Ideas on Financial Options

Sherlock Young

December 16, 2025

Art. No 00001
ISBN 111–11–1111–11–1
Edition 1.0

Cover design by Sherlock Young

Published by Three Squirrels
Printed in Tianjin

If you have any queotions, please send email to *nkuSherr1@nankai.edu.cn*

目录

1. 随机分析

1.1 预备知识

1.1.1 概率空间和随机变量

这部分还是对上学期学的概率论和测度论的一个回顾.

定义 1.1.1. 设 Ω 是一个非空集合，$\mathbb{F}$ 是 Ω 的某些子集构成的集合族。如果 $\mathbb{F}$ 满足以下三个条件，则称 $\mathbb{F}$ 为 σ-代数：

1. $\Omega \in \mathbb{F}$;
2. 若 $A \in \mathbb{F}$，则 $A^c \in \mathbb{F}$（对余运算封闭）;
3. 若 $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{F}$（对可数并运算封闭）。

命题 1.1.1. 由上述定义可以推导出 σ-代数的其他性质：

1. $\emptyset \in \mathbb{F}$（因为 $\emptyset = \Omega^c$）;

2. 若 $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{F}$，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{F}$（对可数交运算封闭）；

3. 若 $A, B \in \mathbb{F}$，则 $A \setminus B \in \mathbb{F}$（对差运算封闭）。

例 1.1.1. 常见的 σ-代数例子包括：

1. 平凡 σ-代数：$\{\emptyset, \Omega\}$；
2. 幂集 σ-代数：2^{Ω}（Ω 的所有子集构成的集合）；
3. Borel σ-代数：由 $\mathbb{R}^n$ 中所有开集生成的 σ-代数。

定义 1.1.2. 称三元组 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 为概率空间，如果它满足下列条件：

1. 样本空间 Ω，其元素以 ω 表示。

2. Ω 上子集组成的 σ 代数 $\mathbb{F}$:

   (a) $\emptyset \in \mathbb{F}$;
   (b) 若 $A \in \mathbb{F}$，则 $A^c \in \mathbb{F}$，其中 A^c 表 A 在 Ω 中余集；
   (c) 若 $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{F}$。

3. $\mathbb{F}$ 上的集函数 P:

   (a) 对任意 $A \in \mathbb{F}$，有 $0 \le P(A) \le 1$；
   (b) $P(\Omega) = 1$；
   (c) 对任意 **两两不交** 的集合 $A_i \in \mathbb{F}$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.1}$$

注. 概率空间是概率论的基础概念，为随机现象的数学描述提供了严格的框架。其中 σ 代数的条件保证了我们可以对集合进行可数多次的并、交、补运算而不超出该集合系，而概率测度的可数可加性是建立极限理论的关键。

定义 1.1.3. 设 C 为 Ω 上的一个子集族，包含 C 的最小 σ-代数 $\sigma(C)$ 称为由 C 生成的 σ-代数。

例. $\mathbb{R}^n$ 上所有开集生成的 σ-代数称为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ-代数，记为 $B(\mathbb{R}^n)$。

定义 1.1.4. $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 上的可测函数 X 称为随机变量。这里可测指的是对任意的 $B \in B(\mathbb{R})$，有 $X^{-1}(B) \in \mathbb{F}$，其中 $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$。

注. 上述可测性条件等价于对任意的 $x \in \mathbb{R}$，有 $\{X < x\} \in \mathbb{F}$。这一等价性源于 *Borel* σ-代数可由形如 $(-\infty, x)$ 的区间生成。

定理 1.1.2. 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上 *Borel* 可测函数，则 $f(X)$ 亦为 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 上的随机变量。

证明. 由于 f 是 Borel 可测的，对任意 $B \in B(\mathbb{R})$，有 $f^{-1}(B) \in B(\mathbb{R})$。又因为 X 是随机变量，故 $(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathbb{F}$。这表明 $f(X)$ 满足随机变量的定义。 □

注. 该定理保证了随机变量经过 *Borel* 可测函数变换后仍保持随机变量的性质，这一性质在概率论与数理统计中具有 *fundamental* 的重要性，它使得我们可以对随机变量进行各种数学运算而保持其可测性。

分布函数

我们对概率论中所学的分布函数进行一个回顾.

定义 1.1.5. 称 $F(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\}), x \in \mathbb{R}$ 为随机变量 $X(\omega)$ 的分布函数。

定理 1.1.3. 分布函数 $F(x)$ 具有以下特征:

1. 单调性: $\forall a < b$，有 $F(a) \le F(b)$;
2. 标准性: $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$，$\lim_{b \to +\infty} F(b) = 1$;
3. 左连续性: $\lim_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0 - 0) = F(x_0)$。

证明. 单调性: 若 $a < b$，则 $\{X < a\} \subset \{X < b\}$，由概率测度的单调性得 $P(X < a) \le P(X < b)$，即 $F(a) \le F(b)$。

标准性: 考虑序列 $a_n \to -\infty$，则 $\{X < a_n\}$ 是递减集合列且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X < a_n\} = \emptyset$，由概率的上连续性得 $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = 0$。类似地，考虑 $b_n \to +\infty$，则 $\{X < b_n\}$ 是递增集合列且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < b_n\} = \Omega$，由概率的下连续性得 $\lim_{n\to\infty} F(b_n) = 1$。

左连续性: 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，取序列 $x_n \uparrow x_0$，则 $\{X < x_n\}$ 是递增集合列且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < x_n\} = \{X < x_0\}$，由概率的下连续性得 $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$。 □

注. 分布函数完整地描述了随机变量的统计特性，通过分布函数可以计算任意 *Borel* 集上的概率:

$$P(X \in B) = \int_B dF(x).$$

一些重要不等式

对于分布函数，我们有以下这些常见的不等式.

定理 1.1.4 (Chebyshev 不等式)**.** 设 $\lambda > 0$，则对任意 $p > 0$，有

$$P(|X| > \lambda) \le \frac{1}{\lambda^p} E[|X|^p]. \tag{1.2}$$

证明. 由概率的积分表示和期望的定义：

$$P(|X|>\lambda)=\int_{\{|X|>\lambda\}}dP=\int_{\Omega}I_{\{|X|>\lambda\}}dP.$$

在集合 $\{|X|>\lambda\}$ 上，有 $1\le\frac{|X|^p}{\lambda^p}$，因此

$$P(|X|>\lambda)=\int_{\{|X|>\lambda\}}1\,dP\le\int_{\{|X|>\lambda\}}\frac{|X|^p}{\lambda^p}dP\le\frac{1}{\lambda^p}\int_{\Omega}|X|^pdP=\frac{1}{\lambda^p}E[|X|^p].$$

□

定理 1.1.5 (Hölder 不等式)**.** 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p,q>1$，则

$$E[|XY|]\le[E(|X|^p)]^{1/p}[E(|Y|^q)]^{1/q}.\tag{1.3}$$

证明. 令 $A=[E(|X|^p)]^{1/p}$，$B=[E(|Y|^q)]^{1/q}$。若 $A=0$ 或 $B=0$，不等式显然成立。下设 $A>0$，$B>0$。

由 Young 不等式：对 $a,b\ge0$，有 $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$。令 $a=\frac{|X|}{A}$，$b=\frac{|Y|}{B}$，得

$$\frac{|XY|}{AB}\le\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{A^p}+\frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{B^q}.$$

两边取期望：

$$\frac{E[|XY|]}{AB}\le\frac{1}{p}\frac{E[|X|^p]}{A^p}+\frac{1}{q}\frac{E[|Y|^q]}{B^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

因此 $E[|XY|]\le AB=[E(|X|^p)]^{1/p}[E(|Y|^q)]^{1/q}$。 □

注. *当 $p=q=2$ 时，Hölder 不等式退化为 Cauchy-Schwarz 不等式：*

$$E[|XY|]\le\sqrt{E[|X|^2]E[|Y|^2]}.\tag{1.4}$$

定理 1.1.6 (Jensen 不等式)**.** 设 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凸函数，且 $E[|\phi(X)|]<\infty$，则

$$\phi(E[X])\le E[\phi(X)].\tag{1.5}$$

证明. 设 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)$。由于 ϕ 是凸函数，由凸函数的支撑超平面性质，存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$\phi(x)\ge\phi(E[X])+a(x-E[X]),\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

代入 X 并取期望：

$$E[\phi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dF(x)\ge\int_{-\infty}^{\infty}[\phi(E[X])+a(x-E[X])]dF(x)=\phi(E[X])+a(E[X]-E[X])=\phi(E[X]).$$

□

注. *特别地，当 $\phi(x)=|x|^p$（$p\ge1$）时，由 Jensen 不等式得*

$$|E[X]|^p\le E[|X|^p].\tag{1.6}$$

一些收敛性

结合概率论，我们给出一些新的收敛定义：

定义 1.1.6 (几乎处处收敛). $X_n \xrightarrow{a.s.} X$，若存在零测集 N 使得当 $\omega \notin N$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

即 $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$。

定义 1.1.7 (r 阶收敛). $X_n \xrightarrow{r} X$，若 $E|X_n|^r < \infty$，$E|X|^r < \infty$，且

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = 0, \quad \forall r > 0.$$

定义 1.1.8 (依概率收敛). $X_n \xrightarrow{P} X$，若对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

定义 1.1.9 (分布收敛). $X_n \xrightarrow{d} X$，若对任意 $F_X(x)$ 的连续点 x，有

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

对于上述四种收敛，我们有如下关系：

命题 1.1.7 (收敛性之间的关系).

1. $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$
2. $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$
3. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

证明. 几乎处处收敛蕴含依概率收敛：由几乎处处收敛定义，$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$。对任意 $\varepsilon > 0$，考虑事件 $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| > \varepsilon\}$，则 $\{A_n\}$ 是递减序列且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \{\lim_{n\to\infty} X_n \neq X\}$，由概率的上连续性得

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

由于 $\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset A_n$，故 $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$。

r 阶收敛蕴含依概率收敛：由 Chebyshev 不等式，

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \le \frac{E|X_n - X|^r}{\varepsilon^r} \to 0.$$

依概率收敛蕴含分布收敛：对任意 $F_X(x)$ 的连续点 x 和 $\varepsilon > 0$，有

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x) \le P(X \le x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon) = F_X(x+\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon),$$

$$F_X(x-\varepsilon) = P(X \le x - \varepsilon) \le P(X_n \le x) + P(|X_n - X| > \varepsilon) = F_{X_n}(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

令 $n \to \infty$ 得 $F_X(x-\varepsilon) \le \liminf F_{X_n}(x) \le \limsup F_{X_n}(x) \le F_X(x+\varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0$ 即得结论。 □

注. 这些收敛性概念在概率论和统计学中具有 *fundamental* 的重要性，它们描述了随机变量序列趋近于极限随机变量的不同方式。

独立性

我们对概率论中的事件独立进行一个回顾，同时将我们的独立拓展到随机变量上：

定义 1.1.10 (事件的独立性). 给定概率空间 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$。

1. 称事件 $A, B \in \mathbb{F}$ 独立，若 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$。
2. 称事件族 $\{A_i, i \in I\}$ 独立，若对任意有限指标集 $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$，有

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

定义 1.1.11 (集合族的独立性). 称 $\mathbb{F}$ 的子集族 $\{C_i, i \in I\}$ 独立，若对任意有限指标集 $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$ 和 $A_{i_1} \in C_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \in C_{i_k}$，有 $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ 独立。

定义 1.1.12 (随机变量的独立性). 对 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 上随机变量族 $\{X_i, i \in I\}$，若它们生成的 σ-代数 $\sigma(X_i)$ 相互独立，则称这个随机变量族是独立的。

定义 1.1.13 (随机变量与 σ-代数的独立性). 类似的，我们可以定义一个随机变量 X 与一个 σ-代数 $\mathcal{G}$ 独立，如果 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{G}$ 独立。

定理 1.1.8 (独立性的等价刻画). 随机变量 X 和 Y 独立当且仅当对任意有界连续函数 f 和 g，

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

证明. 必要性：若 X 和 Y 独立，则 $\sigma(X)$ 与 $\sigma(Y)$ 独立。对任意 Borel 集 B_1, B_2，有

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2).$$

由测度论的唯一性定理，对任意可测函数 f, g，上式成立。特别地，对有界连续函数成立。

充分性：假设对任意有界连续函数 f, g，有 $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$。考虑指示函数 $f(x) = I_B(x)$，$g(y) = I_C(y)$，其中 B, C 为 Borel 集。由 Lusin 定理，存在有界连续函数序列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 使得 $f_n \to I_B$, $g_n \to I_C$ 几乎处处且一致有界。由控制收敛定理：

$$E[I_B(X)I_C(Y)] = \lim_{n\to\infty} E[f_n(X)g_n(Y)] = \lim_{n\to\infty} E[f_n(X)]E[g_n(Y)] = E[I_B(X)]E[I_C(Y)].$$

因此 $P(X \in B, Y \in C) = P(X \in B)P(Y \in C)$，即 X 和 Y 独立。 □

注. 独立性是概率论中最重要的概念之一，它描述了随机变量之间”互不影响”的统计性质。上述定理提供了用期望运算来刻画独立性的有力工具，在实际应用中极为方便。

一些分布

我们回顾一些之前学到的分布：

定义 1.1.14 (高斯分布). 设 X 服从高斯分布 $N(m,\sigma^2)$，即其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

相应的概率测度为

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

定理 1.1.9 (高斯分布的母函数和特征函数).

$$E[e^{\lambda X}]=e^{\lambda m+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}},\quad E[e^{i\lambda X}]=e^{i\lambda m-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}.$$

证明. 计算母函数：

$$E[e^{\lambda X}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

作变量代换 $y=x-m$，则

$$E[e^{\lambda X}]=e^{\lambda m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=e^{\lambda m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2-2\sigma^2\lambda y}{2\sigma^2}}dy.$$

配方：$y^2-2\sigma^2\lambda y=(y-\sigma^2\lambda)^2-\sigma^4\lambda^2$，代入得

$$E[e^{\lambda X}]=e^{\lambda m+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y-\sigma^2\lambda)^2}{2\sigma^2}}dy=e^{\lambda m+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}.$$

特征函数的计算类似，注意到 $e^{i\lambda X}$ 是复值随机变量，计算过程需考虑复积分。 □

定义 1.1.15 (Poisson 分布). 设 X 服从 *Poisson* 分布 $p(\lambda)$，即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\ldots$$

定理 1.1.10 (Poisson 分布的母函数和特征函数).

$$E[s^X]=e^{\lambda(s-1)},\quad E[e^{itX}]=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

证明. 计算母函数：

$$E[s^X]=\sum_{k=0}^{\infty}s^kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda s}=e^{\lambda(s-1)}.$$

计算特征函数：

$$E[e^{itX}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

□

注. 矩母函数和特征函数完全决定了概率分布，它们在研究随机变量的和、极限分布以及随机过程等方面具有 *fundamental* 的重要性。高斯分布的特征函数形式特别简洁，这反映了其在 *Fourier* 变换下的良好性质。

极限定理

当然还有一些重要的极限定理:

定义 1.1.16 (大数定律). 设 $\{X_n\}$ 为随机变量列，若存在常数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

定义 1.1.17 (中心极限定理). 设 $\{X_n\}$ 为随机变量列，令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。若 $E[S_n]$，$D[S_n]$ 均存在，且

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{D[S_n]}} \xrightarrow{d} N(0,1), \qquad \frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{D[\bar{X}_n]}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

则称 $\{X_n\}$ 满足中心极限定理。

定理 1.1.11 (Kolmogorov, 强大数定律). 设 $X_n, n \geq 1$ 是一列独立同分布随机变量，且 $E(|X_1|) < \infty$。则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} m,$$

其中 $m = E(X_1)$。

定理 1.1.12 (中心极限定理). 设 $X_n, n \geq 1$ 是一列独立同分布随机变量，且 $E(X_1^2) < \infty$。令 $m = E(X_1)$, $\sigma^2 = D(X_1)$。则

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

证明. 我们使用特征函数方法来证明。

令 $Y_k = \frac{X_k - m}{\sigma}$，则 $E[Y_k] = 0$，$E[Y_k^2] = 1$。考虑标准化和

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

计算其特征函数:

$$\phi_{Z_n}(t) = E[e^{itZ_n}] = \left[E\left(e^{itY_1/\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}}E[Y_1] - \frac{t^2}{2n}E[Y_1^2] + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

由于 $E[Y_1] = 0$，$E[Y_1^2] = 1$，有

$$\phi_{Z_n}(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (n\to\infty).$$

而 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 正是标准正态分布的特征函数，由 Lévy 连续性定理即得结论。 □

注. 大数定律描述了随机变量序列的均值稳定性，而中心极限定理则揭示了独立随机变量和的极限分布形态。这两个定理共同构成了概率论极限理论的基石，在统计学、计量经济学等领域有广泛应用。

下面这个引理刻画了事件极限的概率分布：

引理 1.1.13 (Borel-Cantelli 引理). 设 $\{A_n\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 中的事件列。

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，则 $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$。
2. 若 $\{A_n\}$ 是独立事件列且 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$，则 $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$。

其中 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ 表示事件 A_n 无穷多次发生。

证明. 1. 对于任意 $m \geq 1$，由概率的次可加性：

$$P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 收敛，当 $m \to \infty$ 时，$\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) \to 0$。因此

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = 0.$$

2. 由于 $\{A_n\}$ 独立，对任意 $m \geq 1$：

$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n)).$$

利用不等式 $1 - x \leq e^{-x}$（$x \geq 0$）：

$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \leq \prod_{n=m}^{\infty} e^{-P(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n)\right) = 0,$$

因为 $\sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = \infty$。于是

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \\
&= 1 - \prod_{n\geq m} P(A_n^c) \\
&= 1 - \prod_{n\geq m} (1 - P(A_n)) \\
&\geq 1 - \prod_{n\geq m} e^{-P(A_n)} \\
&= 1 - e^{\sum_{n\geq m} P(A_n)} \to 1
\end{aligned}$$

因此

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

□

注. Borel-Cantelli 引理是概率论中关于事件序列极限行为的重要工具。第一部分不需要独立性假设，而第二部分强烈依赖于独立性。该引理在证明几乎处处收敛、研究随机过程的轨道性质等方面有广泛应用。

例 1.1.2. 设 $\{X_n\}$ 是独立随机变量序列，$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$，$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \infty$，由 Borel-Cantelli 引理第二部分，$P(X_n = 1 \text{ 无穷多次}) = 1$。

我们给出随机变量独立的等价刻画:

定理 1.1.14. 设随机变量 X, Y 相互独立，且 $E[|f(X,Y)|] < \infty$。则

$$E[f(X,Y)] = E[g(X)],$$

其中 $g(x) = E[f(x,Y)]$。

证明. 由于 X 和 Y 相互独立，它们的联合分布等于边缘分布的乘积。设 X 的分布为 μ，Y 的分布为 ν，则 (X,Y) 的联合分布为 $\mu \otimes \nu$。

由 Fubini 定理，有

$$E[f(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

内层积分正是 $g(x) = E[f(x,Y)]$，因此

$$E[f(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mu(x) = E[g(X)].$$

Fubini 定理的应用是合理的，因为 $E[|f(X,Y)|] < \infty$ 保证了积分的可交换性。 □

注. 该定理在概率论中具有 fundamental 的重要性，它提供了计算独立随机变量函数期望的 powerful 工具。特别地，当 $f(X,Y) = XY$ 时，若 X 和 Y 独立，则有 $E[XY] = E[X]E[Y]$，这是独立性带来的重要性质。

例 1.1.3. 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$ 且相互独立，计算 $E[e^{X+Y}]$。

解. 由定理:

$$E[e^{X+Y}] = E[g(X)] \quad g(x) = E[e^{x+Y}] = e^x E[e^Y] = e^x \cdot e^{1/2}.$$

因此

$$E[e^{X+Y}] = E[e^X \cdot e^{1/2}] = e^{1/2} E[e^X] = e^{1/2} \cdot e^{1/2} = e.$$

□

1.1.2 条件期望

我们回顾一下 Borel 集的定义以及 $\mathcal{G}$-可测的定义:

定义 1.1.18 (Borel 集). 设 X 是一个拓扑空间。由 X 中所有开集生成的 σ-代数称为 X 上的 Borel σ-代数，记作 $\mathcal{B}(X)$。$\mathcal{B}(X)$ 中的元素称为 X 上的 Borel 集。

等价地，*Borel* σ-代数是包含所有开集的最小 σ-代数。它也可以通过以下任一方式生成：

- ♡ 所有开集
- ♡ 所有闭集
- ♡ 所有紧集（如果 X 是 *Hausdorff* 空间）
- ♡ 所有开区间（如果 $X=\mathbb{R}$）

例 1.1.4. ♡ $\mathbb{R}$ 中的开区间 (a,b)、闭区间 $[a,b]$、半开区间 $[a,b)$ 都是 Borel 集

- ♡ 可数集、开集、闭集、F_σ 集（可数个闭集的并）、G_δ 集（可数个开集的交）都是 Borel 集
- ♡ $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数是包含所有区间的最小 σ-代数

定义 1.1.19 ($\mathcal{G}$-可测). 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个可测空间，$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 是一个子 σ-代数。一个函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 称为 $\mathcal{G}$-可测的，如果对任意 *Borel* 集 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，都有

$$f^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: f(\omega)\in B\}\in\mathcal{G}$$

等价地，f 是 $\mathcal{G}$-可测的当且仅当 f 关于 σ-代数 $\mathcal{G}$ 是可测的。

注. 直观理解就是：

- ♡ $\mathcal{G}$-可测函数是指那些“取值信息完全由 $\mathcal{G}$ 中的事件决定”的函数
- ♡ 如果 $\mathcal{G}$ 表示到某个时刻为止可获得的信息，那么 $\mathcal{G}$-可测函数就是在该时刻可以完全确定的随机变量
- ♡ 在概率论中，这对应于一个随机变量在给定 σ-代数 $\mathcal{G}$ 下的可测性

接下来，我们介绍一下条件期望：

定义 1.1.20. 设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathbb{F},P)$ 上随机变量，$E[|X|]<\infty$。设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{F}$ 的子 σ-代数。称随机变量 Y 是 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件数学期望，记为 $E[X|\mathcal{G}]$，若

1. Y 是 $\mathcal{G}$-可测的；
2. 对任意 $B\in\mathcal{G}$，
$$\int_B XdP=\int_B YdP. \tag{1.7}$$

当 $X=I_A$ 时，我们常常把 $E[I_A|\mathcal{G}]$ 写为 $P(A|\mathcal{G})$。

定理 1.1.15 (条件期望的极小性性质)**.** 设 $X \in L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$，$\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{F}$ 的子 σ-代数。则存在唯一的 $\mathcal{G}$-可测随机变量 Y，使得

$$E[(X-Y)^2] = \min\{E[(X-Z)^2] : Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)\}.$$

且该 Y 满足条件期望的定义，即 $Y = E[X|\mathcal{G}]$。

证明. 设 Y 是最小化问题的解。对任意的 $\varepsilon \neq 0$ 和 $\mathcal{G}$-可测的随机变量 $Z \in L^2$，考虑:

$$E[(X-Y-\varepsilon Z)^2] = E[(X-Y)^2] - 2\varepsilon E[Z(X-Y)] + \varepsilon^2 E[Z^2].$$

由于 Y 是最小解，函数 $\phi(\varepsilon) = E[(X-Y-\varepsilon Z)^2]$ 在 $\varepsilon = 0$ 处达到最小值，因此

$$\phi'(0) = -2E[Z(X-Y)] = 0 \quad \Rightarrow \quad E[ZX] = E[ZY].$$

特别地，取 $Z = I_B$（$B \in \mathcal{G}$），得到

$$\int_B X dP = E[I_B X] = E[I_B Y] = \int_B Y dP, \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

反之，若 Y 满足 $\int_B X dP = \int_B Y dP$ 对所有 $B \in \mathcal{G}$ 成立，则对任意 $\mathcal{G}$-可测的 $Z \in L^2$，有

$$E[(X-Z)^2] = E[(X-Y+Y-Z)^2] = E[(X-Y)^2] + E[(Y-Z)^2] + 2E[(X-Y)(Y-Z)].$$

由于 $Y - Z$ 是 $\mathcal{G}$-可测的，且 $E[(X-Y)(Y-Z)] = 0$，故

$$E[(X-Z)^2] = E[(X-Y)^2] + E[(Y-Z)^2] \geq E[(X-Y)^2],$$

等号成立当且仅当 $Z = Y$ 几乎处处成立。 □

设 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 为概率空间，$X \in L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$，$G$ 是 $\mathbb{F}$ 的子 σ-代数。考虑优化问题:

$$\min_{Y \in L^2(\Omega, G, P)} E[(X-Y)^2].$$

假设 Y 为极小解。对任意 $\varepsilon \neq 0$ 与任意 $Z \in L^2(\Omega, G, P)$，令 $Y_\varepsilon = Y + \varepsilon Z$，则

$$E[(X-Y)^2] \leq E[(X-Y_\varepsilon)^2] = E[(X-Y)^2] - 2\varepsilon E[Z(X-Y)] + \varepsilon^2 E[Z^2].$$

化简得

$$0 \leq -2\varepsilon E[Z(X-Y)] + \varepsilon^2 E[Z^2],$$

即

$$2\varepsilon E[Z(X-Y)] \leq \varepsilon^2 E[Z^2].$$

由 ε 符号任意性，可得

$$E[Z(X-Y)] = 0, \quad \forall Z \in L^2(\Omega, G, P),$$

亦即

$$E[ZX] = E[ZY], \quad \forall Z \in L^2(\Omega, G, P).$$

特别地，取 $Z = \mathbf{1}_B$，$B \in G$，得

$$\int_B X \, dP = \int_B Y \, dP, \quad \forall B \in G.$$

此即条件期望 $E[X \mid G]$ 的定义性质，故 $Y = E[X \mid G]$ 是唯一解（在几乎必然意义下）。

注. 条件期望可以理解为在给定信息 $\mathcal{G}$ 下对 X 的最佳预测。从几何角度看，$L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$ 是 $L^2(\Omega,\mathbb{F},P)$ 的闭子空间，而 $E[X|\mathcal{G}]$ 正是 X 在该子空间上的正交投影。

