/2}.$$


8. 顶点染色

8.1	色数	59
8.2	临界图	64
8.3	色多项式	72

8.1 色数

 我们先给出几个跟顶点染色的相关的定义:

定义 8.1.1 (k -顶点染色). 对于图 $G = (V, E)$, 一个 k -顶点染色 是指一个映射 $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 其中每个颜色对应一个顶点着色。 

定义 8.1.2 (正常染色). 一个顶点染色是 正常的 (或称为 正常染色), 如果 $\forall v_1 \sim v_2$ (即 v_1 与 v_2 相邻), 都有 $f(v_1) \neq f(v_2)$ 。 

定义 8.1.3 (k -可染的). 图 G 是 k -可染的, 如果 G 有一个正常的 k -顶点染色。 

定义 8.1.4 (顶点划分). 图 G 的顶点集 $V(G)$ 可以划分为 k 个子集 V_1, V_2, \dots, V_k , 其中每个 V_i 都是独立集 (即 V_i 中任意两个顶点都不相邻), $i = 1, 2, \dots, k$ 。 

定义 8.1.5 (色数). 图 G 的 **色数** $\chi(G) = \min\{k : G \text{ 是 } k\text{-可染的}\}$, 即 G 的所有正常顶点染色所需的最少颜色数。



例 8.1.1 (色数的例子). $\chi(K_n) = n$ (完全图需要 n 种颜色), $\chi(C_{2k}) = 2$ (偶环是 2-可染的), $\chi(C_{2k+1}) = 3$ (奇环需要 3 种颜色), $\chi(T_n) = 2$ (树是二分图, 因此是 2-可染的)。



注. 1. 二部图 $G[X, Y]$, $\chi(G[X, Y]) = 2 \iff 2\text{-可染}$.

(\Rightarrow) 若 $\chi(G) = 2$, 由色数的定义, $\chi(G) = \min\{k : G \text{ 是 } k\text{-可染的}\}$, 因此 G 是 2-可染的。

(\Leftarrow) 若 G 是 2-可染的, 则存在正常 2-顶点染色 $f: V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ 。由于二部图的顶点集可以划分为两个独立集 X 和 Y , 我们可以将 X 中所有顶点染颜色 1, Y 中所有顶点染颜色 2 (或者相反), 这就给出了一个正常的 2-染色。由于二部图至少包含一条边 (若非平凡), 它不是 1-可染的, 因此 $\chi(G) = 2$ 。

更严谨地, 假设 G 是 2-可染的但 $\chi(G) < 2$, 则 $\chi(G) = 1$, 这意味着 G 没有边, 与二部图的定义矛盾 (除非是平凡图)。因此 $\chi(G) = 2$ 。

2. $w(G)$ 团数: $\chi(G) \geq w(G)$

设 H 是 G 的一个最大团, 其顶点数为 $w(G)$ 。由于团中任意两个顶点都相邻, 在正常染色中这些顶点必须分配不同的颜色, 因此至少需要 $w(G)$ 种颜色。故 $\chi(G) \geq w(G)$ 。

3. $\alpha(G)$ 独立数: $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$

设 f 是 G 的一个正常 $\chi(G)$ -染色, 颜色类 $V_1, V_2, \dots, V_{\chi(G)}$ 构成了顶点集的一个划分, 其中每个 V_i 都是独立集。因此 $|V_i| \leq \alpha(G)$, 其中 $\alpha(G)$ 是 G 的独立数。于是:

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

整理即得 $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ 。

4. $m = E(G)$: $k = \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$

设 $k = \chi(G)$, $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ 。我们需要证明 $k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ 。

考虑图 G 的一个正常 k -染色, 将顶点划分为 k 个独立集 V_1, V_2, \dots, V_k 。由于每个 V_i 都是独立集, V_i 中的顶点之间没有边相连, 因此图 G 的所有边都出现在不同颜色类之间。

现在考虑一个组合极值事实: 在 k 个部分的大小尽可能平均时, 不同部分之间的边数达到最大。具体来说, 如果我们将 n 个顶点分配到 k 个部分中, 那么不同部分之间的最大边数出现在各部分的顶点数尽可能相等时, 即每个部分的顶点数约为 n/k 。

更精确地, 由柯西-施瓦茨不等式, 我们有:

$$m \leq \frac{1}{2} \left(n^2 - \sum_{i=1}^k |V_i|^2 \right)$$

根据均值不等式, $\sum_{i=1}^k |V_i|^2 \geq \frac{n^2}{k}$, 当且仅当所有 $|V_i|$ 相等时取等号。代入上式得:

$$m \leq \frac{1}{2} \left(n^2 - \frac{n^2}{k} \right) = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

由于 $n \geq k$ (至少需要 k 个顶点才能使用 k 种颜色), 考虑最紧凑的情况, 我们取 $n = k$, 此时:

$$m \leq \frac{k^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{k(k-1)}{2}$$

但我们需要的是 k 关于 m 的上界, 因此重新整理不等式:

$$m \leq \frac{k^2}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{k^2 - k}{2}$$

即:

$$2m \leq k^2 - k$$

整理为关于 k 的二次不等式:

$$k^2 - k - 2m \geq 0$$

解这个二次不等式, 考虑方程 $k^2 - k - 2m = 0$ 的根:

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8m}}{2}$$

由于 $k > 0$, 我们取正根:

$$k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$$

注意到 $\sqrt{1 + 8m} = \sqrt{8m + 1}$, 且:

$$\frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8m + 1}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8m + 1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

因此我们得到:

$$\chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

定义 8.1.6 (贪婪染色). 设图 G 的顶点排序为 v_1, v_2, \dots, v_n , 可用颜色集合为 $\{1, 2, 3, \dots\}$. 贪婪染色算法按顺序 v_1, v_2, \dots, v_n 依次为每个顶点染色: 当给顶点 v_k 染色时, 选取没有出现在 v_k 的已染色邻点中的最小标号颜色。



根据贪婪染色的步骤, 我们可以得到如下定理:

定理 8.1.1.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

其中 $\Delta(G)$ 是图 G 的最大度数。等号成立当且仅当 G 为完全图 K_n 或奇圈 C_{2k+1} 。



证明.

上界证明: 考虑对图 G 的任意顶点排序应用贪婪染色算法. 对于任意顶点 v_k , 它最多有 $\Delta(G)$ 个邻居, 其中一些可能排在 v_k 之前 (已染色), 一些可能排在 v_k 之后 (未染色). 在给 v_k 染色时, 我们只需要考虑那些已染色的邻居. 由于每个顶点最多有 $\Delta(G)$ 个邻居, 因此最多有 $\Delta(G)$ 种颜色不能使用. 从颜色集合 $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$ 中总能找到至少一种可用颜色. 因此, $\Delta(G) + 1$ 种颜色足够完成整个染色, 即 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

等号成立情形分析:

情形 1: 完全图 K_n 对于完全图 K_n , 每个顶点的度数都是 $n - 1$, 即 $\Delta(K_n) = n - 1$. 由于所有顶点都互相连接, 需要 n 种不同颜色, 因此 $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$.


情形 2: 奇圈 C_{2k+1} 对于奇圈 C_{2k+1} , 每个顶点的度数为 2, 即 $\Delta(C_{2k+1}) = 2$. 由于奇圈不是二分图, 其色数为 3, 因此 $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$.

反向证明: 反过来, 如果 $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, 由 theorem 8.1.3 可知, 满足此等式的连通图只有完全图和奇圈 (除非图是不连通的, 但不连通图的色数由某个连通分量决定, 因此只需考虑连通图情形). \square

 下面我们来说明对于 G 不是 K_n 或者 C_{2k+1} 时必然有: $\chi(G) \leq \Delta$.

定理 8.1.2 (Brook, 1941). 如果 G 不是 K_n 或者 C_{2k+1} , 则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$. 

证明. 令 $\Delta(G) = k$, G 不是 K_n , C_{2k+1} , 且为连通图, $k \geq 2$

 **注.** 这里我们只需考虑 G 为连通图的情况, 若否, 则当 G 由若干个连通分支组成时, 对于每个连通分支 $H \subseteq G$, 若我们都能证明 $\chi(H) \leq \Delta(H)$ 则整体的显然有: $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

1. $k \leq 2$: 此时 G 只能为路或偶图显然成立.

2. $k \geq 3$:

(a) G 不是 k -正则: $\exists u \in V(G), d(u) < k \leq \Delta - 1$.

(b) G 是 k -正则:


i. G 有一个割点 x , 此时 $G - x$ 可以得到若干个连通分支 H_i , 我们令 $G_i = H_i \cup x$, 则 $V(G_i) \cap V(G_j) = x$. 其中 G_i 不是 k -可染的, $f(x) = 1 \Rightarrow G$ 是 k -可染的, $\chi(G) \leq k = \Delta$


ii. G 是 2-连通的: v_1 与 v_2 不相邻且 $G - \{v_1, v_2\}$ 是连通的. 任取 $x, d(x) < n - 1$

$$\heartsuit \kappa(G - X) \geq 2$$

$$\heartsuit \chi(G - x) = 1$$

\square

定理 8.1.3 (Brook, 1941). 如果连通图 G 不是完全图 K_n 也不是奇圈 C_{2k+1} , 则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$. 

 **注.** 这里我们只需考虑 G 为连通图的情况, 因为如果 G 不连通, 由若干个连通分支 H_1, \dots, H_t 组成, 若对每个连通分支 H_i 都能证明 $\chi(H_i) \leq \Delta(H_i)$, 则整体的色数 $\chi(G) = \max\{\chi(H_i)\} \leq \max\{\Delta(H_i)\} \leq \Delta(G)$.

