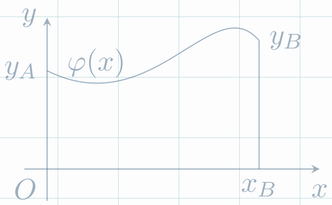


19/10/2024

Analysis

Complex Analysis

(First Edition)

Sherr1

$$i\hbar\partial_t\psi(\boldsymbol{r},t) = H\psi(\boldsymbol{r},t)$$
$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r},t)$$

Nankai University

(♠)nkuSherr1@gmail.com

1 First Class(24.10.19)

1.1 全纯函数列

逐点收敛、一致收敛、紧一致收敛

Definition 1.1 一致收敛

在 D 上**一致收敛**：$\forall \epsilon > 0$，$\exists N, \forall n > N$，$\forall z \in D$，$|f_n(z) - f(z)| < \delta$，记作 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.

Definition 1.2 紧一致收敛

在 D 上**紧一致收敛**：$\forall F \in D$，F' 紧集，都有 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 D 上一致收敛.

Example 1.1 紧一致收敛但非一致收敛

考虑：$f_n(z) = z^n$，$D = \{z \mid |z| < 1\}$ 为**开集**，$\{f_n(z)\}$ 在 D 上不一致收敛.
$\epsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，$\forall N \in \mathbb{Z}^+$，取一个 $|z| < 1$，$|z^n| \geq \epsilon_0$ 不一致收敛.
考虑任一紧集 $F \subseteq D$，$\exists r \in (0, 1)$ 使 $\overline{B(0, r)} \supseteq F$
事实上 $f_n(z)$ 在 F 上一致收敛，$|z| \leq r < 1$，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，使 $r^n < \epsilon$，$|f_n(z)| = |z|^n \leq r^n < \epsilon$
$\Rightarrow \{f_n(z)\}$ 在 F 上一致收敛 $\Rightarrow \{f_n(z)\}$ 在 D 上紧一致收敛.

Theorem 1.1

$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \in H(\Omega)$，$\{f_n(z)\}$ 紧一致收敛于 f，则 $f \in H(\Omega)$.

Proof 由 *Morera* 定理，我们只需证明对任意闭路径 $\Gamma \in \Omega^o$ 都有

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

而

$$\{f_n(z)\} \in H(\Omega) \Rightarrow \int_\Gamma f_k(z)dz = 0 \, (\forall k \in \mathbb{Z}^+)$$

又 $\{f_n(z)\}$ 在 Γ 上紧一致收敛于 f

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz \left(\int_\Gamma |f_n(z) - f(z)| \, dz \to 0 \right) \Rightarrow f(z) \in H(\Omega)$$

故：$f(z) \in H(\Omega)$. □

Theorem 1.2

在 *Theorem*1.1 条件下，$\left\{f_n^{(k)}(z)\right\}$ 也在 Ω 上紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. $(k \in \mathbb{N})$

Analysis $\left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| \leftrightarrow |f_n(z)-f(z)|$

$F(z)=f_n(z)-f(z)$，在紧集上估计 $F^{(k)}(z)$，建立 $\sup\limits_{z\in C}\left|f^{(k)}(z)\right|$ 与 $\sup\limits_{z\in C}|f(z)|$ 之间的关系.

取 $C:\{z_0||z_0-z|\le\delta\}$(C:Compact subset of Ω) C 紧集，每个元素都离 $\partial\Omega$ 有距离. □

Proof 令 $F(z)=f_n(z)-f(z)\in H(\Omega)$

$$\left|F^{(k)}(z)\right|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{F(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi\right|\le\frac{k!}{2\pi i}\frac{\sup\limits_{z\in C}|F(z)|}{\delta^{k+1}}\cdot 2\pi\delta=\frac{k!}{\delta^k}\sup_{z\in C}|F(z)|$$

由 $f_n(z)\rightrightarrows f(z)$ 知：$n\to\infty$ 时

$$\sup_{z\in C}|F(z)|\to 0$$

$\Rightarrow f_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. □

Theorem 1.3 (按照积分定义全纯函数)

$f(z)=\int_0^1 F(z,s)ds$ ①固定 s，$F(z,s)$ 关于 z 全纯 ②$F(z,s)\in C(\Omega\times[0,1])$ 则有 $f\in H(\Omega)$.

Proof *法 1*：由 *Morera* 定理，只需证明对 Ω 中的闭路径 Γ 有：$\int_\Gamma f(z)dz=0$

$$0=\int_\Gamma\int_0^1F(z,s)dsdz=\int_0^1\left(\int_\Gamma F(z,s)dz\right)ds\ \underset{\text{Cauchy 定理}}{\overset{\text{由①}}{=\!=\!=\!=}}\ 0$$

故由 *Morera* 定理，我们可知：$f\in H(\Omega)$. □

Proof *法 2*：令 $f_n(z)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n F(z,\frac{k}{n})\in H(\Omega)$(Riemann 逼近)

我们只需证明 $f_n(z)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f(z)$，进而由 *Theorem*1.1 可知 $f\in H(\Omega)$

对于 $\forall\Omega$ 上的紧集 C

$$\begin{aligned}|f_n(z)-f(z)|&=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F(z,\frac{k}{n})-\int_0^1F(z,s)ds\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(F(z,\frac{k}{n})-F(z,s))ds\right|\le\sum_{k=1}^n\int_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|F(z,\frac{k}{n})-F(z,s)\right|ds(\clubsuit)\end{aligned}$$