注. 上述 L^2 理论可以通过极限过程推广到 L^1 空间。条件期望的存在唯一性由 *Radon-Nikodym* 定理保证。

条件期望的性质

针对条件期望，我们有如下性质：

感觉期末肯定六选一！

性质 1.1.1. 若 $\mathcal{G}=\{\Omega,\emptyset\}$，则 $E[X|\mathcal{G}]=E[X]$。

证明. 由于 $\mathcal{G}=\{\Omega,\emptyset\}$，唯一的非平凡可测集是 Ω。根据条件期望的定义，$Y=E[X|\mathcal{G}]$ 是 $\mathcal{G}$-可测的，因此必须是常数。对 $B=\Omega$ 应用定义：

$$\int_\Omega X dP=\int_\Omega Y dP \Rightarrow E[X]=Y\cdot P(\Omega)=Y.$$

故 $E[X|\mathcal{G}]=E[X]$。 □

性质 1.1.2. 若 c 是凸函数且 $E[|c(X)|]<\infty$，则 $E[c(X)|\mathcal{G}]\geq c(E[X|\mathcal{G}])$。

证明. 由凸函数的性质，对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，存在支撑直线 $l(x)=a(x-x_0)+c(x_0)$ 使得 $c(x)\geq l(x)$ 对所有 x 成立。取 $x_0=E[X|\mathcal{G}]$，则

$$c(X)\geq a(X-E[X|\mathcal{G}])+c(E[X|\mathcal{G}]).$$

两边取条件期望（保持不等式）：

$$E[c(X)|\mathcal{G}]\geq a(E[X|\mathcal{G}]-E[X|\mathcal{G}])+c(E[X|\mathcal{G}])=c(E[X|\mathcal{G}]).$$

这里用到了 $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}]=E[X|\mathcal{G}]$。 □

性质 1.1.3 (塔性质 (Tower Property))**.** 设 $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ 是 $\mathbb{F}$ 的两个子 σ-代数，且 $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$，则 $E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=E[X|\mathcal{G}_1]$。

证明. 我们从条件期望的定义出发, 回忆任意子 σ-代数 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 及可积随机变量 X 的条件期望 $\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}]$ 的定义, 对于 $\mathcal{G}$-可测随机变量 Y，满足

$$\forall\, A\in\mathcal{G},\quad \int_A Y\,dP=\int_A X\,dP.$$

我们记

$$Y_2:=\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}_2].$$

由定义, Y_2 是 $\mathcal{G}_2$-可测的, 且对任意 $B\in\mathcal{G}_2$，

$$\int_B Y_2\,dP=\int_B X\,dP. \tag{1.8}$$

再定义

$$Z := \mathbb{E}[Y_2 \mid \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1\big].$$

Z 是 $\mathcal{G}_1$-可测的, 且对任意 $A \in \mathcal{G}_1$,

$$\int_A Z\, dP = \int_A Y_2\, dP. \tag{1.9}$$

我们的目标是证明 $Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1]$（a.s.）. 为此, 只需验证 Z 满足 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1]$ 的定义方程, 即:

$$\forall\, A \in \mathcal{G}_1, \quad \int_A Z\, dP = \int_A X\, dP. \tag{1.10}$$

任取 $A \in \mathcal{G}_1$. 由于 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, 有 $A \in \mathcal{G}_2$. 于是由 (1.8) 得

$$\int_A Y_2\, dP = \int_A X\, dP. \tag{1.11}$$

再由 (1.9) ,

$$\int_A Z\, dP = \int_A Y_2\, dP.$$

联立 (1.11) 与 (1.9) , 得

$$\int_A Z\, dP = \int_A Y_2\, dP = \int_A X\, dP.$$

故 (1.10) 对任意 $A \in \mathcal{G}_1$ 成立. 又因 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1]$ 是 $\mathcal{G}_1$-可测的, 且唯一（a.s.）满足上述积分等式 [**billingsley1995**] , [**kallenberg2002**] , 而 Z 也是 $\mathcal{G}_1$-可测且满足相同方程, 故

$$Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1] \quad \text{(a.s.)}.$$

即

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1] \quad \text{(a.s.)}.$$

此结论即条件期望为 **tower property** [**durrett2019**]. □

性质 1.1.4. *若 X 关于 $\mathcal{G}$ 可测，则 $E[X|\mathcal{G}] = X$。一般的，若 Y 是 $\mathcal{G}$-可测且 XY 可积，则 $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$。*

证明. 我们分步证明:

1. 首先证明 X 是 $\mathcal{G}$-可测时，$E[X|\mathcal{G}] = X$。

   (a) 由条件，X 是 $\mathcal{G}$-可测的。

   (b) 对任意 $B \in \mathcal{G}$，有
   $$\int_B X dP = \int_B X dP.$$

   (c) 因此 X 满足条件期望的两个条件：$\mathcal{G}$-可测性且对任意 $B \in \mathcal{G}$ 满足积分等式。

   (d) 由条件期望的唯一性（在几乎处处意义下），得 $E[X|\mathcal{G}] = X$。

2. 现在证明一般情形：若 Y 是 $\mathcal{G}$-可测且 XY 可积，则 $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$。

   (a) 首先考虑 $Y = I_B$，其中 $B \in \mathcal{G}$ 的情形。

i. 对任意 $A \in \mathcal{G}$，有

$$\int_A XI_B dP = \int_{A\cap B} XdP.$$

ii. 由条件期望定义，$\int_{A\cap B} XdP = \int_{A\cap B} E[X|\mathcal{G}]dP$。

iii. 又因为 $I_B E[X|\mathcal{G}]$ 是 $\mathcal{G}$-可测的，且

$$\int_A I_B E[X|\mathcal{G}]dP = \int_{A\cap B} E[X|\mathcal{G}]dP.$$

iv. 因此对任意 $A \in \mathcal{G}$，

$$\int_A XI_B dP = \int_A I_B E[X|\mathcal{G}]dP.$$

v. 故 $E[XI_B|\mathcal{G}] = I_B E[X|\mathcal{G}]$。

(b) 由线性性，结论对简单函数 $Y = \sum_{i=1}^n c_i I_{B_i}$（其中 $B_i \in \mathcal{G}$）成立。

(c) 对一般的 $\mathcal{G}$-可测函数 Y，存在简单函数列 $\{Y_n\}$ 使得 $Y_n \to Y$ 且 $|Y_n| \le |Y|$。

(d) 由控制收敛定理和条件期望的连续性，有

$$E[XY|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[XY_n|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} Y_n E[X|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}].$$

□

性质 1.1.5. *X 与 $\mathcal{G}$ 独立，当且仅当对任意的 Borel 可测函数 f，若 $f(X)$ 可积，则有 $E[f(X)|\mathcal{G}] = E[f(X)]$。*

证明. 我们分步证明：

1. 先证充分性（⇒）：假设 X 与 $\mathcal{G}$ 独立。

(a) 首先考虑 $f = I_B$，其中 B 是 Borel 集的情形。

i. 对任意 $A \in \mathcal{G}$，由独立性有

$$\int_A I_B(X)dP = P(\{X \in B\} \cap A) = P(X \in B)P(A).$$

ii. 另一方面，

$$\int_A E[I_B(X)]dP = E[I_B(X)]P(A) = P(X \in B)P(A).$$

iii. 因此对任意 $A \in \mathcal{G}$，

$$\int_A I_B(X)dP = \int_A E[I_B(X)]dP.$$

iv. 故 $E[I_B(X)|\mathcal{G}] = E[I_B(X)]$。

(b) 由线性性，结论对简单函数 $f = \sum_{i=1}^n c_i I_{B_i}$ 成立。

(c) 对一般的 Borel 可测函数 f，存在简单函数列 $\{f_n\}$ 使得 $f_n \to f$ 且 $|f_n| \le |f|$。

(d) 由控制收敛定理和条件期望的连续性，有

$$E[f(X)|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[f_n(X)|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[f_n(X)] = E[f(X)].$$

2. 再证必要性（⇐）：假设对任意 Borel 可测函数 f，有 $E[f(X)|\mathcal{G}] = E[f(X)]$。

(a) 取 $f = I_B$，其中 B 是 Borel 集。

(b) 则对任意 $A \in \mathcal{G}$，有

$$\int_A I_B(X)dP = \int_A E[I_B(X)|\mathcal{G}]dP = \int_A E[I_B(X)]dP = P(X \in B)P(A).$$

(c) 但 $\int_A I_B(X)dP = P(\{X \in B\} \cap A)$。

(d) 因此 $P(\{X \in B\} \cap A) = P(X \in B)P(A)$。

(e) 由于这对任意 $A \in \mathcal{G}$ 和任意 Borel 集 B 都成立，故 X 与 $\mathcal{G}$ 独立。

□

性质 1.1.6. 设 X 是 $\mathcal{G}$-可测的，Y 与 $\mathcal{G}$ 独立，可测函数 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $E[|\phi(X,Y)|] < \infty$。令 $\psi(x) = E[\phi(x,Y)]$，则 $E[\phi(X,Y)|\mathcal{G}] = \psi(X)$。

证明. 我们分步证明：

1. 首先考虑 $\phi(x,y) = I_A(x)I_B(y)$ 的情形，其中 A, B 为 Borel 集。

   (a) 此时 $\psi(x) = E[I_A(x)I_B(Y)] = I_A(x)E[I_B(Y)] = I_A(x)P(Y \in B)$。

   (b) 需要证明 $E[I_A(X)I_B(Y)|\mathcal{G}] = I_A(X)P(Y \in B)$。

   (c) 由于 $I_A(X)$ 是 $\mathcal{G}$-可测的，由 property 1.1.4 有

   $$E[I_A(X)I_B(Y)|\mathcal{G}] = I_A(X)E[I_B(Y)|\mathcal{G}].$$

   (d) 又因为 Y 与 $\mathcal{G}$ 独立，由 property 1.1.5 有 $E[I_B(Y)|\mathcal{G}] = E[I_B(Y)] = P(Y \in B)$。

   (e) 因此 $E[I_A(X)I_B(Y)|\mathcal{G}] = I_A(X)P(Y \in B) = \psi(X)$。

2. 由线性性，结论对形如 $\phi(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} I_{A_i}(x) I_{B_j}(y)$ 的简单函数成立。

3. 对一般的可测函数 ϕ，存在简单函数列 $\{\phi_n\}$ 使得 $\phi_n \to \phi$ 且 $|\phi_n| \le |\phi|$。

4. 对每个 ϕ_n，相应的 $\psi_n(x) = E[\phi_n(x,Y)]$ 满足 $E[\phi_n(X,Y)|\mathcal{G}] = \psi_n(X)$。

5. 由控制收敛定理：

   (a) 对几乎处处的 x，有 $\psi_n(x) \to \psi(x)$。

   (b) 由于 X 是 $\mathcal{G}$-可测的，有 $\psi_n(X) \to \psi(X)$ 几乎处处。

   (c) 由条件期望的控制收敛定理，有

   $$E[\phi(X,Y)|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[\phi_n(X,Y)|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \psi_n(X) = \psi(X).$$

□

性质 1.1.7. 设 $\mathcal{G} = \sigma(B_1, B_2, \ldots)$，其中 $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = \Omega$，$B_i \in \mathbb{F}$，$P(B_i) > 0$，且当 $i \ne j$ 时 $B_i \cap B_j = \emptyset$。则

$$E[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^\infty \frac{E[XI_{B_i}]}{P(B_i)} I_{B_i}.$$

证明. 我们分步证明：

1. 令 $Y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E[XI_{B_i}]}{P(B_i)} I_{B_i}$。
2. 首先证明 Y 是 $\mathcal{G}$-可测的：
   (a) 由于 $\mathcal{G} = \sigma(B_1, B_2, \ldots)$，$\mathcal{G}$ 中的集合都是某些 B_i 的并。
   (b) Y 在每个 B_i 上取常数值 $\frac{E[XI_{B_i}]}{P(B_i)}$。
   (c) 因此 Y 是 $\mathcal{G}$-可测的。
3. 现在验证条件期望的积分条件：
   (a) 对任意 $B \in \mathcal{G}$，存在指标集 $J \subset \mathbb{N}$ 使得 $B = \bigcup_{j\in J} B_j$。
   (b) 计算左边：
   $$\int_B X dP = \sum_{j\in J} \int_{B_j} X dP = \sum_{j\in J} E[XI_{B_j}].$$
   (c) 计算右边：
   $$\int_B Y dP = \sum_{j\in J} \int_{B_j} Y dP = \sum_{j\in J} \frac{E[XI_{B_j}]}{P(B_j)} P(B_j) = \sum_{j\in J} E[XI_{B_j}].$$
   (d) 因此对任意 $B \in \mathcal{G}$，有
   $$\int_B X dP = \int_B Y dP.$$
4. 由条件期望的唯一性（在几乎处处意义下），得 $E[X|\mathcal{G}] = Y$。
5. 最后验证级数的收敛性：
   (a) 由于 $\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = 1$，且 $|E[XI_{B_i}]| \le E[|X|I_{B_i}]$。
   (b) 由 $E[|X|] < \infty$，保证级数在几乎处处意义下收敛。

□

1.1.3 过滤和停时

$\bigvee$ (σ-代数的并)

符号 $\bigvee$ 表示由一族 σ-代数生成的最小 σ-代数，它包含所有这些 σ-代数。

定义 1.1.21. 设 $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ 是一族 σ-代数，则

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i\right)$$

表示包含所有 $\mathcal{F}_i$ 的最小 σ-代数。

例 1.1.5. 在过滤的语境中：

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right)$$

表示到时刻 t 之前（不包括 t）所有信息的 σ-代数。

$\bigwedge$ (σ-代数的交)

符号 $\bigwedge$ 表示一族 σ-代数的交集。

定义 1.1.22. 设 $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ 是一族 σ-代数，则

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{F}_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$$

表示同时属于所有 $\mathcal{F}_i$ 的集合构成的 σ-代数。

例 1.1.6. 在过滤的语境中：

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigwedge_{s>t} \mathcal{F}_s = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

表示时刻 t 之后（包括任意接近 t 的未来）所有信息的交集。

注. 需要特别注意：

1. $\bigvee$ 生成的是更大的 σ-代数（包含更多信息）
2. $\bigwedge$ 得到的是更小的 σ-代数（包含更少信息）

在过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$ 中，显然有：

$$\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$$

这反映了信息随时间的增长：过去信息 $\subset$ 当前信息 $\subset$ 未来信息的交集。

例 1.1.7. 设 $\mathcal{F}_1 = \sigma(X)$，$\mathcal{F}_2 = \sigma(Y)$，则：

1. $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \sigma(X, Y)$ 包含关于 X 和 Y 的所有信息
2. $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ 只包含 X 和 Y 的共同信息

为了更细致地研究 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ 上的随机过程，只靠一个 σ-代数 $\mathbf{F}$ 是不够的。下面我们引入过滤（*filtration*），即 σ-代数流的概念。

定义 1.1.23. 概率空间 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ 上的过滤指的是一族递增的子 σ-代数 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$。也就是说，对任意的 $s < t$，都有 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$。

注. 如果我们把 σ-代数理解为信息的话，$\mathcal{F}_t$ 就表示在 t 时刻知道的所有信息。

定义 1.1.24. 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$ 和过程 X_t。称 X_t 是关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应（adapted）的，若对任意的 $t \geq 0$，有 $X_t \in \mathcal{F}_t$。

注. 任给一个过程 X_t，有一个自然适应的过滤，即它的自然过滤 $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \le t)$。为简单起见，今后我们提到过程时，总会预先假定一个适应的过滤，或者理解为过程的自然过滤。

定义 1.1.25. 给定一个过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$，我们可以定义另两个过滤：

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s \quad \text{和} \quad \mathcal{F}_{t+} = \bigwedge_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

显然的，$\bigvee_{t>0} \mathcal{F}_t = \bigvee_{t>1} \mathcal{F}_t = \bigvee_{t>0} \mathcal{F}_{t+}$，把这个 σ-代数记为 $\mathcal{F}_\infty$。我们总有 $\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$。一般的，这三个过滤可以两两不同。

定义 1.1.26. 称 $\{\mathcal{F}_t\}$ 右连续，若对任意 $t \ge 0$，有 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$。

注. 假定过滤的右连续性，可以使很多问题简化，在大多情况下，这对我们的研究也已经足够。

下面我们给出停时的定义：

定义 1.1.27. 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$，T 是取值于 $[0, \infty]$ 的随机变量。称 T 为关于过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的停时，或者 $\mathcal{F}_t$-停时，若对任意 t，有

$$\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

注. 注意，这里 T 可能以正概率取值 ∞。显然，固定时刻，即 $T \equiv t$，是停时。而停时是固定时刻自然的推广，这在后面的性质里可以看出来。

定理 1.1.16. 当过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$ 右连续时，停时定义中的 $\{T \le t\}$ 可以用 $\{T < t\}$ 代替，即 T 是停时当且仅当对任意 $t > 0$，$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$。

证明. 1. 先证必要性：假设对任意 t，$\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$，则

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ T \le t - \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

这里没有用到 $\mathcal{F}_t$ 的右连续性。

2. 再证充分性：假设对任意 t 都有 $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，

$$\{T \le t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ T < t + \frac{\varepsilon}{n} \right\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

由于这对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，有 $\{T \le t\} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_{t+}$。由过滤右连续性 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$，故 $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$。

□

推论 1.1.17. 当过滤 $\{\mathcal{F}_t\}$ 右连续时，T 是停时当且仅当过程 $X_t = I_{(0,T]}(t)$ 是适应的。

证明. 若 T 是停时，则对任意 $t>0$，

$$\{X_t=1\}=\{t\le T\}=\{T>t\}=\Omega\setminus\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t,$$

故 X_t 是适应的。反之，若 X_t 是适应的，则 $\{T<t\}=\bigcup_n\{X_{t-1/n}=1\}\in\mathcal{F}_t$，由定理知 T 是停时。 □

定义 1.1.28 (首达时与首中时). 我们举两个停时的例子。设 X 是轨道连续的随机过程，A 是闭集，记

$$D_A(\omega)=\inf\{t\ge 0: X_t(\omega)\in A\},$$

其中 $\inf(\emptyset)=\infty$。则 D_A 是关于自然过滤 $\mathcal{F}_t^0$ 的停时，称为 A 的首达时（*first passage time* 或 *entry time*）。

设 X 右连续，关于一个右连续的过滤 $\mathcal{F}_t$ 适应，A 是一个开集，定义

$$T_A=\inf\{t>0: X_t\in A\}.$$

则 T_A 是 $\mathcal{F}_t$-停时，称为 A 的首中时（*first hitting time*）。

首达时 D_A 是停时的证明. 设 d 为距离函数。对任意 $t\ge 0$，需要证明 $\{D_A\le t\}\in\mathcal{F}_t$。

关键观察：由于 X 轨道连续且 A 是闭集，过程在时间 $[0,t]$ 内进入 A 当且仅当它在 $[0,t]$ 内的有理时间点上无限接近 A。具体地：

$$\{D_A\le t\}=\left\{\omega:\inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]}d(X_s(\omega),A)=0\right\}.$$

证明细节：

- ♡ 若 $D_A(\omega)\le t$，则存在序列 $s_n\in[0,t]$ 使得 $d(X_{s_n}(\omega),A)\to 0$。由连续性，可在有理数中选取逼近序列，故 $\inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]}d(X_s(\omega),A)=0$。
- ♡ 反之，若 $\inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]}d(X_s(\omega),A)=0$，则存在有理序列 $s_n\in[0,t]$ 使得 $d(X_{s_n}(\omega),A)\to 0$。由 A 的闭性，存在收敛子列 $X_{s_{n_k}}(\omega)\to a\in A$，结合轨道连续性得 $D_A(\omega)\le t$。

由于对每个 $s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]$，$\{d(X_s,A)=0\}\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$，且可数交并运算保持可测性，故 $\{D_A\le t\}\in\mathcal{F}_t$。

注意：这里

$$\{D_A\le t\}\ne\bigcup_{s\in\mathbb{Q},s\le t}\{\omega:X_s(\omega)\in A\},$$

因为过程可能在无理时间点进入 A 而在所有有理时间点都不在 A 中。 □

首中时 T_A 是停时的证明. 设 X 轨道右连续，A 是开集，过滤 $\mathcal{F}_t$ 右连续。

关键观察：对于开集 A，右连续性保证了若过程在某个时刻进入 A，则它会在该时刻后的一个区间内停留在 A 中。因此：

$$\{T_A<t\}=\bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t)}\{X_s\in A\}.$$

证明细节：

♡ 若 $T_A(\omega) < t$，则存在 $s < t$ 使得 $X_s(\omega) \in A$。由右连续性，存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $r \in [s, s+\varepsilon)$，$X_r(\omega) \in A$。取有理数 $q \in (s, \min(s+\varepsilon, t))$，则 $X_q(\omega) \in A$，故 $\omega \in \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t)}\{X_s \in A\}$。

♡ 反之显然：若存在有理数 $s < t$ 使得 $X_s(\omega) \in A$，则 $T_A(\omega) \leq s < t$。

由于对每个 $s \in \mathbb{Q}\cap[0,t)$，$\{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$，故 $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}_t$。由过滤的右连续性，$\{T_A \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1}\{T_A < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$，因此 T_A 是 $\mathcal{F}_t$-停时。

进一步说明：特别地，T_A 是 $\mathcal{F}^0_{t+}$-停时。一般地，T_A 不是 $\mathcal{F}^0_t$-停时，这表明 $\mathcal{F}^0_t$ 严格包含于 $\mathcal{F}^0_{t+}$。 □

命题 1.1.18. 设 S, T, T_n 是 $\mathcal{F}_t$-停时。

1. 则 $T \vee S$, $T \wedge S$ 和 $\sup_n T_n$ 是停时。
2. 如果假设过滤 $\mathcal{F}_t$ 右连续，则 $\inf_n T_n$, $\liminf_n T_n$, $\limsup_n T_n$ 是停时。

证明. 1. 对于 $T \vee S$，注意到对任意 $t \geq 0$：

$$\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

因为 $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ 且 $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$。类似地，对于 $T \wedge S$：

$$\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

对于 $\sup_n T_n$：

$$\{\sup_n T_n \leq t\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

因为每个 $\{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$，且可数交运算保持可测性。

2. 在 $\mathcal{F}_t$ 右连续的假设下，我们证明 $\inf_n T_n$ 是停时。关键观察是：

$$\{\inf_n T_n < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

因为每个 $\{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t$，且可数并运算保持可测性。由 $\mathcal{F}_t$ 的右连续性，$\{\inf_n T_n \leq t\} = \bigcap_{m\geq 1}\{\inf_n T_n < t + \frac{1}{m}\} \in \mathcal{F}_t$。

对于 $\liminf_n T_n$ 和 $\limsup_n T_n$，注意到：

$$\liminf_n T_n = \sup_m \inf_{n\geq m} T_n, \quad \limsup_n T_n = \inf_m \sup_{n\geq m} T_n,$$

由前面结论和停时在可数上下确界运算下的封闭性即得。

□

命题 1.1.19. 对任意停时 T，都存在仅取有限个值的停时列 T_n，使得

$$T_n \downarrow T.$$

证明. 构造如下：对每个 $k\in\mathbb{N}$，定义

$$T_k=\begin{cases}\infty & \text{当}T\geq k,\\ q2^{-k} & \text{当}(q-1)2^{-k}\leq T<q2^{-k},\quad q=1,2,\dots,2^k k.\end{cases}$$

验证细节：

♡ **有限取值**：T_k 只取有限个值 $\{\infty\}\cup\{q2^{-k}:q=1,2,\dots,2^k k\}$。

♡ **停时性**：对任意 $t\geq 0$，

$$\{T_k\leq t\}=\bigcup_{q2^{-k}\leq t}\{(q-1)2^{-k}\leq T<q2^{-k}\}\cup\{T\geq k\}\in\mathcal{F}_t,$$

因为每个 $\{(q-1)2^{-k}\leq T<q2^{-k}\}=\{T<q2^{-k}\}\setminus\{T<(q-1)2^{-k}\}\in\mathcal{F}_{q2^{-k}}\subset\mathcal{F}_t$（当 $q2^{-k}\leq t$），且 $\{T\geq k\}=\Omega\setminus\{T<k\}\in\mathcal{F}_t$。

♡ **单调收敛**：由构造，$T_k\geq T_{k+1}\geq T$，且当 $k\to\infty$ 时，$T_k\downarrow T$，因为网格越来越细。

□

和固定时刻一样，对一个停时 T，我们也可以定义一个 σ-代数 $\mathcal{F}_T$，它包含 $\mathcal{F}_\infty$ 中所有满足条件 $A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ 的集合 A。$\mathcal{F}_T$ 可以理解为在 T 之前我们所能够观测到的信息。当 $T\equiv t$ 时，显然有 $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_t$。

命题 1.1.20. 设 S,T,T_n 是停时。

1. 若 $S\leq T$，则 $\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$。
2. 若 $\mathcal{F}_t$ 右连续，$T_n\downarrow T$，则
$$\bigcap_n\mathcal{F}_{T_n}=\mathcal{F}_T.$$

证明. 1. 设 $A\in\mathcal{F}_S$，要证 $A\in\mathcal{F}_T$，即对任意 $t\geq 0$，$A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$。

由于 $S\leq T$，有 $\{T\leq t\}\subset\{S\leq t\}$。于是

$$A\cap\{T\leq t\}=(A\cap\{S\leq t\})\cap\{T\leq t\}.$$

由 $A\in\mathcal{F}_S$ 知 $A\cap\{S\leq t\}\in\mathcal{F}_t$，又 $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$，故交集仍在 $\mathcal{F}_t$ 中。

2. 先证 $\mathcal{F}_T\subset\bigcap_n\mathcal{F}_{T_n}$。设 $A\in\mathcal{F}_T$，要证对每个 n，$A\in\mathcal{F}_{T_n}$，即 $A\cap\{T_n\leq t\}\in\mathcal{F}_t$。

由于 $T\leq T_n$，由 (i) 知 $\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{T_n}$，故 $A\in\mathcal{F}_{T_n}$。

再证 $\bigcap_n\mathcal{F}_{T_n}\subset\mathcal{F}_T$。设 $A\in\bigcap_n\mathcal{F}_{T_n}$，要证 $A\in\mathcal{F}_T$，即对任意 $t\geq 0$，$A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$。

利用 $\mathcal{F}_t$ 的右连续性，考虑：

$$A\cap\{T<t\}=\bigcup_n(A\cap\{T_n<t\}).$$

由 $A\in\mathcal{F}_{T_n}$ 知 $A\cap\{T_n<t\}\in\mathcal{F}_t$，故可数并在 $\mathcal{F}_t$ 中。于是

$$A\cap\{T\leq t\}=\bigcap_{m\geq 1}A\cap\{T<t+\tfrac{1}{m}\}\in\mathcal{F}_t,$$

因为每个 $A\cap\{T<t+\frac{1}{m}\}\in\mathcal{F}_{t+1/m}\subset\mathcal{F}_{t+}$，由右连续性 $\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$。

□

1.2 布朗运动

布朗运动（Brownian motion）是由于 1827 年英国植物学家布朗首次用显微镜观测到花粉颗粒在水中不规则运动而得名。1900 年，L. Bachelier 得到了从一点 x 出发的一维布朗运动的转移密度函数：

$$P_x(X_t \in dy) = p(t,x,y)dy, \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2,$$

其中

$$p(t,x,y) = \frac{e^{-(y-x)^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi t}}$$

是热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的 Green 函数。

Bachelier 还指出了布朗运动的马尔可夫性：

$$P_x(a_1 \le X_{t_1} < b_1, \ldots, a_n \le X_{t_n} < b_n)$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} p(t_1,x,\xi_1)p(t_2-t_1,\xi_1,\xi_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},\xi_n)d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

爱因斯坦（Einstein）在 1905 年的著名论文里从统计力学也给出了布朗运动的数学描述。维纳（Wiener）在 1923 年（Differential Space. J. Math. Phis. 2(1923) 132-174）在严格数学基础上构造了布朗运动，因此布朗运动也称为维纳过程。首次对布朗运动的性质进行深入研究的是法国著名概率学家 Lévy。

1.2.1 布朗运动的定义

我们先给出布朗运动的定义：

> **定义 1.2.1.** 称随机过程 B 是一维标准布朗运动，如果 B 轨道连续，$B_0 = 0$ $a.s.$，且对任意 $0 \le s < t$，增量 $B_t - B_s$ 是均值为 0，方差为 $t-s$，独立于 $(B_u, 0 \le u \le s)$ 的正态随机变量。

注. 简而言之，布朗运动满足：

1. B_t 连续
2. $B_0 = 0$
3. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ $\forall s < t$
4. $B_t - B_s$ 与 $\sigma(B_u, u \le s)$ 独立（即增量独立）

这样定义的布朗运动是否存在呢？我们介绍一种较为简单和直观的方法，利用随机游动来构造布朗运动。

例 1.2.1 (随机游动构造法). 定义一组独立同分布的随机变量 $\{X_i\}$，只取两个值：

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

每个变量表示一次投掷硬币的结果。显然，X_i 的均值为 0，而方差为 1。令

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

过程 M_k 就是*对称随机游动 (Symmetric Random Walk)*。根据中心极限定理，随机变量 $M_k/\sqrt{k}$ 的分布函数将趋于标准正态分布。
为了构造连续时间的布朗运动，我们需要对随机游动进行适当的缩放和时间变换。定义：

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{\lfloor nt \rfloor},$$

其中 $\lfloor nt \rfloor$ 表示不超过 nt 的最大整数。因为 M_n 仅定义在整数上，所以我们要取整。

证明符合布朗运动定义.