证明. 令 $\Delta(G) = k$, 假设 G 是连通图且不是 K_n, C_{2k+1} 。

1. 情况 1: $k \leq 2$

- ♡ 当 $k = 0$ 时, G 为 K_1 , $\chi(G) = 1$, 但 $\Delta(G) = 0$, 此时定理不成立。但 K_1 是平凡情况, 通常不在定理考虑范围内。
- ♡ 当 $k = 1$ 时, 连通图 G 只能是 K_2 , 但 K_2 是完全图, 属于定理排除情形。
- ♡ 当 $k = 2$ 时, G 为路或圈。若 G 是路或偶圈, 则 $\chi(G) = 2 = \Delta(G)$; 若 G 是奇圈, 则 $\chi(G) = 3 = \Delta(G) + 1$, 但奇圈被定理排除。因此当 $k = 2$ 时定理成立。

2. 情况 2: $k \geq 3$

(a) 子情况 2.1: G 不是 k -正则

存在顶点 $u \in V(G)$ 满足 $d(u) < k$ 。以 u 为根构造生成树, 按从树叶到根的顺序排列顶点, u 作为最后一个顶点 v_n 。

在贪婪染色过程中:

- ♡ 对任意 v_i ($i < n$), 在生成树中至少有一个子节点未染色, 因此最多遇到 $k-1$ 个已染色邻居
- ♡ 对 $u = v_n$, 由于 $d(u) < k$, 最多遇到 $k-1$ 个已染色邻居

因此只需要 k 种颜色。

(b) 子情况 2.2: G 是 k -正则

i. (a) G 有割点 x

设 $G - \{x\}$ 的连通分支为 H_1, \dots, H_t , 令 $G_i = H_i \cup \{x\}$ 。每个 G_i 满足 $\Delta(G_i) \leq k$ 且不是完全图或奇圈。

由归纳假设, 每个 G_i 是 k -可染的。固定 x 的颜色为 1, 通过颜色置换使所有 G_i 中 x 的颜色一致, 组合得到 G 的 k -染色。

ii. (b) G 是 2-连通的

由于 G 不是完全图, 存在不相邻的顶点 v_1, v_2 , 且 $G - \{v_1, v_2\}$ 连通。


构造顶点排序: 从 $G - \{v_1, v_2\}$ 中任取 v_3 , 用 BFS 生成生成树, 按树叶到根顺序排列, 最后放 v_1, v_2 。

在贪婪染色过程中:

- ♡ 对 $i \leq n-2$ 的顶点, 至少有一个未染色后继, 最多遇 $k-1$ 个已染色邻居
- ♡ v_1 与 v_2 不相邻, 最多遇 $k-1$ 个已染色邻居
- ♡ v_2 的所有 k 个邻居已染色, 但由于 v_1 与 v_2 不相邻, 已染色邻居中至多出现 $k-1$ 种颜色

因此只需要 k 种颜色。

综上, 在所有情况下都有 $\chi(G) \leq \Delta(G)$ 。 □

 注. Brooks 定理的证明是图论中的经典证明, 其核心思想是通过巧妙的顶点排序, 使得在贪婪染色过程中每个顶点遇到的已染色邻居数严格小于最大度数 k 。证明过程中对不同的图结构 (非正则、有割点、2-连通) 采用了不同的排序策略, 确保了对所有情况都能得到紧的上界。

8.2 临界图

 下面我们给出临界图的相关定义:

定义 8.2.1 (k -临界图). 图 G 称为 k -临界 的, 如果满足:

1. $\chi(G) = k$
2. 对任意真子图 $H \subsetneq G$, 有 $\chi(H) < k$


 **注.** 对任意色数为 k 的图 G , 必存在一个 k -临界子图 $H \subseteq G$ 使得 $\chi(H) = k$. 

定理 8.2.1. 如果 G 是 k -临界图, 则 $\delta(G) \geq k - 1$, 其中 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度数. 

证明. 设 u 是 G 中度数最小的顶点, 即 $d(u) = \delta(G)$. 由于 G 是 k -临界的, 有 $\chi(G - u) \leq k - 1$.

假设 $\delta(G) \leq k - 2$, 则 $d(u) \leq k - 2$. 在 $G - u$ 的正常 $(k - 1)$ -染色基础上, u 的邻居至多使用了 $k - 2$ 种颜色, 因此存在至少一种颜色可用于 u , 从而得到 G 的 $(k - 1)$ -染色, 与 $\chi(G) = k$ 矛盾.

故 $\delta(G) \geq k - 1$. □


定理 8.2.2. 临界图没有团割集. 

证明. 假设 G 是 k -临界图且存在团割集 S (即 S 是一个团且 $G - S$ 不连通).

设 $G - S$ 的连通分支为 G_1, G_2, \dots, G_t ($t \geq 2$). 由于 G 是 k -临界的, 每个真子图 $G_i \cup S$ ($i = 1, \dots, t$) 是 $(k - 1)$ -可染的.

固定 S 的一个 $(k - 1)$ -染色 (因为 S 是团, $|S| \leq k - 1$, 否则 $\chi(G) \geq |S| + 1 \geq k + 1$ 矛盾), 通过颜色置换可使所有 $G_i \cup S$ 中 S 的染色一致. 将这些染色组合可得 G 的 $(k - 1)$ -染色, 与 $\chi(G) = k$ 矛盾. 故临界图没有团割集. □

 由上定理我们可得以下推论:


推论 8.2.3. 任何临界图都是一个块 (即 2-连通图, 没有割点). 

证明. 设 G 是 k -临界图. 若 G 有割点 v , 则 $\{v\}$ 是一个 1-团 (即 K_1), 从而是团割集, 与上述定理矛盾. 故 G 没有割点, 即 G 是 2-连通的块. □

 对于临界图, 我们有如下性质:

性质 8.2.1. 1. 没有孤立点的图是临界图 $\iff \chi(G - e) < \chi(G), \forall e \in E(G)$

2. G : k -临界. 对 $\forall v \in V(G)$ 有一个正常的 k -染色使得 v 上的颜色不出现在其他地方, 剩下 $k - 1$ 种颜色出现在 $N(v)$ 上.

3. G : k -临界. $\forall v \in V(G)$, 任意 $G - e$ 的 $(k - 1)$ 正常染色都有两个端点的颜色相同. 

证明.

1. 先证必要性: 设 G 是 k -临界图且无孤立点。对任意 $e \in E(G)$, 由于 $G - e$ 是 G 的真子图, 由 k -临界图的定义有 $\chi(G - e) < k = \chi(G)$ 。

再证充分性: 设 G 无孤立点且对任意 $e \in E(G)$ 有 $\chi(G - e) < \chi(G)$ 。记 $\chi(G) = k$ 。对 G 的任意真子图 H , 若 H 是通过删边得到的, 即 $H = G - e$, 则 $\chi(H) < k$; 若 H 是通过删点得到的, 由于 G 无孤立点, 删点后至少有一条边被删除, 可归纳证明 $\chi(H) < k$ 。因此 G 是 k -临界的。

2. 设 G 是 k -临界图, $v \in V(G)$ 。由临界性, $G - v$ 是 $(k - 1)$ -可染的。设 f 是 $G - v$ 的一个正常 $(k - 1)$ -染色, 使用颜色 $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ 。定义 G 的染色 f' 如下: 对 $u \neq v$, 令 $f'(u) = f(u)$; 令 $f'(v) = k$ 。由于 v 与所有邻居颜色不同 (邻居颜色来自 $\{1, \dots, k - 1\}$, v 为颜色 k), 且 $G - v$ 的染色正常, 故 f' 是 G 的正常 k -染色, 满足颜色 k 仅出现在 v 上, 而 $N(v)$ 仅使用颜色 $1, \dots, k - 1$ 。

3. 设 G 是 k -临界图, $e = uv \in E(G)$ 。由 (1) 知 $\chi(G - e) = k - 1$ 。假设存在 $G - e$ 的一个正常 $(k - 1)$ -染色 f 使得 $f(u) \neq f(v)$ 。则 f 也是 G 的正常 $(k - 1)$ -染色, 与 $\chi(G) = k$ 矛盾。故在 $G - e$ 的任何正常 $(k - 1)$ -染色中, u 和 v 必须染相同颜色。

□

 我们先回顾一下 Konig 定理 (theorem 5.3.1): 设 $G = G[X : Y]$ 是一个二部图, 则 $\alpha'(G) = \beta(G)$ 。

结合 Konig 定理, 我们有如下引理:

引理 8.2.4 (Dirac, 1953). 设 G 是一个满足 $\chi(G) > k$ 的图, X 和 Y 是 $V(G)$ 的一个划分。如果 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 都是 k -可染的, 则边割 $[X, Y]$ 至少包含 k 条边。



证明.