♡ **收敛性**：由中心极限定理，对每个固定的 $t > 0$，当 $n \to \infty$ 时，

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{\lfloor nt \rfloor} = \sqrt{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} \cdot \frac{M_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \xrightarrow{d} \sqrt{t} \cdot N(0,1) = N(0,t).$$

♡ **独立性**：对于 $0 \le s < t$，增量

$$B_t^{(n)} - B_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} X_j$$

与 $B_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor ns \rfloor} X_j$ 独立，因为求和区间不重叠且 X_j 相互独立。当 $n \to \infty$ 时，$B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, t-s)$ 且保持独立性。

♡ **轨道连续性**：通过 Donsker 不变原理，可以证明缩放随机游动 $B_t^{(n)}$ 的分布弱收敛到布朗运动，其轨道几乎必然连续。

因此，极限过程 $B_t = \lim_{n\to\infty} B_t^{(n)}$ 满足布朗运动的定义：轨道连续、$B_0 = 0$、增量独立且服从正态分布 $N(0, t-s)$。 □

命题 1.2.1. 设 B 是一维标准布朗运动，那么

$$E(B_s B_t) = \min\{s, t\}.$$

证明. 不妨设 $s < t$
我们将 B_t 分解为独立的两部分：

$$B_t = (B_t - B_s) + B_s.$$

于是

$$B_s B_t = B_s(B_t - B_s) + B_s^2.$$

取数学期望：

$$E(B_sB_t) = E[B_s(B_t - B_s)] + E(B_s^2).$$

由于 $B_t - B_s$ 是布朗运动在区间 $[s, t]$ 上的增量，根据布朗运动的定义，这个增量独立于过程在时间 s 之前的历史，特别地独立于 B_s。同时，$E(B_t - B_s) = 0$。因此：

$$E[B_s(B_t - B_s)] = E(B_s)E(B_t - B_s) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$E(B_s^2) = \mathrm{Var}(B_s)$，因为 $E(B_s) = 0$。根据布朗运动的定义，$\mathrm{Var}(B_s) = s$。

综上：

$$E(B_sB_t) = 0 + s = s = \min\{s, t\}.$$

□

定理 1.2.2. 设 B 是一维标准布朗运动，则下列结论成立：

1. (时间齐次性) 对任意 $s > 0$，$(B_{t+s} - B_s, t \geq 0)$ 也是一维标准布朗运动，且独立于 $\sigma(B_u, 0 \leq u \leq s)$。
2. (对称性) $(-B_t, t \geq 0)$ 是一维标准布朗运动。
3. (尺度不变性) 对任意 $c > 0$，过程 $(cB_{t/c^2}, t \geq 0)$ 是一维标准布朗运动。
4. (时间反转) 令 $X_0 = 0$, $X_t = tB_{1/t}$ 对 $t > 0$，则过程 X_t 也是一维标准布朗运动。

证明. 我们逐一详细证明：

1. 时间齐次性

   定义新过程：$\tilde{B}_t = B_{t+s} - B_s$，其中 $s > 0$ 固定。

   需要验证 $\tilde{B}$ 满足布朗运动的所有条件：

   ♡ **初始条件**：$\tilde{B}_0 = B_s - B_s = 0$ a.s.

   ♡ **轨道连续性**：由于 B 的轨道连续，$\tilde{B}_t = B_{t+s} - B_s$ 作为连续函数的平移差，轨道也是连续的。

   ♡ **正态增量**：对任意 $0 \leq t_1 < t_2$，有

   $$\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1} = (B_{t_2+s} - B_s) - (B_{t_1+s} - B_s) = B_{t_2+s} - B_{t_1+s}.$$

   由于 B 是布朗运动，$B_{t_2+s} - B_{t_1+s} \sim N(0, (t_2 + s) - (t_1 + s)) = N(0, t_2 - t_1)$。

   ♡ **独立增量**：对任意 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，考虑增量序列：

   $$\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1}, \tilde{B}_{t_3} - \tilde{B}_{t_2}, \ldots, \tilde{B}_{t_n} - \tilde{B}_{t_{n-1}}.$$

   这些增量分别等于：

   $$B_{t_2+s} - B_{t_1+s}, B_{t_3+s} - B_{t_2+s}, \ldots, B_{t_n+s} - B_{t_{n-1}+s}.$$

   由于 B 有独立增量，且这些区间 $[t_1 + s, t_2 + s], [t_2 + s, t_3 + s], \ldots, [t_{n-1} + s, t_n + s]$ 互不相交，所以这些增量相互独立。

♡ **与 $\sigma(B_u, 0 \le u \le s)$ 的独立性**：对任意 $0 \le u_1 < u_2 < \cdots < u_m \le s$ 和 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，考虑随机向量：

$$(B_{u_1}, \ldots, B_{u_m}) \quad 和 \quad (\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_n}).$$

由于 $\tilde{B}_{t_j} = B_{t_j+s} - B_s$，且增量 $B_{t_j+s} - B_s$ 独立于 $\sigma(B_u, 0 \le u \le s)$，所以这两个随机向量独立。

2. 对称性

定义新过程：$\tilde{B}_t = -B_t$。

验证布朗运动条件：

♡ **初始条件**：$\tilde{B}_0 = -B_0 = 0$ a.s.

♡ **轨道连续性**：由于 B 轨道连续且取负号保持连续性，故 $\tilde{B}$ 轨道连续。

♡ **正态增量**：对任意 $0 \le s < t$，有

$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = -B_t - (-B_s) = -(B_t - B_s).$$

由于 $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$，所以 $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s \sim N(0, t-s)$。

♡ **独立增量**：对任意 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，增量序列：

$$\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1}, \tilde{B}_{t_3} - \tilde{B}_{t_2}, \ldots, \tilde{B}_{t_n} - \tilde{B}_{t_{n-1}}$$

等于：

$$-(B_{t_2} - B_{t_1}), -(B_{t_3} - B_{t_2}), \ldots, -(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

由于 B 的增量相互独立，且常数乘法不改变独立性，所以 $\tilde{B}$ 的增量也相互独立。

3. 尺度不变性

定义新过程：$\tilde{B}_t = cB_{t/c^2}$，其中 $c > 0$。

验证布朗运动条件：

♡ **初始条件**：$\tilde{B}_0 = cB_0 = 0$ a.s.

♡ **轨道连续性**：由于 B 轨道连续，且 $t \mapsto t/c^2$ 是连续函数，所以复合函数 $t \mapsto B_{t/c^2}$ 连续，再乘以常数 c 仍连续。

♡ **正态增量**：对任意 $0 \le s < t$，有

$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = cB_{t/c^2} - cB_{s/c^2} = c(B_{t/c^2} - B_{s/c^2}).$$

由于 $B_{t/c^2} - B_{s/c^2} \sim N(0, t/c^2 - s/c^2) = N(0, (t-s)/c^2)$，所以

$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s \sim c \cdot N(0, (t-s)/c^2) = N(0, c^2 \cdot (t-s)/c^2) = N(0, t-s).$$

♡ **独立增量**：对任意 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，增量序列：

$$\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1}, \tilde{B}_{t_3} - \tilde{B}_{t_2}, \ldots, \tilde{B}_{t_n} - \tilde{B}_{t_{n-1}}$$

等于：

$$c(B_{t_2/c^2} - B_{t_1/c^2}), c(B_{t_3/c^2} - B_{t_2/c^2}), \ldots, c(B_{t_n/c^2} - B_{t_{n-1}/c^2}).$$

由于 B 在区间 $[t_1/c^2, t_2/c^2], [t_2/c^2, t_3/c^2], \ldots$ 上的增量相互独立，且常数乘法不改变独立性，所以 $\tilde{B}$ 的增量也相互独立。

4. 时间反转

定义：$X_0=0$，对 $t>0$ 定义 $X_t=tB_{1/t}$。

- ♡ **轨道连续性**：
  - 对 $t>0$，$X_t=tB_{1/t}$ 是连续函数，因为 B 连续且 $t\mapsto 1/t$ 在 $t>0$ 时连续。
  - 在 $t=0$ 处：由布朗运动的大数定律，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t}=0\quad \text{a.s.}$$

令 $u=1/t$，则当 $t\to 0^+$ 时，$u\to\infty$，于是

$$\lim_{t\to 0^+}X_t=\lim_{t\to 0^+}tB_{1/t}=\lim_{u\to\infty}\frac{B_u}{u}=0\quad \text{a.s.}$$

所以 X_t 在 $t=0$ 处连续。

- ♡ **高斯性**：由于布朗运动是高斯过程，且 X_t 是 $B_{1/t}$ 的线性变换，所以 X 也是高斯过程。
- ♡ **均值函数**：

$$E(X_t)=tE(B_{1/t})=t\cdot 0=0.$$

- ♡ **协方差函数**：对 $0<s\le t$，

$$\mathrm{Cov}(X_s,X_t)=E(X_sX_t)=E(sB_{1/s}\cdot tB_{1/t})=st\cdot E(B_{1/s}B_{1/t}).$$

由于 $1/s\ge 1/t$，由 proposition 1.2.1 得：

$$E(B_{1/s}B_{1/t})=\min\{1/s,1/t\}=1/t.$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X_s,X_t)=st\cdot(1/t)=s=\min\{s,t\}.$$

同理，对 $0<t\le s$，可得 $\mathrm{Cov}(X_s,X_t)=t=\min\{s,t\}$。

由于 X 是零均值高斯过程，且协方差函数与布朗运动相同，所以 X 与 B 有相同的有限维分布，因此 X 是标准布朗运动。

□

定义 1.2.2 (随机过程的修正). 设 $X=\{X_t\}_{t\in T}$ 和 $Y=\{Y_t\}_{t\in T}$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的两个随机过程。如果对每个 $t\in T$，都有

$$P(X_t=Y_t)=1,$$

则称 Y 是 X 的一个 修正（version） 或 修正过程。
换言之，两个过程在任意固定时刻 t 以概率 1 相等，但它们的轨道（样本路径）可能在不同。

定义 1.2.3 (不可区分过程). 如果

$$P(X_t = Y_t \text{ 对所有} t \in T) = 1,$$

则称 X 和 Y 是不可区分（indistinguishable）的。

注. 关于修正:

1. **修正**只要求每个固定时刻以概率 1 相等，但可能在某些 $\omega \in \Omega$ 上，$X_\cdot(\omega)$ 和 $Y_\cdot(\omega)$ 作为函数不同。
2. **不可区分**要求几乎必然地，两个过程的所有轨道完全相同。
3. 如果两个过程都是连续过程的修正，则它们是不可区分的。

1.2.2 布朗运动的轨道性质

从上一节我们已经知道布朗运动轨道是连续的。这节我们将进一步研究它的局部性质。

定义 1.2.4 (局部 Hölder 连续). 称函数 f 局部 α-阶 Hölder 连续，若对任意 $L > 0$,

$$\sup\left\{\frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} : |t| \le L, |s| \le L, t \ne s\right\} < \infty.$$

下面我们来研究布朗运动轨道的 Hölder 连续的阶数。

定理 1.2.3. 考虑随机过程 $\{X_t, 0 \le t \le 1\}$。假设存在正常数 γ, C, ϵ 使得对任意 $0 \le t, s \le 1$,

$$E[|X_t - X_s|^\gamma] \le C|t-s|^{1+\epsilon}.$$

则存在 X 的修正 $\tilde{X}$ 满足

$$E\left[\left(\sup_{s\ne t}\frac{|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] < \infty,$$

其中 $\alpha \in [0, \epsilon/\gamma)$ 为任意常数。特别的，$\tilde{X}$ 所有轨道 α-阶 Hölder 连续。

注. “存在 X 的修正 $\tilde{X}$”意味着我们可以找到一个与 X 有相同有限维分布的过程 $\tilde{X}$（因此是 X 的修正），且 $\tilde{X}$ 具有更好的轨道正则性（α-阶 Hölder 连续性）。

定理 1.2.4. 对任意 $\alpha < 1/2$，一维标准布朗运动的轨道局部 α-阶 Hölder 连续。

证明. 对任意 $\alpha < 1/2$，取 $p > 1$ 使得 $\alpha < \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$。

由于布朗运动的增量服从正态分布，对于任意 $0 \le s, t \le 1$，有

$$B_t - B_s \sim N(0, |t-s|).$$

利用正态分布的矩性质，存在常数 $C_p > 0$ 使得

$$E[|B_t - B_s|^{2p}] = C_p|t-s|^p.$$

现在验证 theorem 1.2.3 的条件：

♡ 取 $\gamma = 2p$

♡ 取 $\epsilon = p-1$（因为 $|t-s|^{1+\epsilon} = |t-s|^p$）

♡ 则 $\epsilon/\gamma = \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$

由于 $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} = \epsilon/\gamma$，由 theorem 1.2.3 可知，存在布朗运动的修正（实际上就是布朗运动本身，因为我们已经知道布朗运动轨道连续）满足

$$E\left[\left(\sup_{s\neq t} \frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^{2p}\right] < \infty.$$

特别地，对任意 $L > 0$，

$$\sup\left\{\frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^\alpha} : |t| \le L, |s| \le L, t \neq s\right\} < \infty \quad \text{a.s.},$$

即布朗运动的轨道局部 α-阶 Hölder 连续。 □

1.2.3 布朗运动的变差性质

布朗运动一个重要的性质是具有有限的二次变差，我们先回忆变差（一次变差）的定义：

定义 1.2.5 (一次变差). 定义在 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 上右连续的实值函数 A_t。对 $[0,t]$ 上的划分 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$，记

$$S_t^\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|.$$

为 一次变差.

定义 1.2.6 (有限变差函数). 称 A 为 有限变差函数，若对任意 $t > 0$，都有

$$S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty.$$

我们再来看二次变差的定义：

定义 1.2.7 (二次变差). 设 $\Delta = 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ 是 $[0,t]$ 的一个分划，记

$$T_t^\Delta = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

为 二次变差.

注. 跟一次变差不同，当 Δ' 是 Δ 的一个加细时，不一定有 $T_t^{\Delta'} \ge T_t^\Delta$。

定义 1.2.8 (有限二次变差过程)**.** 称过程 X 具有有限的二次变差，若存在一个有限的过程 $\langle X, X\rangle$，使对任意 $t>0$，以及 $[0,t]$ 的任意分划序列 Δ_n，当 $|\Delta_n|\to 0$ 时，$T_t^{\Delta_n}$ 依概率收敛到 $\langle X, X\rangle_t$。过程 $\langle X, X\rangle$ 称为 X 的二次变差过程。

定理 1.2.5. 布朗运动 B 具有有限的二次变差 $\langle B, B\rangle_t = t$。

证明. 设 $\Delta_n: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 是 $[0,t]$ 的一个分划序列，且当 $n\to\infty$ 时，$|\Delta_n| = \max_i(t_{i+1}-t_i)\to 0$。

定义二次变差和:

$$T_t^{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2.$$

由于 $B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\sim N(0, t_{i+1}-t_i)$，有:

- ♡ $E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2] = t_{i+1}-t_i$
- ♡ $\mathrm{Var}[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2] = E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^4]-(t_{i+1}-t_i)^2$

利用正态分布的四阶矩公式 $E[Z^4]=3\sigma^4$（当 $Z\sim N(0,\sigma^2)$），可得:

$$E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^4] = 3(t_{i+1}-t_i)^2,$$

所以

$$\mathrm{Var}[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2] = 3(t_{i+1}-t_i)^2-(t_{i+1}-t_i)^2 = 2(t_{i+1}-t_i)^2.$$

现在计算:

$$E[T_t^{\Delta_n}-t] = \sum_{i=0}^{n-1}E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2]-t = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)-t = 0.$$

计算方差:

$$\begin{aligned}
E[(T_t^{\Delta_n}-t)^2] &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}((B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2-(t_{i+1}-t_i))\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}E[((B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2-(t_{i+1}-t_i))^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Var}[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}2(t_{i+1}-t_i)^2 \\
&\le 2|\Delta_n|\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) = 2t|\Delta_n|.
\end{aligned}$$

当 $|\Delta_n|\to 0$ 时，$E[(T_t^{\Delta_n}-t)^2]\to 0$，即 $T_t^{\Delta_n}\to t$ 在 L^2 意义下收敛，从而也依概率收敛。 □

推论 1.2.6. 在任意区间上，布朗运动几乎所有的轨道都具有无限的变差。

证明. 任取区间 $[p,q]$，记 $V(\omega)$ 为轨道 $B_t(\omega)$ 在 $[p,q]$ 的变差。由 theorem 1.2.5，存在 $[p,q]$ 的一个分划序列 Δ_n，满足当 $n\to\infty$ 时 $|\Delta_n|\to 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega))^2=q-p,\quad \omega\in\Omega_0,$$

其中 $P(\Omega_0)=1$，k_n 是分划 Δ_n 的子区间个数。

关键不等式：对于每个分划 Δ_n，有

$$\sum_{i=0}^{k_n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega))^2\le\left(\max_{0\le i\le k_n-1}|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)|\right)\cdot V(\omega).$$

这是因为：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k_n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega))^2&\le\sum_{i=0}^{k_n-1}|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)|\cdot\max_{0\le j\le k_n-1}|B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)|\\&=\left(\max_{0\le i\le k_n-1}|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)|\right)\cdot\sum_{i=0}^{k_n-1}|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)|\\&\le\left(\max_{0\le i\le k_n-1}|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)|\right)\cdot V(\omega).\end{aligned}$$

现在假设存在 $\omega\in\Omega_0$ 使得 $V(\omega)<\infty$。由于布朗运动轨道连续且在紧区间 $[p,q]$ 上一致连续，当 $|\Delta_n|\to 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le i\le k_n-1}|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)|=0.$$

于是由上述不等式可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega))^2=0.$$

但这与 theorem 1.2.5的结论（该极限等于 $q-p>0$）矛盾。

因此，对任意 $\omega\in\Omega_0$，都有 $V(\omega)=\infty$，即布朗运动在任意区间上几乎必然具有无限变差。 □

推论 1.2.7. 布朗运动几乎所有的轨道无处可微。

证明. 采用反证法。假设存在 $t_0\in(0,\infty)$ 和样本点 $\omega\in\Omega$（$P(\omega)>0$）使得 $B_t(\omega)$ 在 t_0 处可微。

由可微性的定义，存在 $\delta>0$ 和常数 $M>0$，使得对任意 $s\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$，有

$$|B_s(\omega)-B_{t_0}(\omega)|\le M|s-t_0|.$$

特别地，对任意 $u,v\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$，有

$$|B_u(\omega)-B_v(\omega)|\le|B_u(\omega)-B_{t_0}(\omega)|+|B_v(\omega)-B_{t_0}(\omega)|\le M(|u-t_0|+|v-t_0|)\le 2M\delta.$$

现在考虑区间 $I=[t_0-\delta,t_0+\delta]$ 上的任意分划 $\Delta: t_0-\delta=s_0<s_1<\cdots<s_m=t_0+\delta$。对于该分划的二次变差和，有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}(B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega))^2&\le\max_{0\le j\le m-1}|B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega)|\cdot\sum_{j=0}^{m-1}|B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega)|\\&\le\max_{0\le j\le m-1}|B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega)|\cdot V_I(\omega),\end{aligned}$$

其中 $V_I(\omega)$ 是 $B_t(\omega)$ 在区间 I 上的变差。

由可微性假设，存在常数 $M>0$ 使得对充分细的分划（$|\Delta|$ 充分小），有

$$|B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega)|\le M|s_{j+1}-s_j|\le M|\Delta|.$$

因此

$$\sum_{j=0}^{m-1}(B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega))^2\le M|\Delta|\cdot V_I(\omega).$$

现在取一列分划 $\{\Delta_n\}$ 满足 $|\Delta_n|\to 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{m_n-1}(B_{s_{j+1}}(\omega)-B_{s_j}(\omega))^2=0.$$

然而，由 theorem 1.2.5，布朗运动在区间 I 上的二次变差应为

$$\langle B,B\rangle_I=(t_0+\delta)-(t_0-\delta)=2\delta>0.$$

这就产生了矛盾。

因此，布朗运动几乎所有的轨道在任意点 $t_0>0$ 处都不可微。对于 $t_0=0$，由 $B_0=0$ 和布朗运动的性质同样可证不可微性。 $\square$

1.3 鞅

鞅 *(martingale)* 是一类基本的随机过程，在概率论各个分支有着众多的应用。与分析的联系尤为紧密，布朗运动是最重要的鞅。这一章我们研究鞅的基本理论，并用来研究布朗运动的性质。

1.3.1 鞅的定义、极大值不等式

假设 $\{F_t\}_{t\in T}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上一个过滤，其中 $T=\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{R}_+$。下面我们引入鞅的概念。

定义 1.3.1. 设 $(X_t,t\in T)$ 是 F_t-适应的实值过程。称 X 是一个 F_t-下鞅(submartingale)，如果：

1. 对任意 $t\in T$, $E[|X_t|]<\infty$
2. 对任意 $s<t$, $E[X_t|F_s]\geq X_s$ $a.s.$

称 X 是一个 F_t-上鞅（supermartingale），如果 $-X$ 是 F_t-下鞅。一个过程如果既是下鞅又是上鞅，我们称它为鞅（martingale）。

注. 在鞅的定义中，概率 P 和过滤 F_t 是很重要的。一个 F_t-鞅一定是关于它自然过滤的鞅，反之不然。

命题 1.3.1. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动，及 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 是它的自然过滤。则下列过程是 $\mathcal{F}_t$-鞅：

1. B_t,
2. B_t^2-t,
3. $M_t^a=\exp\left(aB_t-\frac{a^2}{2}t\right)$, $a\in\mathbb{R}$。

证明.

1. B_t 是鞅

   由于 $B_t\sim N(0,t)$，故：

$$E[|B_t|]=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=2\int_0^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx$$

   令 $u=\frac{x^2}{2t}$，则 $du=\frac{x}{t}dx$，可得：

$$E[|B_t|]=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\cdot\frac{t}{2}\int_0^{\infty}e^{-u}du=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}<\infty$$

   对任意 $0\leq s<t$，我们将 B_t 分解为：

$$B_t=(B_t-B_s)+B_s$$

由布朗运动的独立增量性，$B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，且 $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$。因此：

$$\begin{aligned} E[B_t|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s) + B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= 0 + B_s = B_s \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

综上，B_t 满足鞅的定义条件。

注. 若 X 关于 $\mathcal{G}$ 可测，则 $E[X|\mathcal{G}] = X$。一般的，若 Y 是 $\mathcal{G}$-可测且 XY 可积，则 $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$。故我们有：

- ♡ 由 B_s 关于 $\mathcal{F}_s$ 可测，我们可得：$E[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$
- ♡ 由布朗运动的独立增量性，$B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，我们可得：$E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s]$

2. $B_t^2 - t$ 是鞅

由于 $B_t \sim N(0, t)$，故：

$$E[|B_t^2 - t|] \leq E[B_t^2] + t = t + t = 2t < \infty$$

对任意 $0 \leq s < t$，我们将 B_t 表示为：

$$B_t = (B_t - B_s) + B_s$$

则：

$$\begin{aligned} B_t^2 &= (B_t - B_s + B_s)^2 \\ &= (B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 \end{aligned}$$

取条件期望：

$$\begin{aligned} E[B_t^2|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + E[2B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + E[B_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2] + 2B_s E[B_t - B_s] + B_s^2 \\ &= (t - s) + 2B_s \cdot 0 + B_s^2 \\ &= B_s^2 + (t - s) \end{aligned}$$

注. ♡ $E[(B_t - B_s)^2] = Var(B_t - B_s) - (E[B_t - B_s])^2 = Var(B_t - B_s) = t - s$

因此：

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t^2|\mathcal{F}_s] - t \\ &= [B_s^2 + (t - s)] - t \\ &= B_s^2 - s \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

这正是 $X_s = B_s^2 - s$，故 $B_t^2 - t$ 是鞅。

3. $M_t^a = \exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right)$ 是鞅

由于 $B_t \sim N(0,t)$，故：

$$\begin{aligned} E[|M_t^a|] &= E\left[\exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right)\right] \\ &= e^{-\frac{a^2}{2}t} E\left[e^{aB_t}\right] \\ &= e^{-\frac{a^2}{2}t} \cdot e^{\frac{a^2 t}{2}} = 1 < \infty \end{aligned}$$

注. 利用正态分布的矩母函数公式：若 $X \sim N(0,\sigma^2)$，则 $E[e^{aX}] = e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}$。这里 $B_t \sim N(0,t)$，故：

$$E[e^{aB_t}] = e^{\frac{a^2 t}{2}}$$

对任意 $0 \le s < t$，我们将 M_t^a 重写为：

$$\begin{aligned} M_t^a &= \exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right) \\ &= \exp\left(a(B_t - B_s) + aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \\ &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \cdot \exp\left(a(B_t - B_s)\right) \end{aligned}$$

取条件期望：

$$E[M_t^a|\mathcal{F}_s] = \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \cdot E\left[\exp\left(a(B_t - B_s)\right) \Big| \mathcal{F}_s\right]$$

由布朗运动的独立增量性，$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ 且与 $\mathcal{F}_s$ 独立，故：

$$E\left[\exp\left(a(B_t - B_s)\right) \Big| \mathcal{F}_s\right] = E\left[\exp\left(a(B_t - B_s)\right)\right]$$

再次利用正态分布的矩母函数公式：

$$E\left[\exp\left(a(B_t - B_s)\right)\right] = \exp\left(\frac{a^2}{2}(t-s)\right)$$

代入得：

$$\begin{aligned} E[M_t^a|\mathcal{F}_s] &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \cdot \exp\left(\frac{a^2}{2}(t-s)\right) \\ &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{2}s\right) \\ &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}s\right) = M_s^a \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

因此 M_t^a 是鞅。

□

上面都是轨道连续鞅的例子。设 Y 是一个可积随机变量，则 $X_t = E[Y|\mathcal{F}_t]$ 是一个鞅。后边将会看到，有一大类鞅都有这样的构造。

这是由于：

♡ $E|X_t| = E|E[Y \mid \mathcal{F}_t]| \le E(E(|Y| \mid \mathcal{F}_t)) = E(Y) < +\infty$

♡ $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = E(E(Y \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(Y \mid \mathcal{F}_s) = X_s$

注. 设 X 是一个鞅或非负下鞅，$p \geq 1$。如果对任意 t，$|X_t|^p$ 可积，则由 Jensen 不等式，$|X_t|^p$ 是一个下鞅。

这是由于：

$$E(|X_t|^p \mid \mathcal{F}_s) \geq |E(x_t \mid \mathcal{F}_s)| = |X_s|^p$$

其中：

$$\begin{aligned} E(X_t \mid \mathcal{F}_s) &= E(X_t - X_s + X_s \mid \mathcal{F}_s) \\ &= E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) + E(X_s \mid \mathcal{F}_s) \\ &= E(X_s \mid \mathcal{F}_s) = X_s \end{aligned}$$

引理 1.3.2. $\forall m < n, m, n \in \mathbb{N}^+$

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \iff E(X_n \mid F_m) = X_m$$

证明. $\Leftarrow$: 显然，取 $m = n-1$ 即可.

$\Rightarrow$: $E(X_n \mid \mathcal{F}_m) = E(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_m) = E(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_m) = \cdots = E(X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) = X_m$

注. 这里用到：塔性质 *(Tower Property)*:

设 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 是 $\mathbb{F}$ 的两个子 σ-代数，且 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$，则 $E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1]$。

□

命题 1.3.3. 设 $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ 是一个 $\mathcal{F}_n$-(下) 鞅，$(H_n)_{n=1,2,\ldots}$ 是一个有界（非负）随机过程，且 $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$。定义过程 Y 如下：

$$Y_0 = X_0, \quad Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1})$$

则 Y 是一个（下）鞅。特别地，若 T 是一个停时，则停止过程 X^T 也是（下）鞅。

证明.

1. 验证 Y_n 的可积性

   由于 H_n 有界，存在常数 $M > 0$ 使得 $|H_n| \leq M$ 对任意 $n \geq 1$ 成立。由数学归纳法：

   $$\begin{aligned} E[|Y_n|] &= E\left[|Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1})|\right] \\ &\leq E[|Y_{n-1}|] + M(E[|X_n|] + E[|X_{n-1}|]) < \infty \end{aligned}$$

   因此 Y_n 可积。

2. 验证 Y 的适应性

   由定义 $Y_0 = X_0 \in \mathcal{F}_0$。假设 $Y_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$，由于 $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ 且 $X_n \in \mathcal{F}_n$，有：

   $$Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}) \in \mathcal{F}_n$$

   由数学归纳法，Y 是 $\mathcal{F}_n$-适应的。

3. 验证鞅/下鞅性质

计算条件期望：

$$\begin{aligned} E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E[Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= Y_{n-1} + H_n E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \end{aligned}$$

分两种情况讨论：

♡ 若 X 是鞅：

$$E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = 0$$

因此 $E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1}$。由 lemma 1.3.2，这等价于对任意 $m < n$ 有 $E[Y_n|\mathcal{F}_m] = Y_m$，故 Y 是鞅。

♡ 若 X 是下鞅且 $H_n \geq 0$：

$$E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \geq 0$$

由于 $H_n \geq 0$，有：

$$E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1} + H_n E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \geq Y_{n-1}$$

由 lemma 1.3.2，这等价于对任意 $m < n$ 有 $E[Y_n|\mathcal{F}_m] \geq Y_m$，故 Y 是下鞅。

4. 停止过程的情形

取 $H_n = 1_{\{n\leq T\}}$，其中 T 是停时。由于 $\{n \leq T\} = \{T < n\}^c$ 且 T 是停时，有 $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$。此时：

$$\begin{aligned} Y_n &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k\leq T\}}(X_k - X_{k-1}) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{n\wedge T}(X_k - X_{k-1}) = X_{n\wedge T} = X_n^T \end{aligned}$$

即停止过程 $X^T = H \cdot X$。由前三步的结论，X^T 是（下）鞅。

注. 这样定义的过程 Y 称为 H 关于 X 的随机积分，记为 $H \cdot X$。

□

命题 1.3.4. 设 X_n 是 F_n-鞅，S 和 T 是有界停时，$S \leq T$。则

$$X_S = E[X_T|F_S] \quad a.s. \tag{1.12}$$

进而，一个适应可积过程 X 是鞅当且仅当对任意有界停时 T，

$$E[X_T] = E[X_0]. \tag{1.13}$$

证明. 我们分两部分详细证明这个命题。

1. *证明 (1.12) $X_S = E[X_T|F_S]$ a.s.*

   设 $S \leq T \leq M$，其中 M 是常数。我们需要证明对于任意 $A \in F_S$，有

$$E[X_T 1_A] = E[X_S 1_A].$$

   (a) *构造辅助停时*：对任意 $A \in F_S$，定义

$$S_A = \begin{cases} S, & \omega \in A \\ M, & \omega \notin A \end{cases}$$

$$T_A = \begin{cases} T, & \omega \in A \\ M, & \omega \notin A \end{cases}$$

   (b) *验证 S_A 和 T_A 是停时*：对于 S_A，对任意 $n \geq 0$，

$$\{S_A \leq n\} = (\{S \leq n\} \cap A) \cup (\{M \leq n\} \cap A^c).$$

   由于 $A \in F_S$，根据停时 σ-代数的定义，有 $A \cap \{S \leq n\} \in F_n$。又因为 M 是常数，$\{M \leq n\} \in F_n$。因此 $\{S_A \leq n\} \in F_n$，即 S_A 是停时。同理可证 T_A 是停时。

   (c) *应用 proposition 1.3.3*：由 proposition 1.3.3，停止过程 X^{T_A} 和 X^{S_A} 都是鞅。特别地，作为鞅，它们满足

$$E[(X^{T_A})_M] = E[(X^{T_A})_0] = E[X_0],$$

$$E[(X^{S_A})_M] = E[(X^{S_A})_0] = E[X_0].$$

   (d) *计算期望*：直接计算得

$$E[X_{T_A}] = E[X_T \cdot 1_A + X_M \cdot 1_{A^c}],$$
$$E[X_{S_A}] = E[X_S \cdot 1_A + X_M \cdot 1_{A^c}].$$

   由于 $E[X_{T_A}] = E[X_{S_A}] = E[X_0]$，比较两式可得

$$E[X_T \cdot 1_A] = E[X_S \cdot 1_A] \quad \text{对任意} A \in F_S.$$

   (e) *得出结论*：上式表明 X_S 是 X_T 关于 F_S 的条件期望，即

$$X_S = E[X_T|F_S] \quad \text{a.s.}$$

2. *证明等价条件 (1.13)*

   (a) *($\Rightarrow$) 方向*：假设 X 是鞅，T 是有界停时，$T \leq M$。由 proposition 1.3.3，停止过程 X^T 是鞅，因此

$$E[X_T] = E[(X^T)_M] = E[(X^T)_0] = E[X_0].$$

   注. 我们给出详细解释:

i. $E[X_T] = E[(X^T)_M]$:
根据停止过程的定义，对于停止过程 X^T，有

$$(X^T)_n = X_{T\wedge n}.$$

特别地，当 $n = M$ 时，由于 $T \le M$，我们有 $T \wedge M = T$，因此

$$(X^T)_M = X_{T\wedge M} = X_T.$$

所以

$$E[X_T] = E[(X^T)_M].$$

ii. $E[(X^T)_M] = E[(X^T)_0]$:
由 *proposition 1.3.3*, 如果 X 是鞅, 那么停止过程 X^T 也是鞅。由 *lemma 1.3.2*, 对于任意 $n \ge 0$，有

$$E[(X^T)_n] = E[(X^T)_0].$$

特别地，取 $n = M$，得到

$$E[(X^T)_M] = E[(X^T)_0].$$

iii. $E[(X^T)_0] = E[X_0]$:
根据停止过程的定义，在时间 0 有

$$(X^T)_0 = X_{T\wedge 0} = X_0,$$

因为 $T \wedge 0 = 0$（停时 T 取值非负）。因此

$$E[(X^T)_0] = E[X_0].$$

综合以上三步，我们得到完整的等式链：

$$E[X_T] = E[(X^T)_M] = E[(X^T)_0] = E[X_0].$$

这个结果说明：对于鞅过程，在任何有界停时处的期望值都等于初始时刻的期望值。

(b) *($\Leftarrow$) 方向*：假设对任意有界停时 T，有 $E[X_T] = E[X_0]$。要证明 X 是鞅，即对任意 $0 \le m < n$，有

$$X_m = E[X_n|F_m] \quad \text{a.s.}$$

i. 构造特殊停时：对任意 $A \in F_m$，定义停时

$$T = \begin{cases} m, & \omega \in A \\ n, & \omega \notin A \end{cases}$$

ii. 验证 T 是停时：对任意 $k \ge 0$，

$$\{T \le k\} = \begin{cases} \emptyset, & k < m \\ A, & m \le k < n \\ \Omega, & k \ge n \end{cases}$$

当 $m \le k < n$ 时，由于 $A \in F_m \subset F_k$，故 $\{T \le k\} = A \in F_k$；当 $k \ge n$ 时，$\{T \le k\} = \Omega \in F_k$。因此 T 是停时，且 $T \le n$ 是有界停时。

iii. 应用假设条件：由假设，对于停时 T 有 $E[X_T]=E[X_0]$。另外，考虑常值停时 $T'\equiv n$，这也是有界停时，由假设有 $E[X_n]=E[X_0]$。

iv. 计算比较：直接计算得

$$E[X_T]=E[X_m\cdot 1_A+X_n\cdot 1_{A^c}],$$
$$E[X_n]=E[X_n\cdot 1_A+X_n\cdot 1_{A^c}].$$

由 $E[X_T]=E[X_0]$ 和 $E[X_n]=E[X_0]$ 可得 $E[X_T]=E[X_n]$，于是

$$E[X_m\cdot 1_A+X_n\cdot 1_{A^c}]=E[X_n\cdot 1_A+X_n\cdot 1_{A^c}],$$

两边同时减去 $E[X_n\cdot 1_{A^c}]$ 得到

$$E[X_m\cdot 1_A]=E[X_n\cdot 1_A]\quad 对任意A\in F_m.$$

v. 得出结论：上式表明 X_m 是 X_n 关于 F_m 的条件期望，即

$$X_m=E[X_n|F_m]\quad \text{a.s.}$$

由于这对任意 $0\le m<n$ 都成立，因此 X 是鞅。

□

上面的 proposition 1.3.4实际上反映了如下性质：

性质 1.3.1. *1. 若 X_t 是 F_t-鞅 $(t\ge 0)$，则 $EX_t=EX_0,\forall t$;*

2. 若 X_t 是 F_t-下鞅 $(t\ge 0)$，则 $EX_t\ge EX_s,\forall s\le t$。

证明.

1. 设 X_t 是 F_t-鞅。由鞅的定义，对任意 $0\le s\le t$，有

$$E[X_t|F_s]=X_s\quad \text{a.s.}$$

特别地，取 $s=0$，得到

$$E[X_t|F_0]=X_0\quad \text{a.s.}$$

两边取期望，利用条件期望的性质：

$$E[E[X_t|F_0]]=E[X_0]$$

即

$$E[X_t]=E[X_0]\quad 对任意t\ge 0.$$

另一种证明方法：考虑时间区间 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，由鞅性有

$$E[X_{t_{k+1}}|F_{t_k}]=X_{t_k}\quad \text{a.s.},\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

两边取期望得

$$E[X_{t_{k+1}}]=E[X_{t_k}]$$

因此

$$E[X_t]=E[X_{t_n}]=E[X_{t_{n-1}}]=\cdots=E[X_{t_0}]=E[X_0]$$

注. 实际上对 $\forall s \le t$ 都有 $EX_s = EX_t$.

2. 设 X_t 是 F_t-下鞅。由下鞅的定义，对任意 $0 \le s \le t$，有

$$E[X_t|F_s] \ge X_s \quad \text{a.s.}$$

两边取期望:

$$E[E[X_t|F_s]] \ge E[X_s]$$

即

$$E[X_t] \ge E[X_s] \quad \text{对任意} s \le t.$$

更详细地，考虑任意划分 $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$，由下鞅性有

$$E[X_{t_{k+1}}|F_{t_k}] \ge X_{t_k} \quad \text{a.s.}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

两边取期望得

$$E[X_{t_{k+1}}] \ge E[X_{t_k}]$$

因此

$$E[X_t] = E[X_{t_n}] \ge E[X_{t_{n-1}}] \ge \cdots \ge E[X_{t_0}] = E[X_s]$$

□

命题 1.3.5. 给定下鞅 $(X_n)_{n=0,1,\dots,N}$。则对任意 $\lambda > 0$，

$$\lambda P(\sup_n X_n \ge \lambda) \le E[X_N 1_{\{\sup_n X_n \ge \lambda\}}] \le E[|X_N|]. \tag{1.14}$$

证明. 我们来详细证明这个不等式链。

1. 定义停时：令

$$T = \inf\{n : X_n \ge \lambda\},$$

其中 $\inf \emptyset = N$。即 T 是过程首次达到或超过水平 λ 的时刻，如果从未达到则取为 N。

2. 验证 T 是停时：对任意 $0 \le k \le N$，

$$\{T \le k\} = \bigcup_{j=0}^{k} \{X_j \ge \lambda\} \in \mathcal{F}_k,$$

因为每个 $\{X_j \ge \lambda\} \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_k$。因此 T 是停时，且满足 $T \le N$。

3. 应用下鞅的可选停时定理：由于 (X_n) 是下鞅且 $T \le N$ 是有界停时，由可选停时定理（下鞅版本）有

$$E[X_N] \ge E[X_T].$$

4. 分解期望：将 $E[X_T]$ 按照事件 $\{\sup_n X_n \ge \lambda\}$ 分解:

$$\begin{aligned} E[X_T] &= E[X_T 1_{\{\sup_n X_n \ge \lambda\}}] + E[X_T 1_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}] \\ &= E[X_T 1_{\{\sup_n X_n \ge \lambda\}}] + E[X_N 1_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}] \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为：当 $\sup_n X_n < \lambda$ 时，过程从未达到水平 λ，由定义 $T = N$，所以 $X_T = X_N$。

5. 建立下界：在事件 $\{\sup_n X_n \geq \lambda\}$ 上，由 T 的定义，有 $X_T \geq \lambda$，因此

$$E[X_T 1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] \geq \lambda P(\sup_n X_n \geq \lambda).$$

6. 完成第一个不等式：综合以上步骤：

$$\begin{aligned} E[X_N] &\geq E[X_T] \\ &= E[X_T 1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] + E[X_N 1_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}] \\ &\geq \lambda P(\sup_n X_n \geq \lambda) + E[X_N 1_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}] \end{aligned}$$

两边同时减去 $E[X_N 1_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}]$ 得到：

$$E[X_N] - E[X_N 1_{\{\sup_n X_n < \lambda\}}] \geq \lambda P(\sup_n X_n \geq \lambda)$$

即

$$E[X_N 1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] \geq \lambda P(\sup_n X_n \geq \lambda).$$

7. 第二个不等式：显然有

$$E[X_N 1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] \leq E[|X_N| 1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] \leq E[|X_N|],$$

因为 $1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}} \leq 1$ 且 $X_N \leq |X_N|$。

综上，我们证明了

$$\lambda P(\sup_n X_n \geq \lambda) \leq E[X_N 1_{\{\sup_n X_n \geq \lambda\}}] \leq E[|X_N|].$$

□

推论 1.3.6. 设 $(X_n)_{n=0,1,\dots,N}$ 是一个鞅或者非负下鞅，则对任意 $p \geq 1$ 及 $\lambda > 0$，有

$$\lambda^p P(\sup_n |X_n| \geq \lambda) \leq E[|X_N|^p], \tag{1.15}$$

对任意 $p > 1$，有

$$E[|X_N|^p] \leq E[\sup_n |X_n|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p]. \tag{1.16}$$

证明. 我们详细证明这个推论的每一个不等式。

第一部分：证明不等式 (1.15)

1. 验证 $|X_n|^p$ 是下鞅：

由于 (X_n) 是鞅或非负下鞅，由 Jensen 不等式，对凸函数 $\phi(x) = |x|^p$（$p \geq 1$），有：

$$E[|X_n|^p | \mathcal{F}_{n-1}] \geq |E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}]|^p.$$

如果 (X_n) 是鞅，则 $E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$，所以

$$E[|X_n|^p | \mathcal{F}_{n-1}] \geq |X_{n-1}|^p.$$

如果 (X_n) 是非负下鞅，则 $E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1} \geq 0$，所以

$$E[|X_n|^p | \mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n^p | \mathcal{F}_{n-1}] \geq (E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}])^p \geq X_{n-1}^p = |X_{n-1}|^p.$$

因此，在两种情况下，$|X_n|^p$ 都是下鞅。

2. *应用 proposition 1.3.5*:

   对下鞅 $|X_n|^p$ 应用 proposition 1.3.5，取 λ^p 作为阈值:

$$\lambda^p P(\sup_n |X_n|^p \geq \lambda^p) \leq E[|X_N|^p 1_{\{\sup_n |X_n|^p \geq \lambda^p\}}].$$

   由于 $|X_N|^p 1_{\{\sup_n |X_n|^p \geq \lambda^p\}} \leq |X_N|^p$，所以

$$E[|X_N|^p 1_{\{\sup_n |X_n|^p \geq \lambda^p\}}] \leq E[|X_N|^p].$$

   注意到 $\{\sup_n |X_n|^p \geq \lambda^p\} = \{\sup_n |X_n| \geq \lambda\}$，因此

$$\lambda^p P(\sup_n |X_n| \geq \lambda) \leq E[|X_N|^p].$$

第二部分：证明不等式 (1.16)

1. *定义和基本不等式*:

   令 $X^* = \sup_n |X_n|$，固定 $k > 0$。由 proposition 1.3.5应用于下鞅 $|X_n|$，对任意 $\lambda > 0$ 有:

$$\lambda P(X^* \geq \lambda) \leq E[|X_N| 1_{\{X^* \geq \lambda\}}].$$

2. *计算 $(X^* \wedge k)^p$ 的期望*:

   利用等式 $y^p = \int_0^y p\lambda^{p-1} d\lambda$（$y \geq 0$），有:

$$\begin{aligned} E[(X^* \wedge k)^p] &= E\left[\int_0^{X^* \wedge k} p\lambda^{p-1} d\lambda\right] \\ &= E\left[\int_0^k p\lambda^{p-1} 1_{\{X^* \geq \lambda\}} d\lambda\right] \quad \text{(交换积分和期望次序)} \\ &= \int_0^k p\lambda^{p-1} P(X^* \geq \lambda) d\lambda \quad \text{(由 Fubini 定理)}. \end{aligned}$$

3. *应用 proposition 1.3.5的不等式*:

   将 $\lambda P(X^* \geq \lambda) \leq E[|X_N| 1_{\{X^* \geq \lambda\}}]$ 代入上式:

$$\begin{aligned} E[(X^* \wedge k)^p] &\leq \int_0^k p\lambda^{p-2} E[|X_N| 1_{\{X^* \geq \lambda\}}] d\lambda \\ &= pE\left[|X_N| \int_0^k \lambda^{p-2} 1_{\{X^* \geq \lambda\}} d\lambda\right] \quad \text{(再次交换次序)}. \end{aligned}$$

4. *计算内层积分*:

   对固定的 ω，有:

$$\int_0^k \lambda^{p-2} 1_{\{X^* \geq \lambda\}} d\lambda = \int_0^{X^* \wedge k} \lambda^{p-2} d\lambda = \frac{(X^* \wedge k)^{p-1}}{p-1}.$$

   因此，

$$E[(X^* \wedge k)^p] \leq \frac{p}{p-1} E[|X_N| (X^* \wedge k)^{p-1}].$$

5. 应用 *Hölder 不等式*：

   对 $E[|X_N|(X^* \wedge k)^{p-1}]$ 应用 Hölder 不等式，取共轭指数 p 和 $\frac{p}{p-1}$：

$$E[|X_N|(X^* \wedge k)^{p-1}] \leq (E[|X_N|^p])^{1/p} \, (E[(X^* \wedge k)^p])^{(p-1)/p}.$$

   代入前式：

$$E[(X^* \wedge k)^p] \leq \frac{p}{p-1} \, (E[|X_N|^p])^{1/p} \, (E[(X^* \wedge k)^p])^{(p-1)/p}.$$

6. 整理得到最终不等式：

   假设 $E[(X^* \wedge k)^p] > 0$（否则不等式显然成立），两边同时除以 $(E[(X^* \wedge k)^p])^{(p-1)/p}$：

$$(E[(X^* \wedge k)^p])^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \, (E[|X_N|^p])^{1/p}.$$

   两边取 p 次方：

$$E[(X^* \wedge k)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

7. 取极限 $k \to \infty$：

   由单调收敛定理，当 $k \to \infty$ 时：

$$E[(X^*)^p] = \lim_{k\to\infty} E[(X^* \wedge k)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

   显然有 $E[|X_N|^p] \leq E[(X^*)^p]$，因此得到完整的不等式链：

$$E[|X_N|^p] \leq E[\sup_n |X_n|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

□

命题 1.3.7. 设 B 是一维标准布朗运动，$S_t = \sup_{s\leq t} B_s$。则对任意 $a > 0$，

$$P(S_t \geq at) \leq \exp(-a^2 t/2).$$

证明. 我们给出详细的证明过程。

1. 构造指数鞅：对任意 $\alpha > 0$，定义过程：

$$M_t^\alpha = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right).$$

   由 proposition 1.3.1 的结果（或直接验证）可知，M_t^α 是鞅。特别地，$E[M_t^\alpha] = E[M_0^\alpha] = 1$。

2. 建立不等式关系：注意到对于任意 $s \leq t$，有：

$$\exp\left(\alpha S_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) \leq \sup_{s\leq t} \exp\left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}\right) = \sup_{s\leq t} M_s^\alpha.$$

   因此，

$$\{S_t \geq at\} \subset \left\{\sup_{s\leq t} M_s^\alpha \geq \exp\left(\alpha at - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)\right\}.$$

3. *应用 Doob 极大值不等式*: 由于 M_t^α 是非负鞅, 由 Doob 极大值不等式(corollary 1.3.6 的 (1.15) 式，取 $p=1$):

$$P\left(\sup_{s\leq t} M_s^\alpha \geq \exp\left(\alpha a t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)\right) \leq \exp\left(-\alpha a t + \frac{\alpha^2 t}{2}\right) E[M_t^\alpha]$$
$$= \exp\left(-\alpha a t + \frac{\alpha^2 t}{2}\right).$$

最后一个等式是因为 $E[M_t^\alpha]=1$。

4. *优化参数 α*：综合以上步骤，我们得到对任意 $\alpha>0$:

$$P(S_t \geq at) \leq \exp\left(-\alpha a t + \frac{\alpha^2 t}{2}\right).$$

为了得到最紧的上界，我们最小化右边的指数函数。考虑函数:

$$f(\alpha) = -\alpha a t + \frac{\alpha^2 t}{2}.$$

这是关于 α 的二次函数，在 $\alpha=a$ 处取得最小值:

$$f(a) = -a^2 t + \frac{a^2 t}{2} = -\frac{a^2 t}{2}.$$

因此，

$$\inf_{\alpha>0} \exp\left(-\alpha a t + \frac{\alpha^2 t}{2}\right) = \exp\left(-\frac{a^2 t}{2}\right).$$

5. *得到最终结论*：取 $\alpha=a$，我们得到最优上界:

$$P(S_t \geq at) \leq \exp\left(-\frac{a^2 t}{2}\right).$$

□

> **问题 1.3.1.** 设 X 是连续过程。若对任意的实数 α，$M_t^\alpha = \exp(\alpha X_t - \alpha^2 t/2)$ 是 F_t-鞅，则 X 是 F_t-布朗运动。

证明. 我们需要证明 X 满足布朗运动的定义，即:

1. $X_0 = 0$ a.s.
2. X 有独立增量
3. 对 $s<t$，$X_t - X_s \sim N(0, t-s)$
4. X 是连续过程（已知）

步骤 1：证明 $X_0 = 0$

由于 M_t^α 是鞅，特别地有 $E[M_t^\alpha] = E[M_0^\alpha]$ 对任意 $t\geq 0$ 成立。计算:

$$E[M_t^\alpha] = E\left[\exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)\right] = E\left[\exp\left(\alpha X_0\right)\right] = E[M_0^\alpha].$$

因此对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $t\geq 0$，有:

$$E\left[\exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)\right] = E\left[\exp\left(\alpha X_0\right)\right].$$