设 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 都有正常的 k -染色。令 X_1, X_2, \dots, X_k 是 $G[X]$ 中颜色类形成的划分, 即 $X_i = \{x \in X : f_X(x) = i\}$; 类似地, 令 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 是 $G[Y]$ 中颜色类形成的划分。

注意到, 如果存在某个 i 和 j 使得 X_i 与 Y_j 之间在 G 中没有边相连, 那么 $X_i \cup Y_j$ 是 G 的一个独立集 (因为 X_i 和 Y_j 各自内部无边, 且两者之间也无边)。

现在构造一个二部图 H , 其两个部分分别为 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 和 $W = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, 并在 x_i 和 y_j 之间连边当且仅当在 G 中 X_i 与 Y_j 之间没有边。也就是说, $E(H) = \{x_i y_j : \text{在 } G \text{ 中 } X_i \text{ 与 } Y_j \text{ 之间没有边}\}$ 。

我们分析 H 的边数。在 G 中, 边割 $[X, Y]$ 的每条边连接某个 X_i 中的顶点与某个 Y_j 中的顶点。因此, X_i 与 Y_j 之间有边 (在 G 中) 当且仅当 $[X, Y]$ 中包含至少一条连接 X_i 中某点与 Y_j 中某点的边。注意, H 中缺少一条边 (即某个 X_i 与 Y_j 在 G 中有边) 对应 $[X, Y]$ 中至少有一条边。但不同的 (i, j) 对可能对应 $[X, Y]$ 中的同一条边吗? 不会, 因为一条边唯一确定一个 (i, j) 对 (由染色决定)。因此, $||[X, Y]||$ 等于满足“ X_i 与 Y_j 在 G 中有边”的 (i, j) 对的数目。

设 $||[X, Y]|| = m$ 。那么满足“ X_i 与 Y_j 在 G 中有边”的 (i, j) 对有 m 个。因此, 满足“ X_i 与 Y_j 在 G 中无边”的 (i, j) 对有 $k^2 - m$ 个。这意味着 $|E(H)| = k^2 - m$ 。

现在, 如果 $m < k$, 那么 $|E(H)| = k^2 - m > k^2 - k = k(k - 1)$ 。

我们断言： H 有一个完美匹配。用反证法，假设 H 没有完美匹配。根据 Hall 定理，存在某个 $S \subseteq U$ ，使得 $|N_H(S)| < |S|$ 。那么 H 中与 S 相关联的边最多有 $|S| \cdot |N_H(S)| \leq |S|(|S| - 1)$ 条。而 H 的总边数 $|E(H)| > k(k - 1)$ 。但是，注意到 H 是 k 个顶点的二部图，最大可能边数为 k^2 。我们考虑 H 的边集的一个上界：将 U 划分为 S 和 $U \setminus S$ ， W 划分为 $N_H(S)$ 和 $W \setminus N_H(S)$ 。则 H 的边只可能存在于 S 与 $N_H(S)$ 之间（最多 $|S||N_H(S)| \leq |S|(|S| - 1)$ 条），以及 $U \setminus S$ 与 W 之间（最多 $(k - |S|)k$ 条）。因此：

$$|E(H)| \leq |S|(|S| - 1) + (k - |S|)k = k^2 - k|S| + |S|^2 - |S|.$$

令 $f(|S|) = k^2 - k|S| + |S|^2 - |S|$ 。这是一个关于 $|S|$ 的二次函数，在 $|S| = \frac{k+1}{2}$ 处取得最大值。但我们在 $|S|$ 为整数且 $1 \leq |S| \leq k$ 时考虑其上界。实际上，当 $|S| = k$ 时， $f(k) = k^2 - k^2 + k^2 - k = k(k - 1)$ 。但我们已经假设 $|E(H)| > k(k - 1)$ ，矛盾。因此假设不成立， H 必有完美匹配。

设 $M = \{x_1y_{\sigma(1)}, x_2y_{\sigma(2)}, \dots, x_ky_{\sigma(k)}\}$ 是 H 的一个完美匹配，其中 σ 是 $\{1, \dots, k\}$ 的一个置换。


现在我们可以构造 G 的一个 k -染色如下：对每个 $i = 1, \dots, k$ ，将 X_i 和 $Y_{\sigma(i)}$ 中的顶点都染颜色 i 。我们验证这是一个正常染色：

- ♡ 在 X 内部：因为 X_1, \dots, X_k 是 $G[X]$ 的正常染色的颜色类，所以 X 内部无边连接同颜色顶点。
- ♡ 在 Y 内部：同样， Y_1, \dots, Y_k 是 $G[Y]$ 的正常染色的颜色类，所以 Y 内部无边连接同颜色顶点。
- ♡ 在 X 与 Y 之间：如果有一条边连接 X_i 中某点与 Y_j 中某点，那么由 H 的定义， x_iy_j 不是 H 的边。但 M 是完美匹配，所以 $j \neq \sigma(i)$ 。因此 X_i 染颜色 i ， Y_j 染颜色 $\sigma^{-1}(j) \neq i$ ，故边两端颜色不同。

因此我们得到了 G 的一个正常 k -染色，与 $\chi(G) > k$ 矛盾。

所以最初的假设 $m < k$ 不成立，必有 $||X, Y|| \geq k$ 。 □

 借助引理，我们能证明下面定理：

定理 8.2.5 (Dirac, 1953). 若 G 是 k -临界图，则 G 是 $(k - 1)$ -边连通的，且任意最小边割 $[X, Y]$ 满足 $||X, Y|| \geq k - 1$ 。 

证明.

设 G 是 k -临界图。假设 G 不是 $(k - 1)$ -边连通的，则存在一个边割 $[X, Y]$ 满足 $||X, Y|| \leq k - 2$ 。考虑子图 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 。由于 G 是 k -临界的，有 $\chi(G[X]) \leq k - 1$ 且 $\chi(G[Y]) \leq k - 1$ （因为 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 都是 G 的真子图）。现在应用 lemma 8.2.4：如果 $\chi(G) > k - 1$ 且 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 都是 $(k - 1)$ -可染的，则 $||X, Y|| \geq k - 1$ 。但这里 $\chi(G) = k > k - 1$ ，且 $||X, Y|| \leq k - 2 < k - 1$ ，与 lemma 8.2.4 矛盾。

因此， G 必须是 $(k - 1)$ -边连通的，即任意边割至少包含 $k - 1$ 条边。


进一步，我们证明任意最小边割 $[X, Y]$ 满足 $||X, Y|| \geq k - 1$ 。若存在最小边割 $[X, Y]$ 使得 $||X, Y|| < k - 1$ ，则同样由 lemma 8.2.4（取 $k' = k - 1$ ，注意 $\chi(G) = k > k - 1$ ，且 $G[X]$

和 $G[Y]$ 都是 $(k-1)$ -可染的) 可得 $||X, Y|| \geq k-1$, 矛盾。故任意最小边割至少包含 $k-1$ 条边。

综上, k -临界图是 $(k-1)$ -边连通的, 且最小边割的大小至少为 $k-1$ 。 \square


 下面我们给出细分 (Subdivision) 的定义:

定义 8.2.2 (剖分/细分). 图 G 的一个 **剖分** (或称 **细分**) 是指将 G 的某些边替换为长度至少为 1 的路 (即在这些边上插入若干新顶点) 所得到的图。


更形式化地, 给定图 G , 通过在边 $uv \in E(G)$ 上插入 $k \geq 0$ 个新顶点 w_1, w_2, \dots, w_k , 将边 uv 替换为路 $uw_1w_2 \dots w_kv$, 如此操作 (可能对多条边进行) 后得到的图称为 G 的一个剖分。特别地, K_k 的剖分是指将完全图 K_k 的某些边进行细分后得到的图。 

定义 8.2.3 (Minor). 图 H 是图 G 的一个 **Minor**, 如果 H 可以通过对 G 进行一系列以下操作得到:

1. 删除边;
2. 删除顶点 (及与之关联的边);
3. 收缩边 (即将一条边 uv 收缩, 将顶点 u 和 v 合并为一个新顶点, 并与 u 和 v 的所有邻居相连)。


注意, 收缩边可能产生重边, 但通常我们考虑简单图, 因此可以删除重边。 

 我们给出下面两个猜想:

猜想 8.2.6 (Hajós, 1961). 若图 G 的色数 $\chi(G) \geq k$, 则 G 包含一个 K_k 的剖分 (即 G 包含一个子图是 K_k 的细分)。 

 **注.** Hajós 猜想在不同 k 值下的研究现状总结如下:

1. $k=2$ 时: 猜想成立。 $\chi(G) \geq 2$ 意味着 G 至少包含一条边, 因此包含一条长度 ≥ 1 的路, 这即是 K_2 的细分。
2. $k=3$ 时: 猜想成立。 $\chi(G) \geq 3$ 意味着 G 不是二分图, 因此包含一个奇圈。任何奇圈都是 K_3 的细分 (通过在三角形的三条边上插入若干顶点得到)。
3. $k=4$ 时: 猜想成立。由 Dirac (1952) 和 Hajós 本人证明。证明的关键是考虑 4-临界图, 利用其 3-连通性及精细的染色结构分析, 构造出 K_4 的细分。见 theorem 8.2.8
4. $k=5$ 和 $k=6$ 时: **Open** (未解决问题)。尽管对于某些特殊图类 (如线图、平面图等) 或有额外条件 (如最小度数较大) 时可能有正面结果, 但一般情况下的 Hajós 猜想对于 $k=5$ 和 $k=6$ 是否成立, 至今仍未解决, 是图论中著名的开放问题之一。
5. $k \geq 7$ 时: **False** (猜想不成立)。Catlin (1979) 首先构造出了反例, 表明存在色数为 k ($k \geq 7$) 的图不包含 K_k 的细分。后续工作 (如 Erdős 和 Fajtlowicz, 1981) 进一步表明, 在某种意义上“几乎所有”高色数图都是反例。


 注. 尽管 Hajós 猜想在 $k \geq 7$ 时不成立, 但其研究极大地促进了图染色理论与拓扑图论的联系, 催生了诸如图子式 (Minor) 理论等重要分支的发展. 对于 $k = 5, 6$ 的情形, 寻找答案或构造反例仍然是图论前沿的挑战之一。