取 $t=0$，得 $E[e^{\alpha X_0}]=E[e^{\alpha X_0}]$，这没有提供新信息。但考虑 $\alpha=0$ 时，$M_t^0\equiv 1$ 是鞅，这要求 X_0 是常数。实际上，由鞅性 $E[M_t^\alpha|\mathcal{F}_0]=M_0^\alpha$，取 $t=0$ 得 $M_0^\alpha=e^{\alpha X_0}$ 是 $\mathcal{F}_0$-可测的，因此 X_0 是常数。通常我们假设 $X_0=0$。

步骤 2：计算特征函数证明正态性

由鞅性，对 $s<t$ 有：

$$E\left[\exp\left(\alpha X_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right]=\exp\left(\alpha X_s-\frac{\alpha^2 s}{2}\right).$$

整理得：

$$E\left[\exp\left(\alpha(X_t-X_s)\right)|\mathcal{F}_s\right]=\exp\left(\frac{\alpha^2(t-s)}{2}\right).$$

这表明在 $\mathcal{F}_s$ 条件下，X_t-X_s 的特征函数为：

$$E\left[e^{i\theta(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s\right]=\exp\left(-\frac{\theta^2(t-s)}{2}\right),$$

这正是均值为 0、方差为 $t-s$ 的正态分布的特征函数。因此 $X_t-X_s\sim N(0,t-s)$。

步骤 3：证明独立增量

对任意 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$，考虑：

$$E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})\right)\right].$$

通过迭代使用条件期望和鞅性，可以证明：

$$E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})\right)\right]=\prod_{k=1}^n\exp\left(\frac{\alpha_k^2(t_k-t_{k-1})}{2}\right),$$

这表明增量 $X_{t_1}-X_0,X_{t_2}-X_{t_1},\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ 是独立的，且每个都服从相应的正态分布。

综上所述，X 是从 0 出发、具有独立正态增量的连续过程，因此是布朗运动。 □

问题 1.3.2. 设 X 是右连续非负上鞅，则

$$P\left[\sup_t X_t>\lambda\right]\le\lambda^{-1}E[X_0].$$

证明. 令：

$$T=\inf\{t\ge 0:X_t>\lambda\},$$

其中 $\inf\emptyset=\infty$。由于 X 是右连续过程，T 是停时 (实际上如果我们定义开集 $A=\{x:x>\lambda\}$ 则有 T 为关于 A 的首中时)。

注. 课上讲的性质：

1. *若 X_t 是 F_t-鞅 $(t\ge 0)$，则 $EX_t=EX_0,\forall t$；*
2. *若 X_t 是 F_t-下鞅 $(t\ge 0)$，则 $EX_t\ge EX_s,\forall s\le t$。*

实际上如果我们考虑 $Y_t=-X_t(X_t$ 是 F_t-下鞅$)$，则 Y_t 是 F_t-上鞅 $(t\ge 0)$，那么有 $EY_t=-EX_t\le -EX_s=EY_s,\forall s\le t$。

那么如果我们考虑停时 $T \wedge n$，则对 $\forall s \leq T \wedge n$ 有：

$$E[X_{T\wedge n}] \leq E[X_s] \leq E[X_0].$$

在事件 $\{\sup_{t\leq n} X_t > \lambda\}$ 上，有 $T \leq n$，因此 $X_{T\wedge n} = X_T > \lambda$。于是：

$$E[X_{T\wedge n}] \geq E[X_{T\wedge n}1_{\{T\leq n\}}] > \lambda P(T \leq n) = \lambda P\left(\sup_{t\leq n} X_t > \lambda\right).$$

结合两个不等式得：

$$\lambda P\left(\sup_{t\leq n} X_t > \lambda\right) < E[X_{T\wedge n}] \leq E[X_0].$$

令 $n \to \infty$，由单调收敛定理：

$$\lim_{n\to\infty} \lambda P\left(\sup_{t\leq n} X_t > \lambda\right) \leq \lambda P\left(\sup_{t\geq 0} X_t > \lambda\right) \leq E[X_0],$$

即

$$P\left(\sup_{t\geq 0} X_t > \lambda\right) \leq \lambda^{-1} E[X_0].$$

□

1.4 Itô 积分

我们假设在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，给定一个右连续、完备的滤子 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$。这样，适应过程的极限（几乎处处、$L^p$-收敛等意义下）也是适应的。

1.4.1 Itô 积分

这一节我们定义一个过程关于布朗运动的随机积分。一个自然的想法是先对简单的过程定义，然后用简单过程逼近一般过程。

定义 1.4.1 (简单过程)**.** 设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$，$\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$。称形如

$$H_t = H_{-1}1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} H_i 1_{(t_i, t_{i+1})}(t) \tag{1.17}$$

的过程为（左连续）简单过程，其中 $H_{-1} \in \mathcal{F}_0$，$H_i \in \mathcal{F}_{t_i}$，且一致有界。

定义 1.4.2 (随机积分)**.** 记 $\mathcal{E}$ 为简单过程全体。对于简单过程 H，很自然的，我们可以定义 H 关于布朗运动 B 的随机积分为

$$(H\cdot B)_t = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}), \tag{1.18}$$

或者写成更加直观的形式

$$(H\cdot B)_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + H_n(B_t - B_{t_n}), \quad t_n \leq t < t_{n+1}. \tag{1.19}$$

注. 注意这里我们要求 $(H\cdot B)_0 = 0$，这只是一个约定，并不是本质的。有些时候，下面的记号

$$(H\cdot B)_t = \int_0^t H_s\, dB_s, \tag{1.20}$$

更加方便。

随机积分具有下面的基本性质：

命题 1.4.1. 设 $H, H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 是简单过程，α, β 是任意实数，则

(i) $(\alpha H^{(1)} + \beta H^{(2)})\cdot B = \alpha(H^{(1)}\cdot B) + \beta(H^{(2)}\cdot B)$;

(ii) $H\cdot B$ 是连续鞅，且若 $\int_0^\infty H_s^2 ds < \infty$，则 $H\cdot B$ 是 L^2-有界的；

(iii) $(H\cdot B)_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds$ 是鞅。

(iv) $E[(H\cdot B)_t] = 0$;

(v) $E[(H\cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]$。

证明.

(i) 设 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 是两个简单过程，其具有相同的分割 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots$（若分割不同，可取公共细分）。记

$$H_t^{(1)}=H_{-1}^{(1)}1_{\{0\}}(t)+\sum_{i=0}^{\infty}H_i^{(1)}1_{(t_i,t_{i+1})}(t),$$

$$H_t^{(2)}=H_{-1}^{(2)}1_{\{0\}}(t)+\sum_{i=0}^{\infty}H_i^{(2)}1_{(t_i,t_{i+1})}(t),$$

其中 $H_i^{(1)},H_i^{(2)}\in\mathcal{F}_{t_i}$。

则 $\alpha H^{(1)}+\beta H^{(2)}$ 也是简单过程：

$$(\alpha H^{(1)}+\beta H^{(2)})_t=(\alpha H_{-1}^{(1)}+\beta H_{-1}^{(2)})1_{\{0\}}(t)+\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha H_i^{(1)}+\beta H_i^{(2)})1_{(t_i,t_{i+1})}(t).$$

根据定义，计算随机积分：

$$\begin{aligned}&[(\alpha H^{(1)}+\beta H^{(2)})\cdot B]_t\\&=\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha H_i^{(1)}+\beta H_i^{(2)})(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t})\\&=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}H_i^{(1)}(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t})+\beta\sum_{i=0}^{\infty}H_i^{(2)}(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t})\\&=\alpha(H^{(1)}\cdot B)_t+\beta(H^{(2)}\cdot B)_t.\end{aligned}$$

因此线性性成立。

(ii) 设 H 是简单过程：

$$H_t=H_{-1}1_{\{0\}}(t)+\sum_{i=0}^{\infty}H_i1_{(t_i,t_{i+1})}(t),$$

其中 $H_{-1}\in\mathcal{F}_0$，$H_i\in\mathcal{F}_{t_i}$，且一致有界。

♡ 连续性：对于 $t_n\le t<t_{n+1}$，有

$$(H\cdot B)_t=\sum_{i=0}^{n-1}H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+H_n(B_t-B_{t_n}).$$

由于 B_t 是连续过程，且求和项数有限，因此 $(H\cdot B)_t$ 是 B_t 的线性组合，故连续。

♡ 适应性：对于任意 $t\ge 0$，存在 n 使得 $t_n\le t<t_{n+1}$，则

$$(H\cdot B)_t=\sum_{i=0}^{n-1}H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+H_n(B_t-B_{t_n}).$$

由于 $H_i\in\mathcal{F}_{t_i}\subset\mathcal{F}_t$（当 $i\le n$），且 $B_{t_i},B_t\in\mathcal{F}_t$，所以 $(H\cdot B)_t\in\mathcal{F}_t$。

♡ 可积性：由于 H_i 有界，存在 $M>0$ 使得 $|H_i|\le M$ a.s.，则

$$\begin{aligned}|(H\cdot B)_t|&\le\sum_{i=0}^{n}|H_i||B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|\\&\le M\sum_{i=0}^{n}|B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|.\end{aligned}$$

然后取期望：

$$E[|(H\cdot B)_t|]\le M\sum_{i=0}^{n}E[|B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|]=M\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t_i}<\infty.$$

因为布朗运动的增量服从正态分布，有限个独立正态随机变量之和是平方可积的，所以 $(H\cdot B)_t\in L^1$。

注. 对于布朗运动增量 $|B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|$，我们可以计算其矩。设 $\Delta t_i=(t_{i+1}\wedge t)-(t_i\wedge t)$，则由于布朗运动的独立增量性和正态性，有：

$$B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\sim N(0,\Delta t_i).$$

$$E[|B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t_i}.$$

$$E[(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t})^2]=\Delta t_i.$$

对于 $p>0$，

$$E[|B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|^p]=(\Delta t_i)^{p/2}\cdot\frac{2^{p/2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

其中 Γ 是 Gamma 函数。

回到命题证明上我们有：

$$\begin{aligned}E[|(H\cdot B)_t|]&\le M\sum_{i=0}^{n}E[|B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|]\\&=M\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t_i}\\&\le M\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n+1}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\Delta t_i}\quad(\text{由 Cauchy-Schwarz})\\&=M\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n+1}\sqrt{t}<\infty.\end{aligned}$$

这保证了 $(H\cdot B)_t$ 的可积性。

♡ 鞅性：需要证明对任意 $s<t$，有 $E[(H\cdot B)_t|\mathcal{F}_s]=(H\cdot B)_s$ a.s.

设 $s<t$，存在 m,n 使得 $t_m\le s<t_{m+1}$ 和 $t_n\le t<t_{n+1}$。为简便，设 s 和 t 在同一个区间分割内，即存在 k 使得 $t_k\le s<t_{k+1}\le t_l\le t<t_{l+1}$，其中 $k\le l$。则

$$(H\cdot B)_t-(H\cdot B)_s=\sum_{i=k}^{l-1}H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+H_l(B_t-B_{t_l})-H_k(B_s-B_{t_k}).$$

计算条件期望：

$$\begin{aligned}&E[(H\cdot B)_t-(H\cdot B)_s|\mathcal{F}_s]\\&=\sum_{i=k}^{l-1}E[H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})|\mathcal{F}_s]+E[H_l(B_t-B_{t_l})|\mathcal{F}_s]-E[H_k(B_s-B_{t_k})|\mathcal{F}_s].\end{aligned}$$

对于 $i>k$，由于 $H_i\in\mathcal{F}_{t_i}\subset\mathcal{F}_{t_{i+1}-}$，且 $B_{t_{i+1}}-B_{t_i}$ 独立于 $\mathcal{F}_{t_i}$，故

$$E[H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})|\mathcal{F}_s]=E[E[H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s]=E[H_iE[B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s]=0.$$

对于 $i=k$，需要小心处理：

$$E[H_k(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})|\mathcal{F}_s] = H_kE[B_{t_{k+1}}-B_s+B_s-B_{t_k}|\mathcal{F}_s] = H_k(E[B_{t_{k+1}}-B_s|\mathcal{F}_s]+(B_s-B_{t_k})).$$

由于 B 是鞅，$E[B_{t_{k+1}}-B_s|\mathcal{F}_s]=0$，且 $B_s-B_{t_k}$ 是 $\mathcal{F}_s$-可测的，所以

$$E[H_k(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})|\mathcal{F}_s] = H_k(B_s-B_{t_k}).$$

类似地处理其他项，最终可得 $E[(H\cdot B)_t-(H\cdot B)_s|\mathcal{F}_s]=0$，即 $E[(H\cdot B)_t|\mathcal{F}_s]=(H\cdot B)_s$ a.s.

♡ *L^2-有界性条件*：若 $\int_0^\infty H_s^2ds<\infty$，则

$$E[(H\cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2ds\right] \le E\left[\int_0^\infty H_s^2ds\right] < \infty.$$

因此 $(H\cdot B)_t$ 是 L^2-有界的。

(iii) 设 H 是简单过程：

$$H_t = H_{-1}1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} H_i 1_{(t_i,t_{i+1})}(t),$$

其中 $H_{-1}\in\mathcal{F}_0$，$H_i\in\mathcal{F}_{t_i}$，且一致有界。

我们需要证明过程 $M_t := (H\cdot B)_t^2-\int_0^t H_s^2ds$ 是鞅，即：

(1) M_t 是适应过程；

(2) $E[|M_t|]<\infty$ 对任意 $t\ge 0$；

(3) 对任意 $0\le s<t$，有 $E[M_t|\mathcal{F}_s]=M_s$ a.s.

♡ *适应性*：由 (ii)，$(H\cdot B)_t$ 是适应过程，故 $(H\cdot B)_t^2$ 是适应过程。另外，

$$\int_0^t H_s^2ds = \sum_{i=0}^{n-1} H_i^2(t_{i+1}-t_i) + H_n^2(t-t_n), \quad t_n\le t<t_{n+1}$$

也是适应过程

注. 这是由于：H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$-可测的，故也是 $\mathcal{F}_t$-可测的

因此 M_t 是适应过程。

♡ *可积性*：由于 H_i 有界，存在 $M>0$ 使得 $|H_i|\le M$ a.s.，则

$$E[|(H\cdot B)_t^2|] = E[(H\cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2ds\right] \le M^2t<\infty.$$

另外，

$$E\left[\left|\int_0^t H_s^2ds\right|\right] = E\left[\int_0^t H_s^2ds\right] \le M^2t<\infty.$$

因此 $E[|M_t|]\le 2M^2t<\infty$。

♡ *鞅性证明*：设 $0\le s<t$，记

$$\Delta = (H\cdot B)_t-(H\cdot B)_s = \int_s^t H_udB_u.$$

则

$$
\begin{aligned}
(H\cdot B)_t^2 &= [(H\cdot B)_s+\Delta]^2\\
&= (H\cdot B)_s^2 + 2(H\cdot B)_s\Delta + \Delta^2.
\end{aligned}
$$

因此

$$
M_t - M_s = (H\cdot B)_t^2 - (H\cdot B)_s^2 - \int_s^t H_u^2du = 2(H\cdot B)_s\Delta + \left(\Delta^2 - \int_s^t H_u^2du\right).
$$

现在计算条件期望 $E[M_t-M_s|\mathcal{F}_s]$：

$$
E[M_t-M_s|\mathcal{F}_s] = 2(H\cdot B)_s E[\Delta|\mathcal{F}_s] + E\left[\Delta^2 - \int_s^t H_u^2du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right].
$$

(a) 第一项：由 (ii)，$H\cdot B$ 是鞅，故 $E[\Delta|\mathcal{F}_s] = E[(H\cdot B)_t-(H\cdot B)_s|\mathcal{F}_s]=0$。

(b) 第二项：需要证明 $E\left[\Delta^2-\int_s^t H_u^2du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]=0$。

由于 H 是简单过程，设 $s=t_m<t_{m+1}<\cdots<t_n=t$，则

$$
\Delta = \sum_{i=m}^{n-1} H_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}).
$$

计算 Δ^2：

$$
\Delta^2 = \sum_{i=m}^{n-1} H_i^2(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2 + 2\sum_{m\le i<j\le n-1} H_iH_j(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j}).
$$

取条件期望：

$$
\begin{aligned}
E[\Delta^2|\mathcal{F}_s] = &\sum_{i=m}^{n-1} E[H_i^2(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2|\mathcal{F}_s]\\
&+2\sum_{m\le i<j\le n-1} E[H_iH_j(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})|\mathcal{F}_s].
\end{aligned}
$$

对于交叉项（$i<j$）：

$$
\begin{aligned}
&E[H_iH_j(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})|\mathcal{F}_s]\\
&= E[E[H_iH_j(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s]\\
&= E[H_iH_j(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})E[B_{t_{j+1}}-B_{t_j}|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] = 0,
\end{aligned}
$$

注. 因为 $E[B_{t_{j+1}}-B_{t_j}|\mathcal{F}_{t_j}]=0$
这是由于布朗运动的鞅性：$B_{t_{j+1}}-B_{t_j}$ 关于 $\mathcal{F}_{t_j}$ 独立

对于平方项：

$$
\begin{aligned}
&E[H_i^2(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2|\mathcal{F}_s]\\
&= E[E[H_i^2(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s]\\
&= E[H_i^2E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s]\\
&= E[H_i^2(t_{i+1}-t_i)|\mathcal{F}_s].
\end{aligned}
$$

注. 这是由于:

$$\begin{aligned} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] &= Var[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] - E[B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]^2 \\ &= Var[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] = t_{i+1} - t_i \end{aligned}$$

因此，

$$E[\Delta^2 | \mathcal{F}_s] = \sum_{i=m}^{n-1} E[H_i^2 (t_{i+1} - t_i) | \mathcal{F}_s] = E\left[\sum_{i=m}^{n-1} H_i^2 (t_{i+1} - t_i) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = E\left[\int_s^t H_u^2 du \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right].$$

于是

$$E\left[\Delta^2 - \int_s^t H_u^2 du \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

综上：$E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$，即 $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ a.s.，故 M_t 是鞅，得证.

(iv) 设 H 是简单过程:

$$H_t = H_{-1} 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} H_i 1_{(t_i, t_{i+1})}(t),$$

其中 $H_{-1} \in \mathcal{F}_0$，$H_i \in \mathcal{F}_{t_i}$，且一致有界。

由简单过程的 Itô 积分定义:

$$(H \cdot B)_t = \sum_{i=0}^{\infty} H_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}).$$

我们需要证明 $E[(H \cdot B)_t] = 0$。我们给出三种证明方法:

♡ 方法一：直接计算期望:

由于 H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$-可测的，而 $B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}$ 独立于 $\mathcal{F}_{t_i}$（布朗运动的独立增量性），且 $E[B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}] = 0$（布朗运动的期望为 0），因此:

$$\begin{aligned} E[(H \cdot B)_t] &= E\left[\sum_{i=0}^{\infty} H_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E[H_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E[H_i] \cdot E[B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}] \quad (\text{独立性}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E[H_i] \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

注. 这里需要注意：虽然求和是无穷项，但由于 H_i 一致有界且对于固定的 t，只有有限项 $H_i(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$ 非零（因为当 $t_i \geq t$ 时，$B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t} = 0$），所以求和实际上是有限的，交换期望与求和是合理的。

♡ 方法二：利用鞅性:

由 (ii)，$(H \cdot B)_t$ 是鞅。根据鞅的基本性质，对于鞅 $M_t = (H \cdot B)_t$，有 $E[M_t] = E[M_0]$ 对所有 $t \geq 0$ 成立。而由定义 $(H \cdot B)_0 = 0$，因此:

$$E[(H \cdot B)_t] = E[(H \cdot B)_0] = 0.$$

♡ 方法三：利用停时技术：

考虑停时 $T \equiv t$（常值停时）。由鞅的可选停时定理（有界停时版本），由于 $(H \cdot B)_t$ 是鞅且 $T \leq t$ 是有界停时，有：

$$E[(H \cdot B)_t] = E[(H \cdot B)_0] = 0.$$

(v) 设 H 是简单过程：

$$H_t = H_{-1} 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} H_i 1_{(t_i, t_{i+1})}(t),$$

其中 $H_{-1} \in \mathcal{F}_0$，$H_i \in \mathcal{F}_{t_i}$，且一致有界。

我们需要证明 $E[(H \cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]$。我们给出两种详细的证明方法：

♡ 方法一：直接计算二次期望：

由简单过程的 Itô 积分定义，对于固定的 $t \geq 0$，设 $N = \max\{i : t_i < t\}$（有限数），则：

$$(H \cdot B)_t = \sum_{i=0}^{N} H_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}).$$

记 $\Delta B_i = B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}$，则：

$$\begin{aligned}(H \cdot B)_t^2 &= \left(\sum_{i=0}^{N} H_i \Delta B_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N} H_i^2 (\Delta B_i)^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq N} H_i H_j (\Delta B_i)(\Delta B_j).\end{aligned}$$

取期望：

$$E[(H \cdot B)_t^2] = \sum_{i=0}^{N} E[H_i^2 (\Delta B_i)^2] + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq N} E[H_i H_j (\Delta B_i)(\Delta B_j)].$$

现在逐项分析：

(a) 平方项：对于每个 i，由于 H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$-可测的，而 ΔB_i 独立于 $\mathcal{F}_{t_i}$，且 $E[(\Delta B_i)^2] = \Delta t_i$，其中 $\Delta t_i = (t_{i+1} \wedge t) - (t_i \wedge t)$，故：

$$E[H_i^2 (\Delta B_i)^2] = E[H_i^2] \cdot E[(\Delta B_i)^2] = E[H_i^2] \Delta t_i.$$

(b) 交叉项：对于 $i < j$，由于 H_i 和 H_j 都是 $\mathcal{F}_{t_j}$-可测的（因为 $t_i < t_j$），且 ΔB_i 和 ΔB_j 相互独立（布朗运动的独立增量性），且 ΔB_i 与 H_j 独立，ΔB_j 与所有 $\mathcal{F}_{t_j}$-可测变量独立，故：

$$\begin{aligned}E[H_i H_j (\Delta B_i)(\Delta B_j)] &= E[H_i H_j \Delta B_i] \cdot E[\Delta B_j] \quad (\text{独立性}) \\ &= E[H_i H_j \Delta B_i] \cdot 0 \quad (\text{因为} E[\Delta B_j] = 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

更严格地：由于 $H_i H_j \Delta B_i$ 是 $\mathcal{F}_{t_j}$-可测的，而 ΔB_j 独立于 $\mathcal{F}_{t_j}$，故

$$E[H_i H_j (\Delta B_i)(\Delta B_j)] = E[H_i H_j \Delta B_i] \cdot E[\Delta B_j] = 0.$$

因此，

$$E[(H\cdot B)_t^2]=\sum_{i=0}^{N}E[H_i^2]\Delta t_i.$$

另一方面，

$$\int_0^t H_s^2ds=\sum_{i=0}^{N}H_i^2\Delta t_i,$$

所以

$$E\left[\int_0^t H_s^2ds\right]=\sum_{i=0}^{N}E[H_i^2]\Delta t_i.$$

比较两式即得：

$$E[(H\cdot B)_t^2]=E\left[\int_0^t H_s^2ds\right].$$

♡ *方法二：利用 (iii)*：

由 (iii)，$M_t:=(H\cdot B)_t^2-\int_0^t H_s^2ds$ 是鞅。根据鞅的性质，有 $E[M_t]=E[M_0]$ 对所有 $t\geq 0$ 成立。计算：

$$M_0=(H\cdot B)_0^2-\int_0^0 H_s^2ds=0-0=0.$$

因此 $E[M_t]=0$，即：

$$E\left[(H\cdot B)_t^2-\int_0^t H_s^2ds\right]=0,$$

从而

$$E[(H\cdot B)_t^2]=E\left[\int_0^t H_s^2ds\right].$$

♡ *方法三：Itô 等距性的直接体现*：

这个等式实际上是 Itô 积分等距性（Itô isometry）在简单过程情形下的体现。它表明随机积分的 L^2-范数等于被积过程的 L^2-范数：

$$\|(H\cdot B)_t\|_{L^2}^2=E[(H\cdot B)_t^2]=E\left[\int_0^t H_s^2ds\right]=\|H\|_{L^2([0,t]\times\Omega)}^2.$$

这个等距性质是 Itô 积分理论的核心，它允许我们将 Itô 积分从简单过程连续延拓到更一般的平方可积适应过程。

注. (a) 等式 $E[(H\cdot B)_t^2]=E\left[\int_0^t H_s^2ds\right]$ 被称为 Itô 等距性（Itô isometry），它是 Itô 积分理论中的基本恒等式。

(b) 这个等式表明，随机积分 $(H\cdot B)_t$ 的方差等于被积过程 H 的平方在时间区间 $[0,t]$ 上的累积期望：

$$Var[(H\cdot B)_t]=E[(H\cdot B)_t^2]-(E[(H\cdot B)_t])^2=E\left[\int_0^t H_s^2ds\right]-0=E\left[\int_0^t H_s^2ds\right].$$

(c) 该等式的直观解释：布朗运动的增量具有方差等于时间差的性质，因此随机积分的方差是各个小区间上被积函数平方的加权和，权重为时间区间的长度。

□

随机积分有如下定理：

定义 1.4.3 ($\mathbb{H}^2$ 空间)**.** 定义 $\mathbb{H}^2$ 为所有满足以下条件的连续适应过程 $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ 的空间：

$$\|X\|_{\mathbb{H}^2} = \left(E\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^2\right]\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.21}$$

定理 1.4.2 (Itô 积分的扩张)**.** 设 H 是关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的过程，且存在左连续的简单过程列 $\{H^{(n)}, n \geq 1\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^\infty |H_t - H_t^{(n)}|^2\, dt\right] = 0. \tag{1.22}$$

则存在唯一的连续过程 $H \cdot B \in \mathbb{H}^2$，它仅依赖于 H 和 B（与 $H^{(n)}$ 的选取无关），且满足

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\geq 0} E\left[|(H^{(n)} \cdot B)_t - (H \cdot B)_t|^2\right] = 0. \tag{1.23}$$

我们称 $H \cdot B$ 为 H 关于 B 的 *Itô 积分*。进一步地，*proposition 1.4.1*中的性质也均成立.

证明. 由条件 (1.22)，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n, m > N$ 时，

$$E\left[\int_0^\infty |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt\right] < \varepsilon. \tag{1.24}$$

对简单过程 $H^{(n)} - H^{(m)}$，应用 Itô 等距（proposition 1.4.1(v)）：

$$E\left[|((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B)_\infty|^2\right] = E\left[\int_0^\infty |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt\right] < \varepsilon. \tag{1.25}$$

由 Doob 极大不等式(1.16)，对任意连续鞅 M，有

$$E\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^2\right] \leq 4\sup_{t\geq 0} E[|M_t|^2] = 4E[|M_\infty|^2]. \tag{1.26}$$

注. 我们取 $p = 2$，则有：

$$E[|X_N|^2] \leq E[\sup_n |X_n|^2] \leq \left(\frac{2}{2-1}\right)^2 E[|X_N|^2] = 4E[|X_N|^2]$$

特别地，对鞅 $(H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B$，应用 (1.26) 和 (1.25)：

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t\geq 0}|(H^{(n)} \cdot B)_t - (H^{(m)} \cdot B)_t|^2\right] &\leq 4E\left[|((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B)_\infty|^2\right] \\ &= 4E\left[\int_0^\infty |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2\, dt\right] < 4\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.27}$$

因此，$\{H^{(n)} \cdot B\}$ 在 $\mathbb{H}^2$ 中是 Cauchy 列。
由于 $\mathbb{H}^2$ 是完备的（作为赋范线性空间），存在 $H \cdot B \in \mathbb{H}^2$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\geq 0}|(H^{(n)} \cdot B)_t - (H \cdot B)_t|^2\right] = 0. \tag{1.28}$$

特别地，由于 L^2 收敛蕴含 L^2 逐点收敛，有

$$\sup_{t\geq 0} E\left[|(H^{(n)} \cdot B)_t - (H \cdot B)_t|^2\right] \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{1.29}$$

即 (1.23) 成立。

设 $\{G^{(n)}\}$ 是另一列左连续简单过程，也满足

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^\infty |H_t - G_t^{(n)}|^2\, dt\right] = 0. \tag{1.30}$$

由三角形不等式，

$$E\left[\int_0^\infty |H_t^{(n)} - G_t^{(n)}|^2\, dt\right] \le 2E\left[\int_0^\infty |H_t - H_t^{(n)}|^2\, dt\right] + 2E\left[\int_0^\infty |H_t - G_t^{(n)}|^2\, dt\right] \to 0.$$

重复(1.27)的论证，可得

$$E\left[\sup_{t\ge 0} |(H^{(n)}\cdot B)_t - (G^{(n)}\cdot B)_t|^2\right] \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{1.31}$$

结合 (1.28) 和 (1.31)，有

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\ge 0} |(G^{(n)}\cdot B)_t - (H\cdot B)_t|^2\right] = 0, \tag{1.32}$$

即 $H\cdot B$ 也与 $\{G^{(n)}\}$ 的选取无关，仅由 H 和 B 决定。

注. *1.* **线性性**：若 $H^{(n)} \to H$ 且 $K^{(n)} \to K$，则 $aH^{(n)} + bK^{(n)} \to aH + bK$。由极限的唯一性，$(aH+bK)\cdot B = \lim_{n\to\infty}(aH^{(n)} + bK^{(n)})\cdot B = a(H\cdot B) + b(K\cdot B)$。

2. **鞅性质**：对简单过程，$H^{(n)}\cdot B$ 是连续鞅。由于 $\mathbb{H}^2$ 极限保持鞅性质（L^2 收敛的极限鞅仍是鞅），$H\cdot B$ 也是连续鞅。

3. ***Itô* 等距**：对任意 $t\ge 0$，

$$\begin{aligned} E[|(H\cdot B)_t|^2] &= \lim_{n\to\infty} E[|(H^{(n)}\cdot B)_t|^2] \quad (\text{由}L^2\text{ 收敛}) \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^t |H_s^{(n)}|^2 ds\right] \quad (\text{简单过程的 Itô 等距}) \\ &= E\left[\int_0^t |H_s|^2 ds\right] \quad (\text{由}L^1\text{ 收敛，因}H^{(n)}\to H\text{ 在}L^2(dt\times dP)\text{ 意义下}). \end{aligned}$$

4. **二次变差**：对简单过程，$\langle H^{(n)}\cdot B\rangle_t = \int_0^t |H_s^{(n)}|^2 ds$。由于二次变差在 $\mathbb{H}^2$ 收敛下是连续的，取极限得 $\langle H\cdot B\rangle_t = \int_0^t |H_s|^2 ds$。

综上，定理 1.4.2 得证。 □

下面这一节剩下的这一小部分好像江说只做了解，好像不考...

接下来我们定义关于 L^2 有界连续鞅（二次变差有限，略），或者更一般的，连续半鞅的随机积分。

设 $M\in\mathbb{H}^2$。与 Itô 积分一样，我们可以定义一个左连续简单过程

$$H = H_{-1}1_{\{0\}} + \sum_i H_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}$$

关于 M 的随机积分为

$$(H\cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_n(M_t - M_{t_n}), \quad t_n \le t < t_{n+1}.$$

命题 1.4.3. 设 $H, H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 是简单过程，α, β 是任意实数，则

(i) $(\alpha H^{(1)} + \beta H^{(2)}) \cdot M = \alpha(H^{(1)} \cdot M) + \beta(H^{(2)} \cdot M)$；

(ii) $H \cdot M$ 是 L^2-有界的连续鞅。且对任意的 $N \in \mathbb{H}^2$，有

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle;$$

特别的。

(iii) $E[(H \cdot M)_t] = 0$；

(iv) $(H \cdot M)_t^2 - \int_0^t H_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s$ 是鞅。

(v) $E[(H \cdot M)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s\right]$。

证明. 我们逐条详细证明这些性质。

(i) 线性性：

设 $H^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} H_i^{(1)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$ 和 $H^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} H_i^{(2)} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$ 是两个左连续简单过程，使用相同的划分 $\{t_i\}$，其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$，$t_n \uparrow \infty$。对任意 $t \geq 0$，存在 n 使得 $t_n \leq t < t_{n+1}$。根据定义：

$$\begin{aligned}
(\alpha H^{(1)} + \beta H^{(2)}) \cdot M_t &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha H_i^{(1)} + \beta H_i^{(2)})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \\
&\quad + (\alpha H_n^{(1)} + \beta H_n^{(2)})(M_t - M_{t_n}) \\
&= \alpha \left[\sum_{i=0}^{n-1} H_i^{(1)}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_n^{(1)}(M_t - M_{t_n})\right] \\
&\quad + \beta \left[\sum_{i=0}^{n-1} H_i^{(2)}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_n^{(2)}(M_t - M_{t_n})\right] \\
&= \alpha(H^{(1)} \cdot M)_t + \beta(H^{(2)} \cdot M)_t.
\end{aligned}$$

故线性性成立。

(ii) 鞅性与可料二次协变差：

♡ **第一步：证明 $H \cdot M$ 是连续鞅。**

由于 H 是简单过程，$H \cdot M$ 显然是连续适应过程。对任意 $0 \leq s < t$，设 $s \in [t_k, t_{k+1})$，$t \in [t_n, t_{n+1})$，其中 $k \leq n$。由定义：

$$\begin{aligned}
(H \cdot M)_t &= \sum_{i=0}^{n-1} H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_n(M_t - M_{t_n}), \\
(H \cdot M)_s &= \sum_{i=0}^{k-1} H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_k(M_s - M_{t_k}).
\end{aligned}$$

计算条件期望：

$$
\begin{aligned}
E[(H\cdot M)_t \mid \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^{k-1} H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_k(M_s - M_{t_k}) \\
&\quad + \sum_{i=k}^{n-1} E[H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mid \mathcal{F}_s] + E[H_n(M_t - M_{t_n}) \mid \mathcal{F}_s].
\end{aligned}
$$

对于 $i \geq k$，由于 H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$-可测的，且 $t_i \geq s$，由鞅性质与条件期望的塔性质：

$$
\begin{aligned}
E[H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mid \mathcal{F}_s] &= E[E[H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}] \mid \mathcal{F}_s] \\
&= E[H_i \underbrace{E[M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}]}_{=0} \mid \mathcal{F}_s] = 0.
\end{aligned}
$$

同理，$E[H_n(M_t - M_{t_n}) \mid \mathcal{F}_s] = 0$。因此，

$$
E[(H\cdot M)_t \mid \mathcal{F}_s] = \sum_{i=0}^{k-1} H_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + H_k(M_s - M_{t_k}) = (H\cdot M)_s,
$$

故 $H\cdot M$ 是鞅。连续性由定义显然。

♡ **第二步：证明** $\langle H\cdot M, N\rangle = H\cdot\langle M, N\rangle$。

对任意 $N \in \mathbb{H}^2$，考虑过程

$$
X_t = (H\cdot M)_t N_t - \int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s.
$$

应用 Itô 乘积公式：

$$
\begin{aligned}
dX_t &= d\big((H\cdot M)_t N_t\big) - H_t\, d\langle M, N\rangle_t \\
&= (H\cdot M)_t\, dN_t + N_t\, d(H\cdot M)_t + d\langle H\cdot M, N\rangle_t - H_t\, d\langle M, N\rangle_t.
\end{aligned}
$$

由于 $d(H\cdot M)_t = H_t\, dM_t$，且 $\langle H\cdot M, N\rangle_t$ 的定义要求 X 是局部鞅。为验证 $\langle H\cdot M, N\rangle_t = \int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s$，只需证明 X 是鞅。实际上，由于 $H\cdot M$ 和 N 都是 L^2-有界连续鞅，X 是局部鞅且属于 $\mathbb{H}^1$，故 X 是鞅。由鞅的二次协变差的唯一性，即得

$$
\langle H\cdot M, N\rangle_t = \int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s = (H\cdot\langle M, N\rangle)_t.
$$

特别地，取 $N = M$，有 $\langle H\cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s$。

(iii) 零均值性：

由于 $H\cdot M$ 是鞅且 $(H\cdot M)_0 = 0$，对任意 $t \geq 0$，

$$
E[(H\cdot M)_t] = E[E[(H\cdot M)_t \mid \mathcal{F}_0]] = E[(H\cdot M)_0] = 0.
$$

(iv) 鞅性质：

由 (ii) 知 $\langle H\cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s$。根据连续鞅的二次变差性质，过程

$$
(H\cdot M)_t^2 - \langle H\cdot M\rangle_t
$$

是局部鞅。进一步，由于 $H\cdot M$ 是 L^2-有界连续鞅，该过程实际上是一致可积鞅。因此，

$$
(H\cdot M)_t^2 - \int_0^t H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s
$$

是鞅。

(v) **Itô 等距**：

在 (iv) 中取期望，并利用鞅的零均值性：

$$E\left[(H\cdot M)_t^2-\int_0^t H_s^2\,d\langle M,M\rangle_s\right]=E[(H\cdot M)_0^2-0]=0.$$

因此，

$$E[(H\cdot M)_t^2]=E\left[\int_0^t H_s^2\,d\langle M,M\rangle_s\right].$$

□

1.4.2 Itô 公式

这一节我们主要研究随机积分的"变量替换"公式——Itô 公式。正如 Newton-Leibniz 公式在微积分中地位一样，Itô 公式在随机分析中有着极为重要的作用。

我们先来看分部积分公式.

命题 1.4.4 (分部积分公式). 设 X,Y 是连续半鞅，则

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_s\,dY_s+\int_0^t Y_s\,dX_s+\langle X,Y\rangle_t. \tag{1.33}$$

特别地，

$$X_t^2=X_0^2+2\int_0^t X_s\,dX_s+\langle X\rangle_t. \tag{1.34}$$

证明. 设 $\Delta=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}$ 是区间 $[0,t]$ 的一个划分。考虑恒等式：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})&=\sum_{i=0}^{n-1}\left[X_{t_{i+1}}Y_{t_{i+1}}-X_{t_i}Y_{t_i}-X_{t_i}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})-Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})\right]\\&=X_tY_t-X_0Y_0-\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_i}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})-\sum_{i=0}^{n-1}Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}).\end{aligned}$$

重新整理得：

$$X_tY_t=X_0Y_0+\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_i}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})+\sum_{i=0}^{n-1}Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})+\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i}). \tag{1.35}$$

令划分的模 $|\Delta|=\max_i(t_{i+1}-t_i)\to 0$。由随机积分的定义，作为 L^2 极限，

$$\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_i}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})\xrightarrow{L^2}\int_0^t X_s\,dY_s,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}Y_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})\xrightarrow{L^2}\int_0^t Y_s\,dX_s.$$

而二次协变差的定义给出：

$$\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})\xrightarrow{\text{概率}}\langle X,Y\rangle_t.$$

因此，在 (1.35) 中取极限（在概率意义下），即得 (1.33)。

特别地，取 $Y = X$，则 (1.33) 化为

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\,dX_s + \langle X\rangle_t,$$

即 (1.34)。 □

注. 1. 与经典微积分的分部积分公式 $d(XY) = XdY + YdX$ 相比，*Itô* 分部积分公式多出一项 $\langle X, Y\rangle_t$，这源于连续半鞅路径的无限变差性质。

2. 公式 (1.34) 是 *Itô* 公式在一维二次函数情形的特例。事实上，对 $f(x) = x^2$，由 *Itô* 公式：

$$d(X_t^2) = 2X_t\,dX_t + d\langle X\rangle_t,$$

积分即得 (1.34)。

3. 该命题的证明本质上是二次协变差定义与随机积分定义的直接结合，体现了 *Itô* 随机积分的"二阶微分"特征。

设 M 是连续局部鞅。应用上面的命题（分部积分公式），有

$$M_t^2 - \langle M\rangle_t = M_0^2 + 2\int_0^t M_s\,dM_s. \tag{1.36}$$

在前面我们已经知道 $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ 是连续局部鞅，现在我们给出了这个局部鞅的一个明显表达式。对于布朗运动 B，我们有

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s\,dB_s, \tag{1.37}$$

它也给出了等号右边随机积分的一个明显表示。

注. 1. 等式 (1.36) 是 *Itô* 分部积分公式的直接推论：取 $X = M$，则 $\langle M\rangle_t = \langle M, M\rangle_t$，代入命题 *4.3* 的公式 (1.34) 并整理即得。

2. 由于 $\int_0^t M_s\,dM_s$ 是一个连续局部鞅，(1.36) 表明 $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ 可以表示为该随机积分的线性函数。这为研究连续局部鞅的二次变差提供了具体表达式。

3. 对于布朗运动 B，其二次变差 $\langle B\rangle_t = t$，代入 (1.36) 即得 (1.37)。这是 *Itô* 积分的一个重要特例，给出了 $\int_0^t B_s\,dB_s$ 的显式表达式：

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

值得注意的是，该表达式与经典微积分中的 $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ 相差一项 $-t/2$，这正是 *Itô* 积分与 *Riemann-Stieltjes* 积分的本质区别。

下面我们给出 *Itô* 公式：

定理 1.4.5 (Itô 公式). 设 $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，$X = (X^1, \dots, X^d)$ 是 d-维连续半鞅，即每个 X^i 都是一维连续半鞅。则 $f(X)$ 仍旧是半鞅，且

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\,d\langle X^i, X^j\rangle_s. \tag{1.38}$$

证明. 我们分几步证明该定理。

步骤 1: 多项式函数的情形

首先证明 Itô 公式对多项式函数成立。考虑单项式函数 $f(x_1,\dots,x_d)=x_1^{k_1}\cdots x_d^{k_d}$，其中 $k_i\in\mathbb{N}$。

(a) 对 $d=1$ 且 $f(x)=x^2$ 的情形，由分部积分公式（proposition 1.4.4）有

$$X_t^2=X_0^2+2\int_0^t X_s\,dX_s+\langle X\rangle_t,$$

这正是 (1.38) 当 $f(x)=x^2$ 的形式。

(b) 对 $f(x)=x^n$（$n\geq 2$），可通过归纳法证明：

假设 Itô 公式对 $n-1$ 成立，即

$$X_t^{n-1}=X_0^{n-1}+(n-1)\int_0^t X_s^{n-2}\,dX_s+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\int_0^t X_s^{n-3}\,d\langle X\rangle_s. \tag{1.39}$$

考虑 $f(x)=x^n=x\cdot x^{n-1}$。应用分部积分公式（proposition 1.4.4）:

$$X_t^n=X_0^n+\int_0^t X_s^{n-1}\,dX_s+\int_0^t X_s\,d(X_s^{n-1})+\langle X,X^{n-1}\rangle_t. \tag{1.40}$$

现在计算右边各项:

i. 对 $\int_0^t X_s\,d(X_s^{n-1})$ 应用归纳假设 (1.39) 的微分形式:

$$d(X_s^{n-1})=(n-1)X_s^{n-2}dX_s+\frac{(n-1)(n-2)}{2}X_s^{n-3}d\langle X\rangle_s.$$

因此

$$\int_0^t X_s\,d(X_s^{n-1})=(n-1)\int_0^t X_s^{n-1}\,dX_s+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\int_0^t X_s^{n-2}\,d\langle X\rangle_s. \tag{1.41}$$

ii. 计算协变差 $\langle X,X^{n-1}\rangle_t$。由 Itô 公式的协变差性质:

$$\begin{aligned}d\langle X,X^{n-1}\rangle_s&=d\left\langle X,\int_0^\cdot (n-1)X_u^{n-2}dX_u+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\int_0^\cdot X_u^{n-3}d\langle X\rangle_u\right\rangle_s\\&=(n-1)X_s^{n-2}d\langle X\rangle_s,\end{aligned}$$

因为 $\langle X,\int_0^\cdot X_u^{n-3}d\langle X\rangle_u\rangle=0$（有限变差过程与连续局部鞅的协变差为零）。故

$$\langle X,X^{n-1}\rangle_t=(n-1)\int_0^t X_s^{n-2}\,d\langle X\rangle_s. \tag{1.42}$$

将 (1.41) 和 (1.42) 代入 (1.40):

$$\begin{aligned}X_t^n&=X_0^n+\int_0^t X_s^{n-1}\,dX_s+(n-1)\int_0^t X_s^{n-1}\,dX_s\\&\quad+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\int_0^t X_s^{n-2}\,d\langle X\rangle_s+(n-1)\int_0^t X_s^{n-2}\,d\langle X\rangle_s\\&=X_0^n+n\int_0^t X_s^{n-1}\,dX_s+\frac{n(n-1)}{2}\int_0^t X_s^{n-2}\,d\langle X\rangle_s.\end{aligned}$$

这正是 $f(x)=x^n$ 的 Itô 公式:

$$X_t^n=X_0^n+\int_0^t nX_s^{n-1}\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t n(n-1)X_s^{n-2}\,d\langle X\rangle_s.$$

(c) 对二元函数 $f(x,y)=xy$ 的证明：

设 X 和 Y 是两个连续半鞅。直接应用分部积分公式（proposition 1.4.4）：

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_t.$$

这正是二元函数 $f(x,y)=xy$ 的 Itô 公式，因为：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1.$$

代入 Itô 公式 (1.38) 得：

$$\begin{aligned}
f(X_t,Y_t) &= f(X_0,Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\,dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}\,dY_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle X\rangle_s + 2\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,d\langle X,Y\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,d\langle Y\rangle_s\right) \\
&= X_0Y_0 + \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t d\langle X,Y\rangle_s \\
&= X_0Y_0 + \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t X_s\,dY_s + \langle X,Y\rangle_t.
\end{aligned}$$

对于一般多项式 $f(x_1,\ldots,x_d)$，可将其表示为单项式的线性组合：

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d},$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ 为多重指标，c_α 为系数。由 (a) 和 (b) 的证明，Itô 公式对每个单项式成立。再由随机积分的线性性，对线性组合也成立，因此 Itô 公式对所有多项式函数成立。

步骤 2: 局部化

设 X 是 d-维连续半鞅。定义停时序列

$$\tau_n = \inf\{t\ge 0 : |X_t|\ge n \text{ 或} |X_t^-|\ge n\},$$

其中 $X_t^- = \lim_{s\uparrow t} X_s$。则 $\tau_n\uparrow\infty$ 几乎必然，且 X^{τ_n} 是有界连续半鞅（取值于紧集 $\overline{B}(0,n)\subset\mathbb{R}^d$）。由于 Itô 公式在停时区间 $[0,\tau_n]$ 上成立当且仅当对 X^{τ_n} 成立，我们可假设 X 本身取值于某个紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$。

步骤 3: 逼近与极限

设 $f\in C^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。由 Stone-Weierstrass 定理，存在一列多项式 $\{f_n\}$ 使得在紧集 K 上，

$$f_n\to f,\quad \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\to\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i\partial x_j}\to\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$$

一致收敛。对每个 f_n，由步骤 1，Itô 公式成立：

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s. \quad (1.43)$$

现在令 $n\to\infty$。由于一致收敛：

(i) $f_n(X_t) \to f(X_t)$，$f_n(X_0) \to f(X_0)$ 几乎必然。

(ii) 对于随机积分项，由一致收敛和 X^i 的有界性，可应用随机积分的控制收敛定理：

$$\int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^i \xrightarrow{L^2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^i.$$

(iii) 对于 Lebesgue-Stieltjes 积分项，由一致收敛和 $\langle X^i, X^j\rangle_s$ 的有界变差性，

$$\int_0^t \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\,d\langle X^i, X^j\rangle_s \to \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\,d\langle X^i, X^j\rangle_s \quad \text{a.s.}$$

因此，在 (1.43) 中取极限，即得 (1.38) 对取值于紧集 K 的 X 成立。结合局部化步骤，对一般连续半鞅 X，在停时 τ_n 前公式成立，令 $n \to \infty$ 即得全局结论。

□

注 (Itô 公式的特殊情形与微分形式).

1. *如果某个 X^i 是有限变差过程，在定理 1.4.5 中，我们只需要假设 f 关于 x_i 具有连续的一阶偏导数。例如，设 X 是连续半鞅，A 是有限变差的连续过程，如果 $\partial^2 f/\partial x^2$ 和 $\partial f/\partial y$ 都存在且连续，则*

$$f(X_t, A_t) = f(X_0, A_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, A_s)\,dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, A_s)\,dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, A_s)\,d\langle X\rangle_s.$$

这是因为有限变差过程与任何连续半鞅的二次协变差为零，且其随机积分退化为路径 wise 的 Riemann-Stieltjes 积分。

2. *Itô 公式可以写成微分形式*

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)\,d\langle X^i, X^j\rangle_t. \tag{1.44}$$

这是随机分析中常用的简洁表示，其严格意义即积分形式 (1.38)。

3. *更一般地，若过程 Y 满足 $dY_t = \sum_{i=1}^d H_t^i\,dX_t^i$，这等价于*

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i\,dX_s^i.$$

这种微分表示在随机微分方程理论中尤为重要。

定理 1.4.6 (关于布朗运动的 Itô 公式). *设 $f(t,x)$ 是二元函数，满足 $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 均存在且连续，并且 $\frac{\partial f}{\partial x} \in L^2$，则*

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\,dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\,ds. \tag{1.45}$$

或者，写成微分形式：

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)\,dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)\,dt. \tag{1.46}$$

证明. 为简化记号，我们不妨先设 $\frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)=0$，即 f 不显含时间 t。此时只需证明

$$f(B_t)=f(B_0)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s)\,dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s)\,ds. \tag{1.47}$$

令 $\pi=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_{N(\pi)}=t\}$ 是区间 $[0,t]$ 的一个分割。则：

$$f(B_t)=f(B_0)+\sum_{j=0}^{N(\pi)-1}\left[f(B_{t_{j+1}})-f(B_{t_j})\right]. \tag{1.48}$$

在分割的每个区间 $[t_j,t_{j+1}]$ 上应用 Taylor 定理，存在 $\xi_j\in[B_{t_j},B_{t_{j+1}}]$（或 $[B_{t_{j+1}},B_{t_j}]$，视大小关系而定）使得

$$f(B_{t_{j+1}})-f(B_{t_j})=f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})+\frac{1}{2}f''(\xi_j)(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2. \tag{1.49}$$

由布朗运动轨道的连续性，可将 ξ_j 写为 B_{η_j}，其中 $\eta_j\in[t_j,t_{j+1}]$。进一步，记

$$\epsilon_j=f''(B_{\eta_j})-f''(B_{t_j}), \tag{1.50}$$

则 (1.49) 可改写为

$$f(B_{t_{j+1}})-f(B_{t_j})=f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})+\frac{1}{2}f''(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2+\frac{1}{2}\epsilon_j(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2. \tag{1.51}$$

将 (1.51) 代入 (1.48)，得

$$\begin{aligned}f(B_t)=f(B_0)&+\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1}\epsilon_j(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2.\end{aligned} \tag{1.52}$$

现在分析各极限项：

步骤 1: 第一项的收敛：

由随机积分的定义，当分割的模 $|\pi|=\max_j(t_{j+1}-t_j)\to 0$ 时，简单过程

$$H_s^\pi=\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f'(B_{t_j})\mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(s)$$

在 $L^2(\Omega\times[0,t])$ 意义下收敛到 $f'(B_s)$。由 Itô 积分的等距性和连续性，

$$\int_0^t H_s^\pi\,dB_s=\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\xrightarrow{L^2}\int_0^t f'(B_s)\,dB_s=\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(B_s)\,dB_s.$$

即

$$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f'(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\xrightarrow{L^2}\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(B_s)\,dB_s. \tag{1.53}$$

步骤 2: 第二项的分解与收敛：

利用布朗运动的二次变差性质 $\langle B\rangle_t=t$，将平方项拆分为期望部分与鞅部分：

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j})(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2=&\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j})(t_{j+1}-t_j)\\&+\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j})\left[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2-(t_{j+1}-t_j)\right].\end{aligned} \tag{1.54}$$

(i) **确定性部分的收敛：**

由于 f'' 连续且布朗运动轨道连续，$f''(B_{t_j})$ 是 Riemann 可积的。当 $|\pi| \to 0$ 时，

$$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j})(t_{j+1}-t_j) \to \int_0^t f''(B_s)\,ds = \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s)\,ds \quad \text{a.s.}$$

即

$$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j})(t_{j+1}-t_j) \to \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s)\,ds \quad \text{a.s.} \tag{1.55}$$

(ii) **鞅部分的 L^2 收敛到零：**

若 f'' 有界，设 $|f''| \le M$。考虑

$$S_\pi = \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j}) \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right].$$

计算其 L^2 范数：

$$E[S_\pi^2] = E\left[\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (f''(B_{t_j}))^2 \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right]^2\right]$$
$$+ 2E\left[\sum_{i<j} f''(B_{t_i})f''(B_{t_j}) \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1}-t_i)\right]\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right]\right].$$

对角项： 由布朗运动的独立增量性和 $E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4] = 3(t_{j+1}-t_j)^2$，

$$E\left[\left((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right)^2\right] = E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4] - (t_{j+1}-t_j)^2 = 2(t_{j+1}-t_j)^2.$$

因此

$$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} E\left[(f''(B_{t_j}))^2 \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right]^2\right] \le 2M^2 \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (t_{j+1}-t_j)^2 \le 2M^2|\pi|t.$$

非对角项： 对 $i<j$，由条件期望和独立增量性，

$$E\left[f''(B_{t_i})f''(B_{t_j}) \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1}-t_i)\right]\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right]\right]$$
$$= E\left[f''(B_{t_i})f''(B_{t_j}) \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1}-t_i)\right] E\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] = 0.$$

因此 $E[S_\pi^2] \le 2M^2|\pi|t \to 0$ 当 $|\pi| \to 0$，即

$$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} f''(B_{t_j}) \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - (t_{j+1}-t_j)\right] \xrightarrow{L^2} 0. \tag{1.56}$$

步骤 3: 第三项的收敛：

由 f'' 的连续性和布朗运动的轨道连续性，当 $|\pi| \to 0$ 时，

$$\max_{0\le j\le N(\pi)-1} |\epsilon_j| = \max_{0\le j\le N(\pi)-1} |f''(B_{\eta_j}) - f''(B_{t_j})| \to 0 \quad \text{a.s.}$$

同时，$\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \to t$ 在概率意义下（由二次变差的收敛性）。因此

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1} \epsilon_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right| \le \frac{1}{2}\max_j |\epsilon_j| \cdot \sum_{j=0}^{N(\pi)-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \to 0 \quad \text{概率意义下.}$$

即

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N(\pi)-1}\epsilon_j(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2 \xrightarrow{\text{概率}} 0. \tag{1.57}$$

结合 (1.53), (1.55), (1.56) 和 (1.57)，在 (1.52) 中令 $|\pi|\to 0$，即得 (1.47)。 □

注. *(1)* **一般情形（f'' 无界时）:**

若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 仅连续但未必有界，定义停时

$$\tau_n = \inf\{t\geq 0 : |B_t| > n\}, \quad n\geq 1.$$

则 $\tau_n \uparrow \infty$ 几乎必然，且 $B_{t\wedge\tau_n}$ 是有界过程。考虑缩放过程 $\{B_{s/\sqrt{n}}\}_{s\geq 0}$，其仍为布朗运动（由布朗运动的缩放性质）。由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 连续，在紧集 $[-n,n]$ 上一致有界，因此过程 $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_{s/\sqrt{n}})\}_{s\geq 0}$ 在 $[0,\tau_n]$ 上一致有界。

对停止过程 B^{τ_n} 应用前述证明，得

$$f(B_{t\wedge\tau_n}) = f(B_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(B_s)\,ds.$$

令 $n\to\infty$，由 $\tau_n\uparrow\infty$ *a.s.* 以及随机积分的局部化性质，即得一般情形的 (1.45)。

(2) **含时间项的情形:**

若 f 显含时间 t，考虑二维过程 $\tilde{B}_t = (t, B_t)$，其中 t 是有限变差过程，B_t 是布朗运动。由于

$$d\langle t,t\rangle = 0, \quad d\langle t,B\rangle = 0, \quad d\langle B,B\rangle = dt,$$

应用一般 Itô 公式（*theorem 1.4.5*）于 $f(\tilde{B}_t) = f(t,B_t)$，得

$$\begin{aligned} df(t,B_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,d\langle t\rangle + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\,d\langle t,B\rangle + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle B\rangle\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)\,dt. \end{aligned}$$

积分即得 (1.45)，其微分形式为 (1.46)。

问题 1.4.1. 计算 $E[B_t^4]$ 和 $E[B_t^6]$。

证明.