猜想 8.2.7 (Hadwiger, 1943). 若图 G 的色数 $\chi(G) \geq k$, 则 G 包含 K_k 作为 Minor (即 K_k 是 G 的 Minor)。



 注. Hadwiger 猜想在不同 k 值下的研究现状总结如下:

1. $k = 1$ 时: 猜想平凡成立。
2. $k = 2$ 时: 猜想成立。 $\chi(G) \geq 2$ 意味着 G 至少包含一条边, 因此包含 K_2 作为 Minor。
3. $k = 3$ 时: 猜想成立。 $\chi(G) \geq 3$ 意味着 G 不是二分图, 因此包含一个奇圈, 从而包含 K_3 作为 Minor。
4. $k = 4$ 时: 猜想成立。此结果由 Wagner (1937) 证明, 并等价于四色定理。事实上, Wagner 证明了图 G 不包含 K_4 作为 Minor 当且仅当 G 是系列平行图, 而系列平行图是可 3-染色的。因此, 若 $\chi(G) \geq 4$, 则 G 必须包含 K_4 作为 Minor。
5. $k = 5$ 时: 猜想成立。此结果等价于四色定理, 由 Robertson, Seymour, and Thomas (1993) 证明。他们证明了任何不包含 K_5 作为 Minor 的图是 4-可染的。因此, 若 $\chi(G) \geq 5$, 则 G 必须包含 K_5 作为 Minor。
6. $k = 6$ 时: **Open** (未解决问题)。这是当前已知最小的未解决情况。Robertson, Seymour, and Thomas (1993) 证明了任何不包含 K_6 作为 Minor 的图是 6-可染的。因此, 目前已知的结果是: 若 $\chi(G) \geq 7$, 则 G 包含 K_6 作为 Minor。但猜想要求的是 $\chi(G) \geq 6$ 时即包含 K_6 Minor, 这尚未被证明或否定。
7. $k \geq 7$ 时: **Open** (未解决问题)。Hadwiger 猜想对于 $k \geq 7$ 的情形仍然是图论中最重要的未解猜想之一。已知的最好一般结果是, 任何不包含 K_t 作为 Minor 的图是 $O(t\sqrt{\log t})$ -可染的, 这一上界由 Kostochka (1984) 和 Thomason (2001) 独立证明得出。具体地, Thomason (2001) 证明了色数的上界约为 $0.265t\sqrt{\log t}(1 + o(1))$ 。这意味着若 $\chi(G) \geq k$, 则 G 包含一个 $K_{\Omega(k/\sqrt{\log k})}$ 作为 Minor, 但离证明其包含 K_k Minor 本身尚有差距。

 注. Hadwiger 猜想是图论中最著名且最重要的未解问题之一, 被视为四色定理的深远推广。与 Hajós 猜想 (已在 $k \geq 7$ 时被证伪) 不同, Hadwiger 猜想目前尚未发现反例, 并且对于 $k \leq 5$ 已被证明成立。其研究极大地推动了图子式理论 (Graph Minor Theory) 的发展, 该理论的顶峰是 Robertson 和 Seymour 证明的 Wagner 猜想 (即任何图子式封闭的图族可由有限个禁止子式刻画)。

定理 8.2.8 (Dirac, 1952). 如果 $\chi(G) = 4$, 则 G 有一个 K_4 细分。



证明.

我们对顶点数 n 进行归纳证明。选取一个 4-临界子图 $H \subseteq G$ (即 $\chi(H) = 4$ 且任意真子图色数小于 4), 只需证明 H 包含 K_4 细分即可。以下在 H 上讨论。

1. **基础情况**: 当 $n = 4$ 时, 若 H 是 4-临界的, 则 H 必须是 K_4 本身 (因为任何 K_4 的真子图色数至多为 3), 而 K_4 自然是自身的细分。
2. **归纳步骤**: 假设对所有顶点数小于 n 的 4-临界图定理成立, 考虑顶点数为 n 的 4-临界图 H 。已知 4-临界图是 3-连通的 (这是 Brooks 定理相关理论中的已知结论), 故 $\delta(H) \geq 3$ 。
3. **情况 1**: 存在顶点 v , 其度数 $d(v) = 3$ 。

设 $N(v) = \{x, y, z\}$ 。由于 H 是 4-临界的, $H - v$ 是 3-可染的。考虑 $H - v$ 的一个正常 3-染色 $f: V(H - v) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 。在 f 下, x, y, z 必须染遍所有 3 种颜色 (否则可将 v 染上缺失的颜色, 得到 H 的 3-染色, 矛盾)。不妨设 $f(x) = 1, f(y) = 2, f(z) = 3$ 。

定义 H_{ij} 为在 $H - v$ 中, 由颜色类 i 和 j 的顶点诱导的子图 ($1 \leq i < j \leq 3$)。考虑 H_{12} , 它包含顶点 x 和 y 。断言: x 和 y 在 H_{12} 的同一个连通分支中。若否, 则可通过交换 y 所在分支的颜色 1 和 2, 得到 $H - v$ 的一个新 3-染色 f' , 其中 $f'(x) = 1, f'(y) = 1$, 从而 v 的邻居只用了两种颜色, 可将 v 染颜色 3, 得到 H 的 3-染色, 矛盾。因此, 存在一条从 x 到 y 的路 P_{xy} , 其顶点在 H_{12} 中 (即交替使用颜色 1 和 2)。类似地, 在 H_{13} 中存在从 x 到 z 的路 P_{xz} (交替颜色 1 和 3), 在 H_{23} 中存在从 y 到 z 的路 P_{yz} (交替颜色 2 和 3)。

现在, 考虑由 v 、路 P_{xy}, P_{xz}, P_{yz} 以及它们之间的连接点 x, y, z 构成的子图。这三条路除了端点外内部顶点不相交 (因为颜色类划分), 且它们与 v 一起形成了一个 K_4 的细分: 将 v 对应 K_4 的一个顶点, 三条边 vx, vy, vz 对应 K_4 中连接该顶点与另外三个顶点的边; 而 P_{xy}, P_{xz}, P_{yz} 分别对应 K_4 中另外三个顶点之间的三条边 (可能被细分)。因此, H 包含 K_4 细分。

4. **情况 2**: 所有顶点度数至少为 4, 即 $\delta(H) \geq 4$ 。

假设 H 不包含 K_4 细分。我们将导出矛盾。

- (a) 由于 H 是 3-连通的, 根据 Menger 定理, 对于任意两个顶点 u 和 w , 存在三条内部不相交的 $u-w$ 路。
- (b) 选取一条边 $e = uv \in E(H)$ 。由于 H 是 4-临界的, $H - e$ 是 3-可染的。设 g 是 $H - e$ 的一个正常 3-染色。在 g 下, u 和 v 必须染相同颜色 (否则 g 就是 H 的 3-染色), 不妨设 $g(u) = g(v) = 1$ 。
- (c) 考虑颜色类 2 和 3 的顶点诱导的子图 $H[\{2, 3\}]$ 。断言: u 和 v 在 $H[\{2, 3\}]$ 的同一个连通分支中。若否, 则可交换 v 所在分支的颜色 2 和 3, 得到一个新的 3-染色 g' , 使得 $g'(u) = 1$, 但 $g'(v) \in \{2, 3\}$ 且 $g'(v) \neq g'(u)$, 同时保持 u 和 v 的邻居颜色不同 (因为交换只在 v 的分支进行), 那么 g' 就是 H 的 3-染色, 矛盾。
- (d) 因此, 存在一条从 u 到 v 的路 P , 其内部顶点颜色为 2 或 3。路 P 与边 e 构成一个圈 C 。
- (e) 现在, 由于 $\delta(H) \geq 4$, 存在顶点 $w \in V(H) \setminus \{u, v\}$ 与 u 相邻 (因为 $d(u) \geq 4$, 而 u 在圈 C 上只有两个邻居)。考虑 w 的颜色 $g(w)$ 。
- (f) 如果 $g(w) = 1$, 那么 w 与 u 颜色相同, 但 $uw \in E(H)$, 这与 g 是 $H - e$ 的正常染色矛盾 (因为 $e = uv$, uw 是另一条边, 需要颜色不同)。

(g) 如果 $g(w) = 2$ (或 3), 考虑 w 与圈 C 上顶点的连接。由于 H 是 3-连通的, 存在从 w 到 C 上除 u 外某点 t ($t \neq u$) 的三条内部不相交路。通过分析这些路与颜色类的关系, 并利用 P 的性质, 可以构造出一个 K_4 细分 (详细构造略, 但核心是利用 w 、 u 、 v 以及 t 和连接路), 与假设矛盾。

因此, 情况 2 的假设“ H 不包含 K_4 细分”不成立。

5. 综上, 在所有情况下, 顶点数为 n 的 4-临界图 H 都包含 K_4 细分。由归纳法, 定理得证。

□

 在做作业时, 用到了下面这个 *theorem 8.2.9*:

定理 8.2.9 (Lovász 分解定理). 设 G 是一个最大度为 $\Delta(G)$ 的图。令 d_1, d_2, \dots, d_k 为非负整数, 且满足以下条件:

$$\sum_{i=1}^k (d_i + 1) \geq \Delta(G) + 1 \quad (8.1)$$

则存在顶点集 $V(G)$ 的一个划分 $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, 使得对于任意 $i \in \{1, \dots, k\}$, 导出子图 $G[V_i]$ 的最大度满足 $\Delta(G[V_i]) \leq d_i$ 。



证明. 我们采用构造性证明, 利用 **势能函数** (Potential Function) 来证明满足条件的划分必然存在。设 $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ 是顶点集 $V(G)$ 的任意一个划分。我们定义一个势能函数 $\Phi(\mathcal{P})$, 其值为各部分内部边数的加权和。具体而言, 令 $E(G[V_i])$ 表示两 endpoint 均在 V_i 内的边集, 定义:

$$\Phi(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \frac{|E(G[V_i])|}{d_i} \quad (8.2)$$

 **注.** 若存在 $d_i = 0$, 则对应项的权重可视为无穷大, 即严格禁止该部分内部存在边。

如果在当前划分中, 某顶点 $v \in V_i$ 在其所在集合内部的度数超过了允许值, 即 $d_{V_i}(v) > d_i$, 我们称该顶点为 **不满意** (Unsatisfied) 的顶点。我们的目标是证明: 只要存在不满意的顶点, 就可以通过将其移动到另一个集合来严格降低势能函数 Φ 的值。

假设 $v \in V_i$ 是一个不满意的顶点。首先, 我们需要确信存在某个 $j \neq i$, 使得 v 移入 V_j 后满足局部的度数限制。我们通过反证法说明这一点。假设对于所有的 $j \in \{1, \dots, k\}$, v 在 V_j 中的度数 (若移入或保留) 都会超标, 即 $d_{V_j}(v) \geq d_j + 1$ 。将这些不等式相加, 得到 v 的总度数:

$$d_G(v) = \sum_{j=1}^k d_{V_j}(v) \geq \sum_{j=1}^k (d_j + 1)$$

根据定理的假设条件 $\sum_{j=1}^k (d_j + 1) \geq \Delta(G) + 1$, 这推导出 $d_G(v) \geq \Delta(G) + 1$, 这与 G 的最大度定义相矛盾。因此, 必然存在至少一个集合 V_j , 使得 $d_{V_j}(v) \leq d_j$ 。

现在, 我们执行调整操作: 将不满意顶点 v 从 V_i 移动到 V_j 。设新划分为 \mathcal{P}' 。考察势能函数的变化量 $\Delta\Phi = \Phi(\mathcal{P}') - \Phi(\mathcal{P})$ 。当 v 离开 V_i 时, V_i 内部减少了 $d_{V_i}(v)$ 条边; 当 v 进入

V_j 时, V_j 内部增加了 $d_{V_j}(v)$ 条边。变化量为:

$$\Delta\Phi = \frac{d_{V_j}(v)}{d_j} - \frac{d_{V_i}(v)}{d_i}$$

根据我们的移动策略, 已知 $d_{V_j}(v) \leq d_j$ (故第一项 ≤ 1), 且由于 v 在原集合 V_i 中不满意, 即 $d_{V_i}(v) \geq d_i + 1$ (故第二项 > 1)。因此:

$$\Delta\Phi \leq 1 - \frac{d_i + 1}{d_i} = 1 - \left(1 + \frac{1}{d_i}\right) = -\frac{1}{d_i} < 0$$

这表明, 将不满意顶点移动到合适的集合中会严格降低势能函数。由于图的顶点数和边数是有限的, 势能函数的取值也是有限且离散的, 因此该下降过程不可能无限进行下去。最终必然会停止在一个局部极小值状态, 此时不存在任何不满意的顶点。该终止状态对应的划分即满足 $\Delta(G[V_i]) \leq d_i$ 对所有 i 成立, 定理得证。□

 接下来我们看一个利用 *theorem 8.2.9* 来证明的例子 (作业题):

问题 8.2.1. 若 G 是不含三角形的图 (即 $K_3 \not\subseteq G$), 则其色数满足:

$$\chi(G) \leq 3 \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1}{4} \right\rceil$$

证明. 令 $\Delta = \Delta(G)$ 。定义整数 k 为目标划分的数量:

$$k = \left\lceil \frac{\Delta + 1}{4} \right\rceil$$

我们的策略是将 G 的顶点划分为 k 个部分, 使得每个部分的导出子图最大度较小。我们统一设定每个部分的度数上界为 $d_1 = d_2 = \dots = d_k = 3$ 。首先验证这些参数是否满足 *Lovász 分解定理* (theorem 8.2.9) 的条件。计算各部分容量之和:

$$\sum_{i=1}^k (d_i + 1) = \sum_{i=1}^k 4 = 4k = 4 \left\lceil \frac{\Delta + 1}{4} \right\rceil$$

根据向上取整函数的性质 $4\lceil x/4 \rceil \geq x$, 可知:

$$4 \left\lceil \frac{\Delta + 1}{4} \right\rceil \geq \Delta + 1$$

条件满足。故存在顶点集 $V(G)$ 的一个划分 V_1, \dots, V_k , 使得对于任意 i , 导出子图 $G_i = G[V_i]$ 满足 $\Delta(G_i) \leq 3$ 。

接下来确定每个子图 G_i 的色数。我们引用 *Brooks 定理* (theorem 8.1.3), 该定理指出: 对于连通图 H , 有 $\chi(H) \leq \Delta(H)$, 除非 H 是完全图 $K_{\Delta(H)+1}$ 或奇圈。考察 G_i 的任意连通分量:

1. 因为原图 G 不含三角形, 所以子图 G_i 也不含三角形。
2. G_i 的最大度不超过 3。

若 $\Delta(G_i) \leq 2$, 显然 $\chi(G_i) \leq 3$ (即使是奇圈也是 3-可染的)。若 $\Delta(G_i) = 3$, 根据 Brooks 定理, $\chi(G_i) \leq 3$ 除非 G_i 包含 K_4 (即 K_{3+1})。然而, 由于 G 是无三角形图, 它绝对不可能包含 K_4 作为子图。因此, Brooks 定理的例外情况被排除。

由此可得, 每个导出子图都是 3-可染的:

$$\chi(G[V_i]) \leq 3, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

由于集合 V_1, \dots, V_k 互不相交, 我们可以对每个部分 V_i 使用一组独立的 3 种颜色进行染色。整张图 G 所需的总颜色数为各部分色数之和:



$$\chi(G) \leq \sum_{i=1}^k \chi(G[V_i]) \leq \sum_{i=1}^k 3 = 3k = 3 \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1}{4} \right\rceil$$


证明完毕。 □

8.3 色多项式

定义 8.3.1. 令 $\Pi_k(G)$ 表示 G 的不同的正常 k -染色的数量, 则

$$\Pi_k(G) > 0 \iff G \text{ 是 } k\text{-可染的}$$


 **注.** $\Pi_k(\overline{K_n}) = k^n, \Pi_k(K_n) = k(k-1) \cdots (k-n+1), k \geq n$ 

命题 8.3.1. T 是 n 个点的树, 则 $\Pi_k(T) = k(k-1)^{n-1}$ 

证明. 我们取 T 的一个顶点 v_0 , 定义 $L_p = \{v \in V(T) : \text{dist}(v_0, v) = p\}$, 则 $L_0 = \{v_0\}$ 有 k 种染色方案, L_1 中的每个点染色有 $k-1$ 种方案, L_2 中的每个点染色也有 $k-1$ 种方案, 以此类推, 总的染色方案有:

$$k \cdot (k-1)^{|L_1|} \cdot (k-1)^{|L_2|} \cdots = k(k-1)^{n-1}$$

□

定理 8.3.2. 如果 G 是简单图, 则 $\Pi_k(G) = \Pi_k(G \setminus e) - \Pi_k(G/e)$ 

证明. 设 $e = uv$ 是图 G 中的任意一条边。考虑图 $G \setminus e$ (删除边 e 后的图) 的所有正常 k -着色, 这些着色可以分为两类:

第一类: 在 $G \setminus e$ 中, 顶点 u 和 v 被染成不同颜色。这些着色同时也是原图 G 的正常 k -着色, 因为在 G 中边 e 连接的两个顶点颜色不同, 满足正常着色条件。

第二类: 在 $G \setminus e$ 中, 顶点 u 和 v 被染成相同颜色。这些着色不是原图 G 的正常 k -着色, 因为在 G 中边 e 连接的两个同色顶点违反了正常着色条件。

现在观察第二类着色: 当 u 和 v 同色时, 这些着色恰好对应于图 G/e (收缩边 e 后的图) 的正常 k -着色。因为收缩操作将 u 和 v 合并为一个顶点, 同色条件自然满足。

因此, 我们有:

$$\heartsuit \Pi_k(G \setminus e) = (u \text{ 和 } v \text{ 不同色的着色数}) + (u \text{ 和 } v \text{ 同色的着色数})$$

$$\heartsuit \Pi_k(G) = u \text{ 和 } v \text{ 不同色的着色数}$$

$$\heartsuit \Pi_k(G/e) = u \text{ 和 } v \text{ 同色的着色数}$$

由此可得:

$$\Pi_k(G \setminus e) = \Pi_k(G) + \Pi_k(G/e) \Rightarrow \Pi_k(G) = \Pi_k(G \setminus e) - \Pi_k(G/e)$$

 注. 这个关系式被称为色多项式的删除-收缩递推关系, 它是计算图色多项式的基本工具。

□

 我们下面来定义色多项式: $P_G(x) = \Pi_x(G)$, x 是一个变量.

定义 8.3.2 (色多项式). 设 G 是一个图, k 是一个正整数. 用 $P(G, k)$ 表示图 G 的正常 k -着色的数量, 即使用最多 k 种颜色对图 G 的顶点进行着色, 使得任意两个相邻顶点颜色不同的着色方案数. 则函数 $P(G, k)$ 称为图 G 的色多项式.