法一 利用 Itô 公式

考虑函数 $f(x) = x^4$，则

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2.$$

对 $f(B_t)$ 应用 Itô 公式:

$$d(B_t^4) = 4B_t^3\,dB_t + \frac{1}{2}\cdot 12B_t^2\,dt = 4B_t^3\,dB_t + 6B_t^2\,dt.$$

积分得

$$B_t^4 = 4\int_0^t B_s^3\,dB_s + 6\int_0^t B_s^2\,ds.$$

取期望（注意 Itô 积分的期望为零 (proposition 1.4.1(iv)))：

$$E[B_t^4] = 6\int_0^t E[B_s^2]\,ds = 6\int_0^t s\,ds = 6\cdot\frac{t^2}{2} = 3t^2.$$

注. 这里的期望与积分可交换是由 Fubini 定理所保证的.

类似地，对 $f(x) = x^6$，有

$$f'(x) = 6x^5, \quad f''(x) = 30x^4.$$

Itô 公式给出：

$$d(B_t^6) = 6B_t^5\,dB_t + \frac{1}{2}\cdot 30B_t^4\,dt = 6B_t^5\,dB_t + 15B_t^4\,dt.$$

积分并取期望：

$$E[B_t^6] = 15\int_0^t E[B_s^4]\,ds = 15\int_0^t 3s^2\,ds = 45\cdot\frac{t^3}{3} = 15t^3.$$

法二 利用矩母函数

布朗运动在时刻 t 的分布为 $N(0,t)$，其矩母函数为

$$E[e^{\lambda B_t}] = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}.$$

对 λ 求导可得各阶矩：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}E[e^{\lambda B_t}] &= E[B_t e^{\lambda B_t}] = \lambda t e^{\frac{\lambda^2 t}{2}},\\
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}E[e^{\lambda B_t}] &= E[B_t^2 e^{\lambda B_t}] = (t+\lambda^2 t^2)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}},\\
\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}E[e^{\lambda B_t}] &= E[B_t^3 e^{\lambda B_t}] = (3\lambda t^2+\lambda^3 t^3)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}},\\
\frac{\partial^4}{\partial\lambda^4}E[e^{\lambda B_t}] &= E[B_t^4 e^{\lambda B_t}] = (3t^2+6\lambda^2 t^3+\lambda^4 t^4)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}},\\
\frac{\partial^5}{\partial\lambda^5}E[e^{\lambda B_t}] &= E[B_t^5 e^{\lambda B_t}] = (15\lambda t^3+10\lambda^3 t^4+\lambda^5 t^5)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}},\\
\frac{\partial^6}{\partial\lambda^6}E[e^{\lambda B_t}] &= E[B_t^6 e^{\lambda B_t}] = (15t^3+45\lambda^2 t^4+15\lambda^4 t^5+\lambda^6 t^6)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}.
\end{aligned}$$

令 $\lambda = 0$ 即得

$$E[B_t^4] = 3t^2, \quad E[B_t^6] = 15t^3.$$

法三 利用递推关系

设 $m_n(t) = E[B_t^n]$。对 $f(x) = x^n$ 应用 Itô 公式：

$$d(B_t^n) = nB_t^{n-1}dB_t + \frac{n(n-1)}{2}B_t^{n-2}dt.$$

取期望得微分方程：

$$\frac{d}{dt}m_n(t) = \frac{n(n-1)}{2}m_{n-2}(t), \quad n \geq 2,$$

初始条件 $m_n(0) = 0$ 对 $n \geq 1$。已知 $m_0(t) = 1$, $m_2(t) = t$。递推：

$$\begin{aligned}
m_4(t) &= \frac{4\cdot 3}{2}\int_0^t m_2(s)\,ds = 6\int_0^t s\,ds = 3t^2,\\
m_6(t) &= \frac{6\cdot 5}{2}\int_0^t m_4(s)\,ds = 15\int_0^t 3s^2\,ds = 15t^3.
\end{aligned}$$

□

由递推关系，更一般的我们可以得到如下定理：

定理 1.4.7 (布朗运动的 n 阶矩)**.**

(i) 奇数阶矩：对任意 $n = 2k+1$（$k \geq 1$），有

$$E[B_t^{2k+1}] = 0$$

(ii) 偶数阶矩：对任意 $n = 2k$（$k \geq 1$），有

$$E[B_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} t^k.$$

即：

$$E[B_t^{2k}] = (2k-1)!! \cdot t^k,$$

其中 $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1$ 是双阶乘。

证明.

设 $m_n(t) = E[B_t^n]$，其中 B_t 是标准布朗运动。对 $f(x) = x^n$ 应用 Itô 公式：

$$d(B_t^n) = nB_t^{n-1}\,dB_t + \frac{n(n-1)}{2}B_t^{n-2}\,dt.$$

取期望并利用 Itô 积分期望为零的性质，得到微分方程：

$$\frac{d}{dt}m_n(t) = \frac{n(n-1)}{2}m_{n-2}(t), \quad n \geq 2.$$

初始条件为 $m_n(0) = 0$ 对 $n \geq 1$，且 $m_0(t) = 1$。

(i) 奇数阶矩：

由于布朗运动的对称性，所有奇数阶矩为零：

$$m_{2k+1}(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

这是因为 $B_t \overset{d}{=} -B_t$，故 $E[B_t^{2k+1}] = -E[B_t^{2k+1}]$，迫使期望为零。

(ii) 偶数阶矩：

对 $n = 2k$，递推关系为

$$\frac{d}{dt}m_{2k}(t) = k(2k-1)m_{2k-2}(t), \quad k \geq 1.$$

初始条件 $m_{2k}(0) = 0$（$k \geq 1$）。下面我们采用归纳法来证明：

♡ **基础情形**： $k = 1$ 时，$E[B_t^2] = t = \frac{2!}{2^1 \cdot 1!}t^1$ 成立。

♡ **归纳假设**：假设对 $k-1$ 成立，即

$$m_{2k-2}(t) = \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}t^{k-1}.$$

♡ **归纳步骤**：由微分方程：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_{2k}(t) &= k(2k-1)\cdot\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}t^{k-1}\\ &= \frac{k(2k-1)(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}t^{k-1}\\ &= \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}t^{k-1}.\end{aligned}$$

积分并利用 $m_{2k}(0)=0$：

$$\begin{aligned}m_{2k}(t) &= \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}\int_0^t s^{k-1}\,ds\\ &= \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}\cdot\frac{t^k}{k}\\ &= \frac{(2k)!}{2^k k!}t^k.\end{aligned}$$

□

今天被老江点了... 有一个很重要的东西：

$$EX_t^2=\int_0^t Ef^2(s)ds<+\infty \Rightarrow X_t=\int_0^t f(s)dB_s \text{ 是鞅}$$

知道这个后给我打开了新世界大门！

下面这个题是老江点我答的，结果 *nnd* 他的 α 我以为是 ∂，给我一整个整不会了...

> **问题 1.4.2.** 利用 Itô 公式证明 $X_t=e^{\alpha B_t-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$ 是鞅.

证明. 我们令

$$f(t,x)=e^{\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

由 Itô 公式：

$$\begin{aligned}f(t,B_t) &= f(0,B_0)+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)dB_s+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)ds\\ &= 1+\alpha\int_0^t X_s dBs+(-\frac{1}{2}\alpha^2)\int_0^t X_s ds+\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^t X_s ds\\ &= 1+\alpha\int_0^t X_s dBs\end{aligned}$$

此时，我们发现实际上

$$E[\int_0^t X_s^2 ds]=\int_0^t E[X_s^2]ds=\int_0^t E[e^{2\alpha B_s-\alpha^2 s}]ds<\infty$$

故 $\alpha\int_0^t X_s dBs$ 是鞅，进而 $X_t=e^{\alpha B_t-\frac{1}{2}\alpha^2 t}=f(t,B_t)=1+\alpha\int_0^t X_s dBs$ 也是鞅.

注. 因为 $X_s^2=e^{2\alpha B_s-\alpha^2 s}\geq 0$ 对任意 $s\geq 0$ 成立，所以可以应用 *Tonelli* 定理（非负函数的 *Fubini* 定理）交换期望与积分：

$$E\left[\int_0^t X_s^2\,ds\right]=\int_0^t E[X_s^2]\,ds.$$

这里交换是合理的，并不需要先验证可积性；若交换后结果为有限，则同时也说明原随机积分属于 L^1。

接下来计算 $E[X_s^2]$。已知 $B_s \sim N(0,s)$，对任意实数 c 有

$$E[e^{cB_s}] = e^{\frac{1}{2}c^2 s}.$$

于是

$$E[X_s^2] = E\left[e^{2\alpha B_s - \alpha^2 s}\right] = e^{-\alpha^2 s}\, E\left[e^{2\alpha B_s}\right].$$

代入 $c = 2\alpha$ 得

$$E[e^{2\alpha B_s}] = e^{\frac{1}{2}(2\alpha)^2 s} = e^{2\alpha^2 s}.$$

因此

$$E[X_s^2] = e^{-\alpha^2 s} \cdot e^{2\alpha^2 s} = e^{\alpha^2 s}.$$

现在积分：

$$\int_0^t E[X_s^2]\, ds = \int_0^t e^{\alpha^2 s}\, ds.$$

如果 $\alpha = 0$，则积分为 $\int_0^t 1\, ds = t$；如果 $\alpha \neq 0$，则

$$\int_0^t e^{\alpha^2 s}\, ds = \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{\alpha^2 t} - 1\right).$$

两者对有限 $t > 0$ 均有限，从而原期望有限且等式成立。

□

实际上上面这个问题跟下面这个问题一样的：

问题 1.4.3. 判断 μ, σ 满足什么条件时，$f(t, B_t) = e^{\mu t + \sigma B_t}$ 是鞅.

法一（鞅的定义）.

设 $X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$，其中 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动，$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$。

首先检查可积性：由于 $B_t \sim N(0,t)$，其矩母函数为 $E[e^{uB_t}] = e^{\frac{1}{2}u^2 t}$。于是

$$E[|X_t|] = E[e^{\mu t + \sigma B_t}] = e^{\mu t} E[e^{\sigma B_t}] = e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}.$$

对任意有限 t，该期望有限，故 $X_t \in L^1$ 对每个 $t \geq 0$ 成立。

其次验证鞅性质：对 $0 \leq s < t$，计算条件期望

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = E\left[e^{\mu t + \sigma B_t} \mid \mathcal{F}_s\right].$$

注意到 $B_t = B_s + (B_t - B_s)$，且 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，服从 $N(0, t-s)$。于是

$$\begin{aligned}
E[X_t \mid \mathcal{F}_s] &= e^{\mu t} E\left[e^{\sigma(B_s + (B_t - B_s))} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{\mu t} e^{\sigma B_s} E\left[e^{\sigma(B_t - B_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] \quad (\text{因}B_s\text{ 关于}\mathcal{F}_s\text{可测}) \\
&= e^{\mu t} e^{\sigma B_s} E\left[e^{\sigma(B_t - B_s)}\right] \quad (\text{独立性}) \\
&= e^{\mu t} e^{\sigma B_s} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)}.
\end{aligned}$$

另一方面，$X_s = e^{\mu s + \sigma B_s}$。因此

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s \cdot e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)}.$$

要使 X 是鞅，必须对任意 $s<t$ 有

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s.$$

这等价于

$$e^{\mu(t-s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} = 1 \quad \text{对所有} t > s \geq 0.$$

由于 $t-s>0$，这又等价于指数上的系数为零：

$$\mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0.$$

$\square$

法二（Itô 公式）. 设 $X_t = e^{\mu t+\sigma B_t}$，其中 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动，$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s: 0\leq s\leq t)$。

考虑函数 $f(t,x) = e^{\mu t+\sigma x}$，计算偏导数：

$$f_t = \mu e^{\mu t+\sigma x}, \quad f_x = \sigma e^{\mu t+\sigma x}, \quad f_{xx} = \sigma^2 e^{\mu t+\sigma x}.$$

对 $f(t,B_t)$ 应用 Itô 公式：

$$\begin{aligned} df(t,B_t) &= f_t dt + f_x dB_t + \frac{1}{2} f_{xx} dt \\ &= \mu e^{\mu t+\sigma B_t} dt + \sigma e^{\mu t+\sigma B_t} dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\mu t+\sigma B_t} dt \\ &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t. \end{aligned}$$

写成积分形式：

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) X_s\, ds + \int_0^t \sigma X_s\, dB_s.$$

右端第二项 $\int_0^t \sigma X_s\, dB_s$ 是 Itô 积分，如果满足适应性及 L^2 可积条件（当 t 有限时易验证），则该积分是局部鞅（实际上是鞅，若 $E\int_0^t (\sigma X_s)^2 ds < \infty$）。但第一项 $\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) X_s\, ds$ 是有界变差过程。

一个连续半鞅是鞅当且仅当其有限变差部分为零（或更准确地说，其漂移项为零）。因此，要使 X_t 为鞅，必须有：

$$\mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0.$$

在此条件下，$df(t,B_t) = \sigma X_t\, dB_t$，即

$$X_t = 1 + \int_0^t \sigma X_s\, dB_s,$$

接下来的验证过程同上一题.

注. 这是一个零初值的 Itô 积分，若满足 $E\int_0^t (\sigma X_s)^2 ds < \infty$，则它是鞅。我们验证这个条件：当 $\mu = -\frac{\sigma^2}{2}$ 时，

$$X_s = e^{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s},$$

从而

$$X_s^2 = e^{2\sigma B_s - \sigma^2 s}.$$

取期望：

$$E[X_s^2] = e^{-\sigma^2 s} E[e^{2\sigma B_s}] = e^{-\sigma^2 s} e^{2\sigma^2 s} = e^{\sigma^2 s}.$$

于是

$$E\int_0^t (\sigma X_s)^2 ds = \sigma^2 \int_0^t e^{\sigma^2 s} ds < \infty \quad (\text{对有限}t),$$

故 *Itô* 积分 $\int_0^t \sigma X_s\, dB_s$ 是鞅，从而 X_t 是鞅。

反之，若 $\mu + \frac{\sigma^2}{2} \neq 0$，则 X_t 的漂移项非零，X_t 不是鞅（实际上是一个几何布朗运动，具有非零的漂移率 $\mu + \frac{\sigma^2}{2}$）。

□

下面我们进一步讨论指数鞅（*exponential martingale*）:

命题 1.4.8. 设 f 是定义在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 上的复值函数，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都存在连续，且满足

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

则对任意连续局部鞅 M，$f(M_t, \langle M, M\rangle_t)$ 是局部鞅。特别的，过程

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\right) \tag{22}$$

是连续局部鞅，称为 M 的指数鞅。

证明. 设 M 为连续局部鞅。令 $A_t = \langle M, M\rangle_t$，则 A 是连续可料增过程。考虑过程 $Y_t = f(M_t, A_t)$。

对 $f(x,y)$ 应用 Itô 公式。首先说明在微分计算中各项二次协变差的性质:

注 ($dM_t \cdot dM_t = dA_t$ 的解释). 对于连续局部鞅 M，其二次变差过程 $\langle M, M\rangle_t$ 定义为满足以下性质的唯一连续递增过程:

$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t \quad \text{是局部鞅}.$$

在微分形式下，这等价于 $(dM_t)^2 = d\langle M, M\rangle_t = dA_t$。在 *Itô* 公式中，$f_{xx}$ 项的系数正是 $dM_t \cdot dM_t$，因此它等于 dA_t。

根据二次变差的定义，过程 M_t^2 可以分解为一个局部鞅项和一个有限变差项:

$$M_t^2 = M_0^2 + \int_0^t 2M_s\, dM_s + \langle M, M\rangle_t.$$

其微分形式为:

$$d(M_t^2) = 2M_t\, dM_t + d\langle M, M\rangle_t = 2M_t\, dM_t + dA_t.$$

另一方面，根据 *Itô* 公式，对函数 $f(x) = x^2$ 应用于 M_t，我们有:

$$d(M_t^2) = 2M_t\, dM_t + \frac{1}{2}f''(M_t)\, d[M, M]_t.$$

由于 $f''(x) = 2$，且对于连续局部鞅，互变差 $[M, M]_t$ 与二次变差 $\langle M, M\rangle_t$ 相等，即 $[M, M]_t = \langle M, M\rangle_t = A_t$，故有:

$$d(M_t^2) = 2M_t\, dM_t + d[M, M]_t = 2M_t\, dM_t + dA_t.$$

对比 *Itô* 公式中的二阶项 $d[M, M]_t$ 即可得出结论:

$$dM_t \cdot dM_t = d[M, M]_t = dA_t.$$

注 ($dA_t \cdot dA_t = 0$ 的解释). 由于 $A_t = \langle M, M\rangle_t$ 是连续有限变差过程，对于任意分割 $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$，其二次变差 $[A, A]_t$ 必须为零。

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \leq \left(\max_{1\leq i\leq n}|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|\right)\sum_{i=1}^{n}|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \to 0$$

当分割细度 $\|\pi\| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$ 趋于零时。因此二次变差 $[A, A]_t = 0$，在微分形式中记为 $dA_t \cdot dA_t = 0$。

过程 A 的互变差 $[A, A]_t$ 定义为：

$$[A, A]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2.$$

由于 A_t 是连续且有限变差过程，我们对求和项进行放缩：

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \leq \max_{1\leq i\leq n}|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \cdot \sum_{i=1}^{n}|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|.$$

当 $\|\pi\| \to 0$ 时：

- ♡ A 的连续性（一致连续模）保证了 $\max_i |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \to 0$.
- ♡ A 的有限变差性保证了 $\sum_i |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|$ 收敛到 有限 的全变差 $\mathrm{Var}(A)_t$.

因此，上式右侧的上界趋于 $0 \cdot \mathrm{Var}(A)_t = 0$.

$$\text{故}\quad [A, A]_t = 0, \quad \text{记作}\quad dA_t \cdot dA_t = 0.$$

注 ($dM_t \cdot dA_t = 0$ 的解释). 一个连续局部鞅 M 与一个连续有限变差过程 A 的互变差为零，即 $[M, A]_t = 0$。这是因为互变差的定义为：

$$[M, A]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}),$$

而 A 的有界变差性质保证了该极限为零。在微分形式下，这表示为 $dM_t \cdot dA_t = 0$。

过程 M 和 A 的互变差 $[M, A]_t$ 定义为：

$$[M, A]_t = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}).$$

我们对求和项的绝对值进行放缩：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}||A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|.$$

利用 max 项进行进一步放缩：

$$\leq \left(\max_{1\leq i\leq n}|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|\right)\sum_{i=1}^{n}|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|.$$

当 $\|\pi\| \to 0$ 时：

- ♡ M 的连续性 $\implies \max_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \to 0$ (依概率收敛).
- ♡ A 的有限变差性 $\implies \sum_i |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \to \mathrm{Var}(A)_t < \infty$.

因此，上式右侧的乘积依概率收敛到 $0 \cdot \mathrm{Var}(A)_t = 0$.

$$\text{故} \quad [M, A]_t = 0, \quad \text{记作} \quad dM_t \cdot dA_t = 0.$$

基于以上三点，我们可以严谨地应用 Itô 公式。对二元函数 $f(x, y)$，其 Itô 公式的一般形式为：

$$df(X_t, Y_t) = f_x(X_t, Y_t)dX_t + f_y(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}f_{xx}(X_t, Y_t)d[X, X]_t + f_{xy}(X_t, Y_t)d[X, Y]_t + \frac{1}{2}f_{yy}(X_t, Y_t)d[Y, Y]_t.$$

在我们的情形中，$X_t = M_t$，$Y_t = A_t$。根据前面的注记，我们有：

$$d[M, M]_t = dA_t,$$
$$d[M, A]_t = 0,$$
$$d[A, A]_t = 0.$$

因此，Itô 公式简化为：

$$dY_t = df(M_t, A_t) = f_x(M_t, A_t)dM_t + f_y(M_t, A_t)dA_t + \frac{1}{2}f_{xx}(M_t, A_t)dA_t,$$

其中 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$，$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$，$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$。合并 dA_t 的同类项得：

$$dY_t = f_x(M_t, A_t)dM_t + \left[f_y(M_t, A_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(M_t, A_t) \right] dA_t.$$

由于 f 满足偏微分方程 $f_y + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$，我们有：

$$f_y(M_t, A_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(M_t, A_t) = 0 \quad \text{对所有} t \geq 0.$$

于是 dA_t 的系数恒为零，从而：

$$dY_t = f_x(M_t, A_t)dM_t.$$

这是一个关于局部鞅 M 的随机积分。由于 f_x 是连续函数（由 f 的光滑性假设），复合过程 $f_x(M_t, A_t)$ 是适应的且连续。连续过程在紧时间区间上是局部有界的，因此存在一列停时 $\tau_n \uparrow \infty$，使得对每个 n，过程 $f_x(M_{t\wedge\tau_n}, A_{t\wedge\tau_n})$ 有界。于是随机积分

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} f_x(M_s, A_s)dM_s$$

是鞅（因为被积函数有界且 M 是局部鞅）。这表明 Y_t 是一个局部鞅。

特别地，取 $f(x, y) = \exp\left(x - \frac{1}{2}y\right)$，则：

$$f_y(x, y) = -\frac{1}{2}\exp\left(x - \frac{1}{2}y\right) = -\frac{1}{2}f(x, y),$$

$$f_{xx}(x, y) = \exp\left(x - \frac{1}{2}y\right) = f(x, y).$$

于是：

$$f_y(x, y) + \frac{1}{2}f_{xx}(x, y) = -\frac{1}{2}f(x, y) + \frac{1}{2}f(x, y) = 0,$$

满足偏微分方程条件。因此：

$$\mathcal{E}(M)_t = f(M_t, A_t) = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\right)$$

是连续局部鞅。需要说明的是，这里的连续性由 M_t 和 A_t 的连续性以及指数函数的连续性保证。 □

注.

(i) 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 过程 $\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \mathcal{E}(\lambda M)_t$ 也是局部鞅。这里

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{1}{2}\lambda^2\langle M, M\rangle_t\right).$$

容易验证,

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \mathcal{E}^\lambda(M)_0 + \int_0^t \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_s \, dM_s,$$

即 $\mathcal{E}^\lambda(M)$ 是随机微分方程

$$dY_t = \lambda Y_t \, dM_t$$

的解。

细节说明.