定理 8.3.3. 令 G 是 n 个顶点的图, m 条边, c 个分支, 则:

$$P_G(x) = \sum_{i=0}^{n-c} (-1)^i a_i x^{n-i} = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-c} (-1)^i a_i x^{n-i} \quad (8.3)$$

其中 $a_0 = 1$, $a_1 = m$, $a_i \in \mathbb{Z}^*$ ($2 \leq i \leq n-c$).



证明. 对 $m+n$ 进行归纳:

1. 当 $m+n=1$ 时: $n=1, m=0$, 此时图 G 是一个孤立顶点, 色多项式为 $P_G(x) = x$, 满足定理形式: $a_0 = 1$, $n-c = 1-1=0$, 求和只有 $i=0$ 一项.
2. 当 $m+n=2$ 时:
 - ♡ 若 $n=2, m=0$: 图 G 是两个孤立顶点, $P_G(x) = x^2$, $n-c = 2-2=0$, 满足定理.
 - ♡ 若 $n=1, m=1$: 不可能, 因为一个顶点不能有边.
3. 归纳假设: 假设对 $m+n \leq k$ 的所有图结论成立.
4. 考虑 $m+n = k+1$ 的图 G , 任取 G 的一条边 e . 由 theorem 8.3.2 我们可知:

$$P_G(x) = P_{G \setminus e}(x) - P_{G/e}(x)$$

设 $G \setminus e$ 有 n 个顶点, $m-1$ 条边, c_1 个分支; G/e 有 $n-1$ 个顶点, m' 条边, c_2 个分支.

由归纳假设:

$$P_{G \setminus e}(x) = \sum_{i=0}^{n-c_1} (-1)^i b_i x^{n-i}, \quad b_0 = 1, b_1 = m-1$$

$$P_{G/e}(x) = \sum_{j=0}^{(n-1)-c_2} (-1)^j c_j x^{(n-1)-j}, \quad c_0 = 1, c_1 = m'$$

注意 $n-c_1$ 和 $(n-1)-c_2$ 的关系: 删除边 e 可能增加分支数, 收缩边 e 可能减少顶点数但保持连通性.

将两式相减:

$$P_G(x) = \left[x^n - (m-1)x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-c_1} (-1)^i b_i x^{n-i} \right] - \left[x^{n-1} - m'x^{n-2} + \sum_{j=2}^{(n-1)-c_2} (-1)^j c_j x^{n-1-j} \right]$$

合并同类项:

$$\begin{aligned} P_G(x) &= x^n - (m-1)x^{n-1} - x^{n-1} + \dots \\ &= x^n - mx^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

即得到 $a_0 = 1$, $a_1 = m$ 。高次项系数由 b_i 和 c_j 的整系数线性组合得到, 因此也是整数。

关于求和上限 $n-c$: 由于 G 的色多项式次数等于顶点数 n , 非零系数从 x^n 到 x^c (每个分支至少需要一种颜色), 所以共有 $n-c+1$ 项, 即 i 从 0 到 $n-c$ 。

由数学归纳法, 定理得证。 □

命题 8.3.4. $a_2 = \binom{m}{2} - t$, 其中 t 是 G 中三角形 (K_3 子图) 的个数。



证明. 对边数 m 进行归纳证明。

1. 基础情况:

当 $m=0$ 时, $P_G(x) = x^n$, 所以 $a_2 = 0$ 。而 $\binom{0}{2} - t = 0 - 0 = 0$, 成立。

当 $m=1$ 时, $P_G(x) = x^n - x^{n-1}$, 所以 $a_2 = 0$ 。而 $\binom{1}{2} - t = 0 - 0 = 0$, 成立。

2. 归纳假设: 假设对所有边数小于 m 的图结论成立。

3. 归纳步骤: 考虑边数为 $m \geq 2$ 的图 G , 任取边 $e = uv$ 。

由色多项式的删除-收缩递推关系:

$$P_G(x) = P_{G \setminus e}(x) - P_{G/e}(x)$$

设:

$$\begin{aligned} P_{G \setminus e}(x) &= x^n - (m-1)x^{n-1} + b_2 x^{n-2} - b_3 x^{n-3} + \dots \\ P_{G/e}(x) &= x^{n-1} - m'x^{n-2} + c_2 x^{n-3} - \dots \end{aligned}$$

其中 m' 是 G/e 的边数。由归纳假设:

$$b_2 = \binom{m-1}{2} - t_1, \quad c_2 = \binom{m'}{2} - t_2$$

这里 t_1 是 $G \setminus e$ 中三角形个数, t_2 是 G/e 中三角形个数。

现在计算 $P_G(x)$ 中 x^{n-2} 的系数:

$$a_2 = b_2 - (-m') = b_2 + m'$$

设 d 为 u 和 v 的公共邻居个数 (即与 u 和 v 都相邻的顶点数)。则:

♡ G/e 的边数 $m' = m - 1 - d$ (原图 m 条边, 去掉 e 少 1 条, 每个公共邻居在收缩后产生重边合并, 又少 d 条)

♡ G 中三角形个数 $t = t_1 + d$ (t_1 是不含边 e 的三角形数, d 是包含边 e 的三角形数)

代入计算:

$$\begin{aligned} a_2 &= b_2 + m' \\ &= \left[\binom{m-1}{2} - t_1 \right] + (m-1-d) \\ &= \binom{m-1}{2} + m-1-t_1-d \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} + m-1-(t_1+d) \\ &= \frac{m^2-3m+2+2m-2}{2} - t \\ &= \frac{m^2-m}{2} - t \\ &= \binom{m}{2} - t \end{aligned}$$

由数学归纳法, 对任意图 G , 命题成立。 □

问题 8.3.1. 证明: $x^4 - 3x^3 + 3x^2$ 不是色多项式。

证明. 设 $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2$. 我们验证色多项式的必要条件。

首先, 提取公因式:

$$P(x) = x^2(x^2 - 3x + 3)$$

常数项为 0, 说明 $P(0) = 0$. 对于色多项式, $x = 0$ 是 c 重根, 其中 c 是图的连通分支数。因此 $c = 2$ 。

设图 G 有 $n = 4$ 个顶点, $c = 2$ 个连通分支, m 条边。由色多项式的性质, x^{n-1} 的系数为 $-m$, 即:

$$-3 = -m \Rightarrow m = 3$$

由 proposition 8.3.4: 这里 $a_2 = 3$, $m = 3$, 所以:

$$3 = \binom{3}{2} - t = 3 - t \Rightarrow t = 0$$

所以说我们需要构造一个 4 顶点、3 条边、2 个分支、0 个三角形的图。

可能的顶点划分:

1. (1,3) 划分: 一个孤立点 K_1 , 一个 3 顶点图有 3 条边。但 3 顶点 3 条边只能是三角形 K_3 , $t = 1$, 矛盾。
2. (2,2) 划分: 每个分支 2 顶点。但 2 顶点最多 1 条边, 总边数最多 2, 不可能达到 3 条边。

因此不存在满足条件的图, $P(x)$ 不可能是任何图的色多项式。 □

问题 8.3.2. 若 G 的围长 (最短圈的长度) 为 5, 且无更长奇圈, 证明: $\chi(G) \leq 4$ 。



9. 平面图



定义 9.0.1 (平面图). 一个图 $G = (V, E)$ 如果可以画在平面上使得任意两条边仅在它们的公共端点处相交 (如果存在的话), 则称 G 是**可嵌入平面的**或简称为**平面图**。这样的画法称为 G 的一个**平面嵌入**。平面嵌入将平面分割成若干连通的区域, 这些区域称为**面**, 其中恰有一个无界的面称为**外部面**。



定义 9.0.2 (曲面嵌入). 设 S 是一个曲面 (例如球面、环面、克莱因瓶等)。图 $G = (V, E)$ 如果可以画在曲面 S 上使得任意两条边仅在它们的公共端点处相交, 则称 G 是**可嵌入曲面 S 的**。这样的画法称为 G 在曲面 S 上的一个**嵌入**。更形式化地, G 在 S 上的嵌入是一个连续映射 $f: G \rightarrow S$, 满足:

1. 对每个顶点 $v \in V$, $f(v)$ 是 S 中的一个点;
2. 对每条边 $e = uv \in E$, $f(e)$ 是 S 中连接 $f(u)$ 与 $f(v)$ 的一条简单弧;
3. 对任意两条不同的边 $e_1, e_2 \in E$, $f(e_1)$ 与 $f(e_2)$ 仅在可能公共端点处相交。

嵌入 f 将曲面 S 分割成若干连通的区域, 称为**面**。所有面的集合记作 F 。嵌入 f 对应的**胞腔分解**是指将 S 表示为顶点、边和面的不相交并: $S = f(V) \cup \bigcup_{e \in E} f(e) \cup \bigcup_{\text{面} \varphi \in F} \varphi$ 。



 注. $\heartsuit \forall S$, 存在图不可嵌入曲面 S

\heartsuit 任意图可嵌入 3 维空间 \mathbb{R}^3

\heartsuit 平面嵌入等价于可嵌入球面

定义 9.0.3 (面的度). 设 G 是一个已嵌入曲面 (或平面) 的图, f 是 G 的一个面。面 f 的度, 记作 $\deg(f)$, 是指与面 f 关联的边的数量, 其中一条边如果被两个面共享则被计算两次。更形式化地, 在嵌入的胞腔分解中, 面 f 的边界由若干条边构成, 沿着边界行走时每条边按经过的次数计数。



定义 9.0.4 (对偶图). 设 $G = (V, E)$ 是一个已嵌入曲面 (或平面) 的图, 其面集为 F 。 G 的对偶图, 记作 $G^* = (V^*, E^*)$, 是一个定义如下的图:

1. 对 G 的每个面 $f \in F$, 在 G^* 中对应一个顶点 $v_f^* \in V^*$;
2. 对 G 的每条边 $e \in E$, 如果 e 分隔两个不同的面 f_1 和 f_2 , 则在 G^* 中对应一条连接 $v_{f_1}^*$ 与 $v_{f_2}^*$ 的边 $e^* \in E^*$; 如果 e 属于同一个面的边界 (即 e 是桥), 则在 G^* 中对应一条自环。

对偶图 G^* 自然地嵌入在同一个曲面 (或平面) 上: 在每个面 f 内放置顶点 v_f^* , 每条边 e^* 穿过对应的原边 e 一次。若 G 是连通平面图, 则 $(G^*)^*$ 同构于 G 。

我们有:

$$|V(G^*)| = |F(G)|, \quad |E(G^*)| = |E(G)|, \quad d_{G^*}(f^*) = \deg(f) \quad \forall f \in F(G)$$



 注. \heartsuit 对于平面图, 面的度等于其边界上的边数, 其中割边被计算两次。

不难发现, 我们有:

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2m$$

\heartsuit 对偶图保持面的相邻关系: 原图中两个面相邻当且仅当在对偶图中对应的顶点相邻。

\heartsuit 对偶图的概念在图的着色、平面性检验以及组合几何中都有重要应用。

性质 9.0.1 (平面图相关性质).

1. G 是平面图, G^* 也是平面图
2. e 是 G 的环 $\iff e^*$ 是 G^* 的割边
3. 重边 \iff 两个面的公共边界的边 ≥ 2
4. G 是平面图 $(G^*)^* \cong G \iff G$ 是连通的



证明.

1. 由于 G 是平面图, 存在平面嵌入。根据对偶图的构造, G^* 的顶点放置在 G 的每个面内, G^* 的每条边穿过 G 的一条对应边且仅在穿过处相交, 因此 G^* 可自然地嵌入同一平面, 故 G^* 也是平面图。

2. (\Rightarrow) 设 e 是 G 的环。在平面嵌入中, 环 e 属于某个面 f 的边界, 且 e 不连接两个不同面。根据对偶图定义, e 对应的边 e^* 是 G^* 中从 v_f^* 到自身的一条边, 即 e^* 是环。但注意: 若 e 是环, 则 e 在边界上行走时被计两次, 实际上 e 对应 G^* 中的一条割边。更准确地说, 因为环 e 将其所在的面 f 分成两个区域, 在对偶图中对应两个顶点, 连接这两个顶点的边 e^* 是 G^* 的割边。

(\Leftarrow) 设 e^* 是 G^* 的割边。则 e^* 连接对偶图的两个不同顶点 $v_{f_1}^*$ 和 $v_{f_2}^*$, 且删除 e^* 使 G^* 不连通。由对偶性, e 是 G 中分隔面 f_1 和 f_2 的边。若 e 不是环, 则 e 是 G 的割边 (因为删除 e 会使 G 的嵌入中面 f_1 和 f_2 合并, 相当于在对偶图中合并两个顶点, 这与 e^* 是割边一致)。但 G 的割边对应 G^* 的环, 矛盾。因此 e 必须是环。

3. (\Rightarrow) 若 G 有重边 e_1 和 e_2 连接相同顶点 u 和 v , 则在平面嵌入中, e_1 和 e_2 构成一个二边形区域, 该区域是两个面的公共边界, 且这两个面至少有 e_1 和 e_2 两条公共边。

(\Leftarrow) 若两个面 f_1 和 f_2 有至少 2 条公共边界边, 则这些边在 G 中连接相同的两个顶点 (因为每个面的边界是闭曲线), 因此 G 有重边。

4. (\Rightarrow) 若 G 连通, 则 G 的平面嵌入中每个面是单连通的。构造 G^* 后, 再构造 $(G^*)^*$: $(G^*)^*$ 的顶点对应 G^* 的面, 而 G^* 的面一一对应 G 的顶点 (因为 G 连通), 且边对应关系也反转回来, 故 $(G^*)^* \cong G$ 。

(\Leftarrow) 若 G 不连通, 设 G 有 $k \geq 2$ 个连通分支。则 G 的平面嵌入中, 外部面被多个连通分支包围。对偶图 G^* 中, 外部面对应的顶点与多个内部面顶点相邻, 但 $(G^*)^*$ 中这些关系不能复原 G 的不连通结构, 故 $(G^*)^* \not\cong G$ 。

□

定理 9.0.1 (欧拉公式). 若 G 是连通的平面图 (已嵌入平面), 记 $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, f 为面数 (包括外部面), 则

$$n - m + f = 2.$$



证明. 对边数 m 进行归纳。

当 $m = 0$ 时, G 是一个孤立顶点, $n = 1$, $f = 1$ (只有一个外部面), $1 - 0 + 1 = 2$, 成立。

假设对所有边数小于 m 的连通平面图公式成立。考虑边数为 m 的连通平面图 G 。


若 G 有环, 则删除该环, 面数减少 1 (环将所在面分成两个), 边数减少 1, 顶点数不变, 由归纳假设成立。

若 G 有割边 e , 则删除 e 后 G 分为两个连通分支 G_1 和 G_2 , 设 n_i, m_i, f_i 分别为 G_i 的顶点数、边数、面数。注意删除割边后面数不变 (两个面合并为一个)。由归纳假设 $n_i - m_i + f_i = 2$, 且 $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2 + 1$, $f = f_1 + f_2 - 1$ (合并外部面)。计算:


$$n - m + f = (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2 + 1) + (f_1 + f_2 - 1) = (n_1 - m_1 + f_1) + (n_2 - m_2 + f_2) - 2 = 2 + 2 - 2 = 2.$$

若 G 无环且无割边, 则存在一个面边界至少两条边, 删除该面的一条边界边 e (非割边), $G-e$ 仍连通, 且边数减少 1, 面数减少 1, 顶点数不变。由归纳假设 $(n-(m-1)+(f-1))=2$, 即 $n-m+f=2$ 。

综上, 欧拉公式成立。 □

推论 9.0.2. 连通平面图的所有平面嵌入的面数是相同的。 


证明. 对于同一个图 G , 不同嵌入的顶点数 n 和边数 m 不变, 由欧拉公式 $f=2-n+m$ 是常数, 故面数相同。 □

推论 9.0.3. 设 G 是简单平面图, $n \geq 3$, 则 $m \leq 3n-6$ 。 

证明. 由于 G 是简单图且 $n \geq 3$, 每个面至少由 3 条边围成 (无重边和环)。计算所有面的度之和: $\sum_f \deg(f) = 2m$ (每条边恰属于两个面的边界或被计算两次)。因为每个面 $\deg(f) \geq 3$, 所以 $2m \geq 3f$, 即 $f \leq \frac{2m}{3}$ 。代入欧拉公式 $n-m+f=2$:

$$n-m+\frac{2m}{3} \geq 2 \Rightarrow 3n-3m+2m \geq 6 \Rightarrow m \leq 3n-6.$$


□

推论 9.0.4. 设 G 是二部平面图 (无环), 则 $m \leq 2n-4$ 。 

证明. 二部图的每个圈是偶圈, 因此若 G 是平面二部图, 则每个面至少由 4 条边围成 (无三角形面)。故 $\sum_f \deg(f) = 2m \geq 4f$, 即 $f \leq \frac{m}{2}$ 。代入欧拉公式:

$$n-m+\frac{m}{2} \geq 2 \Rightarrow 2n-2m+m \geq 4 \Rightarrow m \leq 2n-4.$$

□


推论 9.0.5. K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图。 

证明.


对于 K_5 : $n=5, m=10$ 。若 K_5 是平面图, 则由推论应有 $m \leq 3n-6=9$, 但 $10 > 9$, 矛盾。

对于 $K_{3,3}$: $n=6, m=9$ 。 $K_{3,3}$ 是二部图, 若它是平面图, 则由二部平面图推论应有 $m \leq 2n-4=8$, 但 $9 > 8$, 矛盾。

因此两者都是非平面图。 □

推论 9.0.6. 设 G 是简单平面图, 则最小度 $\delta(G) \leq 5$ 。 

证明. 反证法。假设 $\delta(G) \geq 6$, 则 $2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6n$, 即 $m \geq 3n$ 。但由推论, $m \leq 3n-6$, 两式结合得 $3n \leq 3n-6$, 矛盾。因此 $\delta(G) \leq 5$ 。 □

定义 9.0.5 (极大平面图). 设 G 是一个平面图。如果 G 中任意加入一条新边 (连接两个不相邻的顶点) 都会使 G 变成非平面图, 则称 G 是极大平面图。等价地, G 是极大平面图当且仅当 G 是平面图且 G 的每个面都是三角形 (即每个面的度均为 3)。极大 

平面图也称为三角剖分图。



定理 9.0.7. 设 G 是简单平面图, $n = |V(G)| \geq 3$. 则下列条件等价:

1. $|E(G)| = 3n - 6$;
2. G 是三角剖分的 (即每个面都是三角形);
3. G 是极大平面图.



证明.

(1) \Rightarrow (2): 假设 $|E(G)| = 3n - 6$. 由欧拉公式 $n - m + f = 2$, 代入 $m = 3n - 6$ 得 $f = 2 - n + (3n - 6) = 2n - 4$. 计算所有面的度之和: $\sum_f \deg(f) = 2m = 6n - 12$. 由于每个面至少由 3 条边围成 (G 是简单图), 故 $\deg(f) \geq 3$, 于是

$$\sum_f \deg(f) \geq 3f = 3(2n - 4) = 6n - 12.$$

但等号必须成立, 因此每个面恰好有 $\deg(f) = 3$, 即每个面都是三角形.