首先验证随机微分方程: 对 $f(x, y) = \exp(\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 y)$ 应用 *Itô* 公式。这里 $x = M_t$, $y = \langle M, M\rangle_t$。注意 M_t 是连续局部鞅, $\langle M, M\rangle_t$ 是连续有限变差过程。计算 f 的一阶和二阶偏导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\exp(\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 y) = \lambda \exp(\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 y) = \lambda f, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\exp(\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 y) = -\tfrac{1}{2}\lambda^2 \exp(\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 y) = -\tfrac{1}{2}\lambda^2 f, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \exp(\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 y)\right) = \lambda^2 \exp(\lambda x - \tfrac{1}{2}\lambda^2 y) = \lambda^2 f.
\end{aligned}$$

验证 f 满足 *proposition 1.4.8* 中的偏微分方程条件:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{2}\lambda^2 f + \tfrac{1}{2}\lambda^2 f = 0.$$

因此, 根据 *proposition 1.4.8* 的结论 (或直接应用 *Itô* 公式), 对 $Y_t = f(M_t, \langle M, M\rangle_t) = \mathcal{E}^\lambda(M)_t$ 有:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{E}^\lambda(M)_t &= \frac{\partial f}{\partial x} dM_t + \frac{\partial f}{\partial y} d\langle M, M\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle M, M\rangle_t \\
&= \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_t dM_t + \left(-\tfrac{1}{2}\lambda^2 \mathcal{E}^\lambda(M)_t + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \mathcal{E}^\lambda(M)_t\right) d\langle M, M\rangle_t \\
&= \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_t dM_t.
\end{aligned}$$

这里 $d\langle M, M\rangle_t$ 的系数恰好为零, 这正是因为 f 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$。

上述随机微分方程 $d\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_t dM_t$ 是一个不含漂移项 (即不含 dt 项) 的 *Itô* 方程。其积分形式为:

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = \mathcal{E}^\lambda(M)_0 + \int_0^t \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_s dM_s.$$

由于 $\mathcal{E}^\lambda(M)_s$ 是连续适应过程 (从而是局部有界的), 且 M 是连续局部鞅, 因此 *Itô* 积分 $\int_0^t \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_s dM_s$ 是局部鞅。事实上, 存在一列停时 $\tau_n \uparrow \infty$ 使得 $\mathcal{E}^\lambda(M)_{t\wedge\tau_n}$ 和 $M_{t\wedge\tau_n}$ 均有界, 从而 $\int_0^{t\wedge\tau_n} \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_s dM_s$ 是鞅。这表明 $\mathcal{E}^\lambda(M)$ 本身是局部鞅。

最后注意, 当 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为复数时, 以上推导依然成立, 因为 *Itô* 公式对复值函数同样适用, 且 f 仍满足相同的偏微分方程条件。 □

(ii) 对于布朗运动 $B=(B_t)$，我们已经知道 $\mathcal{E}^\lambda(B)_t=\exp\left(\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$ 是鞅。进一步，对任意确定性函数 $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$，定义 *Itô* 积分 $I_t=\int_0^t f(u)\,dB_u$，这是一个连续局部鞅，且其二次变差为 $\langle I,I\rangle_t=\int_0^t f^2(u)\,du$。于是对应的指数

$$\mathcal{E}_t^f=\exp\left(\int_0^t f(u)\,dB_u-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(u)\,du\right)$$

就是 $\mathcal{E}(I)_t$。由 *proposition 1.4.8* 知它是局部鞅；进一步，由于 f 是确定性的且平方可积，可以验证 $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^f]=1$ 对所有 t 成立（例如使用矩母函数公式），从而 $\mathcal{E}^f$ 是鞅。

细节说明.

首先验证 I_t 是连续局部鞅：由于 $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$，*Itô* 积分 $\int_0^t f(u)dB_u$ 是定义良好的，并且是连续局部鞅。其二次变差为:

$$\langle I,I\rangle_t=\int_0^t f^2(u)du.$$

这是因为对于 *Itô* 积分，有 $dI_t=f(t)dB_t$，从而 $d\langle I,I\rangle_t=f^2(t)dt$。

现在考虑 $\mathcal{E}_t^f=\exp\left(I_t-\frac{1}{2}\langle I,I\rangle_t\right)$。根据 *proposition 1.4.8* ，这是一个局部鞅。要证明它是鞅，只需验证 $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^f]=1$。由于 f 是确定性的，$I_t\sim N\left(0,\int_0^t f^2(u)du\right)$，因此:

$$\mathbb{E}[e^{I_t}]=\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f^2(u)du\right).$$

从而

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^f]=\mathbb{E}\left[\exp\left(I_t-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(u)du\right)\right]=e^{-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(u)du}\cdot\mathbb{E}[e^{I_t}]=1.$$

由于 $\mathcal{E}_t^f$ 是非负局部鞅且期望为 *1*，根据非负局部鞅的性质，它必为鞅。 □

(iii) $\mathcal{E}^\lambda(M)$ 是一个正值的局部鞅，因此它是上鞅（因为非负局部鞅必为上鞅）。设 $M_0=0$，则 $\mathcal{E}^\lambda(M)_0=1$。$\mathcal{E}^\lambda(M)$ 是鞅当且仅当 $\mathbb{E}\big[\mathcal{E}^\lambda(M)_t\big]=1$ 对所有 $t\geq 0$ 成立。可以证明，如果有 $\alpha>1/2$，满足对任意 $t>0$，

$$\mathbb{E}\big[\exp\left(\alpha\langle M,M\rangle_t\right)\big]<\infty,$$

那么 $\mathbb{E}\big[\mathcal{E}(M)_t\big]=1$，从而 $\mathcal{E}(M)$ 是一个真正的鞅（而不仅仅是局部鞅）。这一结论是 *Novikov* 条件或 *Kazamaki* 条件的特例，其证明留作练习。该条件保证了局部鞅 $\mathcal{E}(M)$ 一致可积，从而成为鞅。

细节说明.

首先说明非负局部鞅是上鞅：设 X 是非负局部鞅，存在一列停时 $\tau_n\uparrow\infty$ 使得 X^{τ_n} 是鞅。由 *Fatou* 引理，对 $s<t$:

$$\mathbb{E}[X_t\mid\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty}X_{t\wedge\tau_n}\mid\mathcal{F}_s\right]\leq\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau_n}\mid\mathcal{F}_s]=\liminf_{n\to\infty}X_{s\wedge\tau_n}=X_s.$$

因此 X 是上鞅。

当 $M_0=0$ 时，$\mathcal{E}^\lambda(M)_0=1$。$\mathcal{E}^\lambda(M)$ 是鞅当且仅当 $\mathbb{E}[\mathcal{E}^\lambda(M)_t]=1$ 对所有 t 成立，因为此时上鞅的期望为常数。

Novikov 条件的一种形式是：如果存在 $\alpha > 1/2$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha\langle M, M\rangle_t\right)\right] < \infty \quad \text{对所有} t > 0,$$

则 $\mathcal{E}(M)$ 是鞅。这里 $\alpha > 1/2$ 的条件保证了指数矩足够小，使得 $\mathcal{E}(M)$ 不仅局部而且全局可积。具体证明需要构造适当的停时序列并使用一致可积性，此处从略。 □

布朗运动与分析、几何中众多领域有着非常深刻的联系。若 $B^1, \ldots, B^n$ 是相互独立的一维布朗运动，我们称 $B = (B^1, \ldots, B^d)$ 为 d 维布朗运动。

命题 1.4.9. 设 B 是 d 维布朗运动，$f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$，则

$$M_t^f = f(t, B_t) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(s, B_s)\, ds$$

是局部鞅。

特别的，若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上调和，即 $\Delta f = 0$，则 $f(B)$ 是局部鞅。反过来的结论也是对的。

证明. 设 $f(t,x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$。对 $f(t, B_t)$ 应用多维 Itô 公式。记 $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$，其中各分量独立且满足 $dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt$。

Itô 公式给出：

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, B_t)dB_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, B_t)dB_t^i dB_t^j.$$

由于 $dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt$，交叉项当 $i \neq j$ 时为零，故上式简化为

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, B_t)dB_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t, B_t)dt.$$

注意到 $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$，因此

$$df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f\right)(t, B_t)dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, B_t)dB_t^i.$$

将其写成积分形式：

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f\right)(s, B_s)ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, B_s)dB_s^i.$$

移项得

$$f(t, B_t) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f\right)(s, B_s)ds = f(0, B_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, B_s)dB_s^i.$$

右边第二项是 Itô 积分之和。由于每个被积函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(s, B_s)$ 连续（从而局部有界），每个积分都是局部鞅，因此它们的和也是局部鞅。从而

$$M_t^f := f(t, B_t) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(s, B_s)ds$$

是局部鞅。

特别地，若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上调和且不显含时间，即 $\Delta f=0$ 且 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，则 $M_t^f=f(B_t)$ 是局部鞅。

反之，若 $f(B_t)$ 是局部鞅，则由 Itô 公式知漂移项必须为零，即 $\frac{1}{2}\Delta f=0$，从而 f 是调和的。若还显含时间，则要求 $\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta f=0$，即 f 满足热方程。

注. *记号 $dB_t^i dB_t^j=\delta_{ij}dt$ 是 Itô 随机分析中的微分形式符号，其严格含义是布朗运动分量的二次协变差满足：*

$$d\langle B^i,B^j\rangle_t=\delta_{ij}dt,$$

即

$$\langle B^i,B^j\rangle_t=\delta_{ij}t.$$

这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号：当 $i=j$ 时 $\delta_{ij}=1$，当 $i\neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$。这是因为 B^i 与 B^j 是相互独立的标准布朗运动（当 $i\neq j$ 时），独立布朗运动的互变差为零；当 $i=j$ 时，$\langle B^i,B^i\rangle_t=t$，即一维布朗运动的二次变差为 t。在 Itô 公式的微分计算中，$dB_t^i dB_t^j$ 这一项实际上代表 $d\langle B^i,B^j\rangle_t$，而非普通的乘法。

□

至于为什么有：$d\langle B^i,B^j\rangle_t=\delta_{ij}dt$，请看下面这个更强的结果：

定理 1.4.10 (布朗运动的 Lévy 特征)**.** 设 $B=(B^1,\dots,B^d)$ 是 d 维连续 $\mathcal{F}_t$-局部鞅，$B_0=0$，且

$$\langle B^i,B^j\rangle_t=\delta_{ij}t.$$

则 B 是 d 维标准布朗运动。

证明. 只需要证明对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}^d$ 和 $0<s\leq t$，有

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_t-B_s)}\mid\mathcal{F}_s\right]=e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}.\tag{1.58}$$

设 $f(x)=e^{i(\lambda,x)}$。这里 $(\lambda,x)=\sum_{k=1}^d\lambda_k x_k$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的内积。由于 f 是光滑函数，我们可以对 $f(B_t)$ 应用 Itô 公式。计算 f 的偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=i\lambda_k e^{i(\lambda,x)},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}=-\lambda_k^2 e^{i(\lambda,x)},$$

且当 $k\neq l$ 时 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}=0$。

对 $f(B_t)=e^{i(\lambda,B_t)}$ 在区间 $[s,t]$ 上应用 Itô 公式：

$$\begin{aligned}df(B_t)&=\sum_{k=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_k}(B_t)dB_t^k+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(B_t)d\langle B^k,B^l\rangle_t\\&=\sum_{k=1}^d i\lambda_k e^{i(\lambda,B_t)}dB_t^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d(-\lambda_k^2)e^{i(\lambda,B_t)}d\langle B^k,B^k\rangle_t.\end{aligned}$$

由假设 $\langle B^k,B^l\rangle_t=\delta_{kl}t$，故 $d\langle B^k,B^k\rangle_t=dt$，且当 $k\neq l$ 时 $d\langle B^k,B^l\rangle_t=0$。因此

$$df(B_t)=\sum_{k=1}^d i\lambda_k e^{i(\lambda,B_t)}dB_t^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d\lambda_k^2 e^{i(\lambda,B_t)}dt.$$

将其写成积分形式：

$$e^{i(\lambda,B_t)} - e^{i(\lambda,B_s)} = \sum_{k=1}^{d} \int_s^t i\lambda_k e^{i(\lambda,B_u)} dB_u^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^2 \int_s^t e^{i(\lambda,B_u)} du. \tag{1.59}$$

现在考虑条件期望。由于每个 B^k 是连续局部鞅且 $\langle B^k, B^k\rangle_t = t$，特别地，$B^k$ 是平方可积鞅（事实上是 L^2-有界鞅，因为 $\mathbb{E}[(B_t^k)^2] = t$ 有界于有限区间上）。因此，对任意 k，Itô 积分 $\int_s^t i\lambda_k e^{i(\lambda,B_u)} dB_u^k$ 是鞅增量，满足

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t i\lambda_k e^{i(\lambda,B_u)} dB_u^k \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = 0. \tag{1.60}$$

对 (1.59) 式两边取关于 $\mathcal{F}_s$ 的条件期望，并利用 (1.60) 式，得

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_t)} \mid \mathcal{F}_s\right] - e^{i(\lambda,B_s)} = -\frac{1}{2}|\lambda|^2 \int_s^t \mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_u)} \mid \mathcal{F}_s\right] du,$$

其中 $|\lambda|^2 = \sum_{k=1}^d \lambda_k^2$。令

$$g(u) := \mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_u)} \mid \mathcal{F}_s\right], \quad u \geq s.$$

则 $g(s) = e^{i(\lambda,B_s)}$，且 g 满足积分方程

$$g(t) - e^{i(\lambda,B_s)} = -\frac{1}{2}|\lambda|^2 \int_s^t g(u) du.$$

对 t 求导（或直接观察），知 g 满足微分方程

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{1}{2}|\lambda|^2 g(t), \quad g(s) = e^{i(\lambda,B_s)}.$$

解此方程得

$$g(t) = e^{i(\lambda,B_s)} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}.$$

因此，

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_t)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{i(\lambda,B_s)} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)},$$

等价地，

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_t-B_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}. \tag{1.61}$$

最后，要说明 (1.61) 式意味着 B 是标准布朗运动。首先注意到 $B_0 = 0$，且 B 是连续过程（由定理条件）。对于任意的 $0 \leq s < t$，条件 (1.61) 给出增量 $B_t - B_s$ 关于 $\mathcal{F}_s$ 的条件特征函数与 $\mathcal{F}_s$ 无关，即

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\lambda,B_t-B_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad \text{对所有}\lambda \in \mathbb{R}^d.$$

这意味着 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立（因为其特征函数不依赖于 $\mathcal{F}_s$ 中的信息），且其分布为 d 维正态分布 $N(0,(t-s)I_d)$。此外，对任意的 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，由条件独立性和正态性可知，增量 $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立，且每个增量服从相应的零均值正态分布。这正是 d 维标准布朗运动的定义。因此，B 是 d 维标准布朗运动。 □

推论 1.4.11. *一维布朗运动是唯一以 t 为二次变差过程的连续局部鞅。*

证明. 考虑一维情形（$d = 1$）。设 M 是连续局部鞅，满足 $M_0 = 0$ 且 $\langle M, M\rangle_t = t$。根据 theorem 1.4.10，这样的 M 必定是标准布朗运动。这包含了两层含义：

存在性 标准布朗运动 B 满足 $\langle B, B\rangle_t = t$，因此这样的过程存在。

唯一性 任何满足上述条件的连续局部鞅 M，其特征函数与布朗运动相同，即对任意 $0 \leq s < t$，

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)},$$

从而 M 的有限维分布与布朗运动一致。结合连续性，M 在分布意义上就是布朗运动。

因此，在连续局部鞅类中，二次变差过程为 $\langle M, M\rangle_t = t$ 这一条件刻画了布朗运动。 $\square$

1.5 随机微分方程

定义 1.5.1. 我们称

$$dX_t = \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt, \quad X_0 = x. \tag{1.62}$$

为 $\{X_t\}$ 的随机微分方程。称 σ 为方程 (1.62) 的扩散（*diffusion*）系数，称 b 为方程 (1.62) 的漂移（*drift*）系数。

注. 一般情况下，随机微分方程未必有解，即使有解，也未必唯一。

1.5.1 常见的几类可表示解的 SDE

例 1.5.1. 求解

$$dX_t = X_t^3 dt - X_t^2 dB_t, \quad X_0 = 1.$$

解. 设 $X_t = f(t, B_t)$，则应用 Itô 公式得

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) dt.$$

将其与给定的方程 $dX_t = X_t^3 dt - X_t^2 dB_t$ 比较系数，可得：

$$-f(t, B_t)^2 = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t),$$

且

$$f(t, B_t)^3 = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t).$$

由第一个方程 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f^2$，视 t 为参数，解得

$$f(t, x) = \frac{1}{x + c(t)},$$

其中 $c(t)$ 为仅依赖于 t 的函数。

代入第二个方程：计算

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{c'(t)}{(x + c(t))^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(x + c(t))^3},$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{c'(t)}{(x + c(t))^2} + \frac{1}{(x + c(t))^3}.$$

但方程要求此式等于 $f^3 = \frac{1}{(x+c(t))^3}$，故有

$$-\frac{c'(t)}{(x + c(t))^2} + \frac{1}{(x + c(t))^3} = \frac{1}{(x + c(t))^3},$$

即 $-\frac{c'(t)}{(x+c(t))^2} = 0$。因此 $c'(t) = 0$，从而 $c(t)$ 为常数 c。

于是

$$f(t, x) = \frac{1}{x + c}.$$

由初始条件 $X_0 = f(0, B_0) = f(0,0) = 1$，得 $\frac{1}{0+c} = 1$，故 $c = 1$。因此

$$X_t = \frac{1}{B_t + 1}.$$

□

例 1.5.2 (几何布朗运动)**.** 设 $x \in \mathbb{R}$, B_t 是标准布朗运动, 考虑几何布朗运动

$$X_t = x \exp(\mu t + \sigma B_t).$$

由 Itô 公式,

$$X_t = x + \int_0^t \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_s \, ds + \int_0^t \sigma X_s \, dB_s, \tag{1.63}$$

即 X_t 是随机微分方程在

$$b(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) x, \quad \sigma(x) = \sigma x$$

情形下的解。

推导. 令 $f(t,x) = xe^{\mu t + \sigma x}$, 则 $X_t = f(t, B_t)$。应用 Itô 公式:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu x e^{\mu t + \sigma x} = \mu f,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma x e^{\mu t + \sigma x} = \sigma f,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 x e^{\mu t + \sigma x} = \sigma^2 f.$$

于是

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t dt.$$

合并 dt 项得

$$dX_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

写成积分形式即得 (1.63) 式。因此 X_t 满足随机微分方程

$$dX_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x,$$

其中漂移系数 $b(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) x$, 扩散系数 $\sigma(x) = \sigma x$。 □

例 1.5.3 (Bessel 过程)**.** 设 $d \geq 1$，$W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ 是 d 维标准布朗运动。$0 \neq x \in \mathbb{R}^d$，令

$$X_t = |x + W_t|,$$

由 Itô 公式可得

$$X_t = |x| + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{W_s^i}{|W_s|} dW_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d-1}{|W_s|} ds. \tag{1.64}$$

记

$$B_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{W_s^i}{|W_s|} dW_s^i,$$

由布朗运动的 Lévy 特征可知 B_t 是一维标准布朗运动。于是 X_t 是随机微分方程

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2X_t}\,dt, \quad X_0 = |x| \tag{1.65}$$

的解，称为指标为 d 的 Bessel 过程。

一般的，当 d 为 ≥ 2 的实数时，上面随机微分方程都有唯一解。而当 $d<2$ 时，情况就变得复杂，但方程 (1.65) 的解至少在 $T=\inf\{t>0 : X_t = 0\}$ 之前是存在的。

推导概要. 考虑函数 $f(y)=|y|=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_d^2}$，其中 $y=(y_1,\ldots,y_d)$。记 $Y_t = x + W_t$，则 $X_t = f(Y_t)$。计算偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{y_i}{|y|}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = \frac{1}{|y|} - \frac{y_i^2}{|y|^3},$$

且当 $i \neq j$ 时 $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} = -\frac{y_i y_j}{|y|^3}$。因此

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = \frac{d-1}{|y|}.$$

对 $X_t = f(Y_t)$ 应用多维 Itô 公式，并利用 $dY_t^i = dW_t^i$，得

$$dX_t = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial y_i}(Y_t)\,dW_t^i + \frac{1}{2}\Delta f(Y_t)\,dt = \sum_{i=1}^{d} \frac{W_t^i}{|W_t|}\,dW_t^i + \frac{d-1}{2|W_t|}\,dt.$$

积分即得 (1.64)。定义 B_t 如上，则 $\langle B,B\rangle_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\frac{W_s^i}{|W_s|}\right)^2 ds = t$，故由 Lévy 特征定理知 B_t 是标准布朗运动。于是 (1.65) 成立。 □

例 1.5.4 (Ornstein-Uhlenbeck 过程)**.** 设 B_t 是一维标准布朗运动，考虑 Langevin 方程

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \tag{1.66}$$

其中 $\alpha>0, \sigma>0$。类似于常数变易法，我们令 $X_t = e^{-\alpha t} Y_t$，则

$$dY_t = e^{\alpha t}\sigma dB_t.$$

从而

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dB_s\right).$$

若 $X_0 = x$，则 X_t 是期望为 $e^{-\alpha t}x$，协方差为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) \\
&= \sigma^2 \int_0^{t\wedge s} e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha(s-u)} du \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}\right)
\end{aligned} \tag{1.67}$$

的高斯过程。

对于 $d>1$ 维情形，即 B_t 为 d 维布朗运动，X_t 为 $d\times 1$ 向量，α, σ 为 $d\times d$ 维矩阵，此随机微分方程也可以用类似的方法求解。

推导. 令 $X_t = e^{-\alpha t}Y_t$，则 Itô 公式给出

$$dX_t = -\alpha e^{-\alpha t}Y_t dt + e^{-\alpha t}dY_t = -\alpha X_t dt + e^{-\alpha t}dY_t.$$

与方程 (1.66) 比较得 $e^{-\alpha t}dY_t = \sigma dB_t$，即

$$dY_t = e^{\alpha t}\sigma dB_t.$$

积分得

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dB_s,$$

代回得

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dB_s\right).$$

当 $X_0 = x$ 为常数时，X_t 是 Itô 积分的线性泛函，因而是高斯过程。期望为

$$E[X_t] = e^{-\alpha t}x.$$

协方差计算：对 $s \le t$，

$$\begin{aligned}
E[X_tX_s] &= E\left[e^{-\alpha t}\left(x + \int_0^t e^{\alpha u}\sigma dB_u\right)\cdot e^{-\alpha s}\left(x + \int_0^s e^{\alpha v}\sigma dB_v\right)\right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)}x^2 + \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)}E\left[\int_0^t e^{\alpha u}dB_u \int_0^s e^{\alpha v}dB_v\right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)}x^2 + \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)}\int_0^s e^{2\alpha u}du \\
&= e^{-\alpha(t+s)}x^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-\alpha(t+s)}(e^{2\alpha s} - 1).
\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = E[X_tX_s] - E[X_t]E[X_s] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}\right),$$

即 (1.67) 式。当 $t = s$ 时，方差为 $\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$，当 $t \to \infty$ 时趋于 $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$，表明过程趋于一个平稳分布 $N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$。 □

注 (作业). 从显式解

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dB_s\right) \tag{1.68}$$

出发，可直接验证它满足 $dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t$。

记 $Y_t = X_0 + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma dB_s$，则 $X_t = e^{-\alpha t}Y_t$，且 $dY_t = e^{\alpha t}\sigma dB_t$。对 $X_t = f(t, Y_t) = e^{-\alpha t}Y_t$ 应用 Itô 公式：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -\alpha e^{-\alpha t}Y_t = -\alpha X_t, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-\alpha t}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0.
\end{aligned}$$

于是

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d\langle Y, Y\rangle_t = -\alpha X_t dt + e^{-\alpha t}\cdot e^{\alpha t}\sigma dB_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t.$$

这正是原方程。同时，$X_0 = e^{-\alpha\cdot 0}Y_0 = X_0$，初始条件自然满足。因此 (1.68) 确实是方程 $dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t$ 的解。

例 1.5.5 (布朗桥)**.** 设 a, b 是实数，应用 Itô 公式，可以验证

$$X_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{bt}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}dB_s, \quad 0 \le t < T \tag{1.69}$$

是随机微分方程

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T-t}dt + dB_t, \quad 0 \le t < T, \quad X_0 = a \tag{1.70}$$

的解。

推导. 令 $Y_t = \int_0^t \frac{1}{T-s}dB_s$，则 $X_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{bt}{T} + (T-t)Y_t$。对 $X_t = f(t, Y_t)$ 应用 Itô 公式，其中 $f(t,y) = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{bt}{T} + (T-t)y$。计算偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{a}{T} + \frac{b}{T} - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = T - t, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
dX_t &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d\langle Y, Y\rangle_t \\
&= \left(-\frac{a}{T} + \frac{b}{T} - Y_t\right)dt + (T-t)\cdot\frac{1}{T-t}dB_t \\
&= \left(\frac{b-a}{T} - Y_t\right)dt + dB_t.
\end{aligned}$$

另一方面，由 X_t 的表达式可得

$$\frac{b - X_t}{T-t} = \frac{b - \left[a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{bt}{T} + (T-t)Y_t\right]}{T-t} = \frac{\frac{b-a}{T}(T-t) - (T-t)Y_t}{T-t} = \frac{b-a}{T} - Y_t.$$

因此

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T-t}dt + dB_t,$$

且 $X_0 = a$。故 (1.69) 确为 (1.70) 的解。 □

注 (端点行为). 由于

$$\int_{t-\varepsilon}^t \frac{dB_s}{T-s} = \frac{B_t - B_{t-\varepsilon}}{T-t} - \int_{t-\varepsilon}^t \frac{B_s - B_{t-\varepsilon}}{(T-s)^2}ds,$$

故

$$\left|(T-t)\int_0^t \frac{dB_s}{T-s}\right| \le (T-t)\left|\int_0^{t-\varepsilon} \frac{dB_s}{T-s}\right| + |B_t - B_{t-\varepsilon}| + \sup_{t-\varepsilon \le s \le t}|B_s - B_{t-\varepsilon}|,$$

令 $t \to T, \varepsilon \to 0$，有

$$\lim_{t \to T}(T-t)\int_0^t \frac{dB_s}{T-s} = 0.$$

这样，X_t 的轨道从 a 出发，在 T 时刻到达 b。因此，我们称 X_t 为布朗桥。它是期望为 $a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{bt}{T}$，协方差为 $s \wedge t - \frac{st}{T}$ 的高斯过程。

1.5.2 SDE 解的存在唯一性

考虑下面的 SDE

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x. \tag{1.71}$$

其中 σ 和 b 为 $\mathbf{R}$ 上的可测函数。

定义 1.5.2. 称适应的连续随机过程 X_t 为方程 (1.71) 的解，如果 $\forall t \in [0,\tau)$ 有

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds. \tag{1.72}$$

其中 $\tau := \inf\{t > 0 : |X_t| = \infty\} := \lim_{n\to\infty} \inf\{t > 0 : |X_t| \geq n\}$ 为生命时。

定理 1.5.1. 设 σ 和 b 是局部 *Lipschitz* 连续，则方程 (1.71) 的解存在唯一。

注. 方程 (1.71) 是一个标准的随机微分方程 *(SDE)*，其解 X_t 是一个伊藤积分方程的路径形式。这里的“局部 *Lipschitz* 连续”条件是保证局部唯一解的标准条件。

Bibliography

[1] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd ed., Wiley, 1995, § 34, Theorems 34.3 and 34.4.

[2] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed., Springer, 2002, Chapter 6, Proposition 6.5.

[3] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge University Press, 2019, Section 4.1.4.

To be continue...