(2) \Rightarrow (3): 若 G 的每个面都是三角形, 则 G 是平面图且不能再添加任何边而不破坏平面性. 因为若添加一条新边 uv , 则 u 和 v 必位于某个三角形面内, 添加 uv 后该面被分割, 导致边交叉或产生非平面子图. 故 G 是极大平面图.

(3) \Rightarrow (1): 若 G 是极大平面图, 则 G 的每个面都是三角形 (否则可在某个非三角形面内添加对角线而不破坏平面性). 设 G 有 f 个面, 则 $\sum_f \deg(f) = 3f$. 又 $\sum_f \deg(f) = 2m$, 故 $3f = 2m$, 即 $f = \frac{2m}{3}$. 代入欧拉公式 $n - m + f = 2$:

$$n - m + \frac{2m}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3n - 3m + 2m = 6 \quad \Rightarrow \quad m = 3n - 6.$$

□

推论 9.0.8. 设 G 是简单平面图, $n \geq 4$, 则 G 至少有 4 个顶点的度不大于 5。



下面我们给出平面图的刻画:

定理 9.0.9 (Kuratowski, 1930). 一个图是平面图当且仅当它不包含同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图. 这里“同胚”是指可以通过一系列边细分 (在边上插入新顶点) 操作得到的图。



定理 9.0.10 (Wagner, 1937). 一个图是平面图当且仅当它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 作为子式. 这里“子式”是指通过反复删除顶点、删除边或边收缩操作可以得到的图。



问题 9.0.1. Petersen 图不是平面图。



在证明前, 我们先给出一个引理:

引理 9.0.11. 若 G 是连通平面图且有围长 $g \geq 3$, 则 $|E(G)| \leq \frac{g(|V(G)|-2)}{g-2}$.



证明. 由于 G 的围长是 g , 故 $\forall f_k \in \mathcal{F}$ 有 $d_G(f_k) \geq g$

而 $2m = 2|E(G)| = \sum_{f_k \in \mathcal{F}} d_G(f_k) \geq gf$

由 Euler 公式: $n - m + f = 2 \Rightarrow f = 2 - n + m$ 我们可得:

$$2m \geq g(2 - n + m) \Rightarrow |E(G)| = m \leq \frac{g(n-2)}{g-2} = \frac{g(|V(G)|-2)}{g-2}$$

□


 我们回到问题的证明:

证明. Petersen 图的围长 $g = 5$, $n = 10$, $m = 15$, 而:

$$\frac{g(n-2)}{g-2} = \frac{40}{3} < 15 = m$$

与 $|E(G)| \leq \frac{g(|V(G)|-2)}{g-2}$ 矛盾, 故 Petersen 图不是平面图. □


 下面我们来介绍平面图的着色:

定理 9.0.12. 每个平面图都是 6-顶点可着色的. 

证明. 对顶点数 n 进行归纳.

当 $n \leq 6$ 时显然成立.

假设对所有顶点数小于 n 的平面图结论成立. 考虑 n 个顶点的平面图 G . 由 corollary 9.0.6, G 中存在一个顶点 v 满足 $\deg(v) \leq 5$ (因为 $\delta(G) \leq 5$). 令 $G' = G - v$, 由归纳假设, G' 可用 6 种颜色正常着色. 由于 v 在 G 中至多与 5 个顶点相邻, 这 5 个顶点在 G' 的着色中至多用 5 种颜色, 因此至少剩余 1 种颜色可分配给 v , 使 G 成为 6-着色. 由归纳法, 定理得证. □

定理 9.0.13 (Heawood, 1890). 每个平面图是 5-顶点着色的. 

Proof. 对顶点数 n 进行归纳.

当 $n \leq 5$ 时显然成立.

假设对所有顶点数小于 n 的平面图结论成立. 考虑 n 个顶点的平面图 G .

由平面图性质, 存在顶点 v 满足 $\deg(v) \leq 5$. 分两种情况:

情况 1: $\deg(v) \leq 4$. 令 $G' = G - v$, 由归纳假设 G' 可 5-着色. 由于 v 至多与 4 个顶点相邻, 这 4 个顶点至多用 4 种颜色, 至少有一种颜色可用于 v .

情况 2: $\deg(v) = 5$. 设 v 的邻点为 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , 按在平面嵌入中绕 v 的循环顺序排列. 考虑 $G' = G - v$, 由归纳假设 G' 可 5-着色.

若 v_1, \dots, v_5 中用了不超过 4 种颜色, 则 v 可着第 5 种颜色.

否则, v_1, \dots, v_5 恰好用了 5 种颜色. 不妨设 v_i 着颜色 i ($i = 1, \dots, 5$).

考虑由颜色 1 和 3 的顶点在 G' 中诱导的子图 H_{13} . 若 v_1 和 v_3 属于 H_{13} 的不同连通分支, 则在 v_1 所在分支交换颜色 1 和 3, 这样 v_1 变为颜色 3, 而 v_3 仍为颜色 3 (但不在同一分支, 无冲突). 此时 v_1 和 v_3 都着颜色 3, v 的邻点中颜色 1 空出, 可给 v 着色 1.

若 v_1 和 v_3 在 H_{13} 中属于同一连通分支, 则存在一条从 v_1 到 v_3 的路径, 其上顶点交替着颜色 1 和 3. 这条路径与边 vv_1, vv_3 一起构成一个圈, 由于平面嵌入, v_2 和 v_4 一个在圈

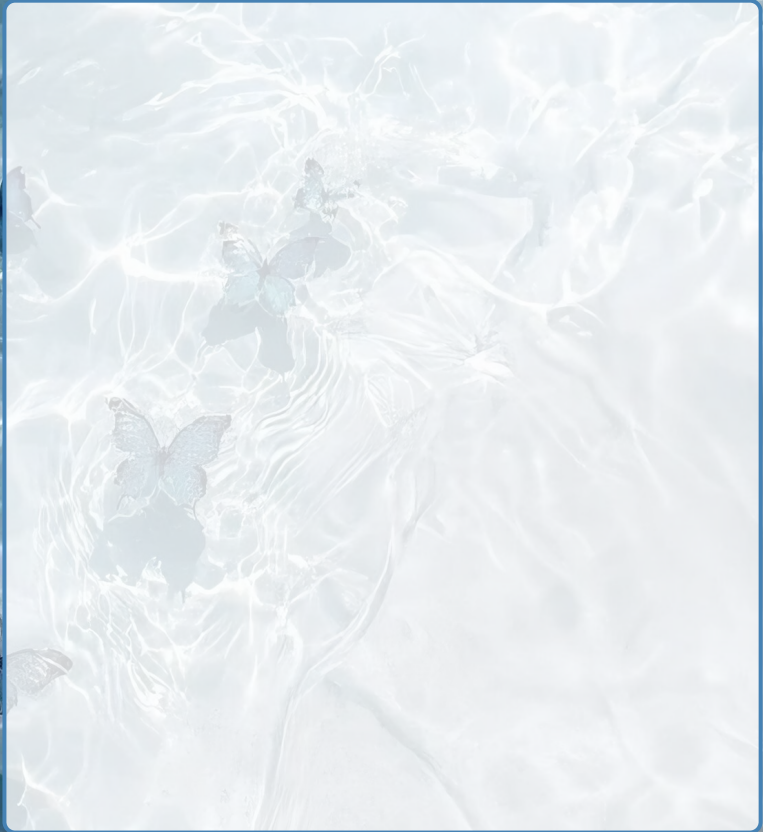
内一个在圈外（或都在圈上，但由平面性不可能同时与 v 相连而不交叉）。因此，由颜色 2 和 4 诱导的子图 H_{24} 中， v_2 和 v_4 必属于不同连通分支（因为路径 $v_1 \dots v_3$ 隔开了它们）。于是在 v_2 所在分支交换颜色 2 和 4，使 v_2 变为颜色 4， v_4 仍为颜色 4（不同分支），从而 v 的邻点中颜色 2 空出，可给 v 着色 2。

综上， G 总可 5-着色。由归纳法，定理得证。 □

问题 9.0.2 (四色猜想). 每个平面图都是 4-顶点可着色的.



10. 有向图



出度、入度定义

Tournament

色数：无向图大于等于有向图、有向图色数定义、有向图最大度定义

Arc Set 弧集

伪图

竞赛图

道、迹、路、环

强连通

H 圈（任意竞赛图都有 H 路）

有向图的正则（竞赛图、入度 = 出度 = k）

$2k+1$ 完全图存在 k -正则定向

强连通竞赛图一定有 H 圈



- [1] Prüfer, H. (1918). Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. Math. Phys.*, 27, 142-144.
- [2] Kirchhoff, G. (1847). Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.*, 72, 497-508.
- [3] Moon, J. W. (1970). *Counting Labelled Trees*. Canadian Mathematical Monographs.
- [4] Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2018). *Proofs from THE BOOK* (6th ed.). Springer.
- [5] N. Alon, "Transversal numbers of uniform hypergraphs," *Graphs and Combinatorics*, vol. 6, pp. 1-4, 1990.
- [6] L. Lovász, "Three short proofs in graph theory," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 19, pp. 269-271, 1975.
- [7] C. E. Shannon, "A theorem on coloring the lines of a network," *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 28, pp. 148-151, 1949.
- [8] V. G. Vizing, "On an estimate of the chromatic class of a p -graph", *Diskret. Analiz.*, vol. 3, pp. 25-30, 1964.