$F(z,s)$ 在紧集 C 上一致收敛，$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，$\forall n>N$ 都有

$$d((z_1,s_1),(z_2,s_2))<\frac{1}{n}\text{时}:|F(z_1,s_1)-F(z_2,s_2)|<\epsilon$$

代入 $(\clubsuit)$，则 $n>N$ 时

$$|f_n(z)-f(z)|\le\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\epsilon ds=\epsilon$$

$\Rightarrow f_n(z)$ 紧一致收敛于 $f(z)$，进而由 $Theorem1.1 \Rightarrow f \in H(\Omega)$. □

1.2 幂级数 (初初步)

Theorem 1.4

任意幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$，$\exists 0 < R < +\infty$ 使

$$(i)\,|z| < R\text{时} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\text{绝对收敛} \quad (ii)\,|z| > R\text{时} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\text{发散}$$

其中

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$$

Theorem 1.5

$f \in H(\Omega)$,$D : z_0$ 为中心的一个圆盘 $\bar{D} \in \Omega$,则 f 在 z_0 上展成幂级数 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n (z \in D)$ 对 $\forall n \geq 0$ 有

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (C = \partial D)$$

Proof 由柯西积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{\xi - z_0}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((\frac{1}{2\pi i}) \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

□

Theorem 1.6 零点孤立性

f 在连通开集 Ω 上全纯，$z_0 \in \Omega$ 为 f 的零点，f 在 Ω 上不恒为 0，$\exists z_0$ 邻域 $U \subset \Omega$、U 上非零函数 g 及唯一 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使对 $\forall z \in U$

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) (n : \text{零点的阶数})$$

Proof Ω 连通，$\forall z_0$，$\exists z_0$ 的某个邻域 U，f 在 z_0 的邻域 U 上恒不为 0;

对于 $z \in U$，我们有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \xlongequal{\text{最小使}a_n\neq 0\text{的}n} (z - z_0)^n (a_n + a_{n-1}(z - z_0) + ...) := (z - z_0)^n g(z)$$

其中，z 离 z_0 充分近时，$g(z) \neq 0$；换言之，z 在 z_0 的一个小邻域内有 $g(z) \neq 0$

若不唯一，则有

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

不妨设 $m > n$，则

$$g(z) = (z - z_0)^{m-n} h(z)$$

当 $z \to z_0$ 时

$$g(z) \to 0$$

矛盾！ □

Exercise 1.1

设 $f \in H(\mathbb{C})$，$\forall z_0 \in \mathbb{C}$，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$，系数 c_n 至少由一个为 0.

证明：f 为多项式.

Solution 若 $\exists n$，$f^{(n)}(z) \equiv 0$ 则 f 为多项式. $(c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!})$

对 $\forall n$，$f^{(n)}(z) = 0$ 的根至多可数 (否则与零点孤立性矛盾！)

$S = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ z \in C | f^{(k)}(z) = 0 \right\}$ 至多可数;

由题意知，$\forall z \in \mathbb{C}$，$\exists n$ 使 $f^{(n)}(z) = 0$

$$\Rightarrow C \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ z \in C | f^{(k)}(z) = 0 \right\}$$

这与 S 的至多可数性矛盾！

故 f 为多项式. □

1.3 奇点

Definition 1.3 奇点

$$\begin{cases} \textbf{可去奇点}：\text{可以全纯延拓} \\ \textbf{极点}：\text{如 } f(z)=\dfrac{1}{z} \text{ 在 } z=0 \text{ 处附近无界} \\ \textbf{本性奇点}：\text{有界，不能全纯延拓（振荡）} \end{cases}$$

1.3.1 可去奇点

Theorem 1.7 可去奇点的 Riemann 定理

f 在开集 Ω 上除 z_0 无定义以外都全纯，若 f 在 $\Omega\backslash\{z_0\}$ 有界，则 z_0 为 f 的**可去奇点**.

Proof 取 $D: z_0$ 为圆心的圆盘，$C: \partial D$ 取正方向

由 $Theorem1.3$ 只需证明

$$\forall z \neq z_0,\ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\xi}{\xi-z}dz(z\in D)(\clubsuit)$$

由多联通域上的柯西积分定理有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\int_{\gamma_\epsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\int_{\gamma_{\epsilon'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=0$$

由 Cauchy 积分公式

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\epsilon'}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi()$$

估计

$$\int_{\gamma_\epsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \le \frac{\sup\limits_{\xi\in\gamma_\epsilon}|f(\xi)|}{\inf\limits_{\xi\in\gamma_\epsilon}|\xi-z|}\cdot 2\pi\epsilon \to 0(\epsilon\to 0^+)$$

$\Rightarrow (\clubsuit)$ 成立，由 $Theorem1.3$ 知 z_0 为可去极点. □

Remark 其中 γ_ϵ 和 γ_ϵ' 分别表示以 z 和 z_0 为中心，ϵ 为半径的两个小圆周，方向取负方向. □

1.3.2 极点 (看成 $\frac{1}{f}$ 的零点)

Corollary 1.1

$$z_0\text{为}f\text{极点} \iff z\to z_0\text{时}: |f(z)|\to\infty$$

Proof "$\Rightarrow$": z_0 为 $\dfrac{1}{f}$ 的零点，$z\to z_0$ 时，$|f(z)|\to+\infty$

“$\Leftarrow$”：若 $z \to z_0$ 时 $|f(z)| \to +\infty$

$\frac{1}{f} \to 0(z \to z_0)$，$\frac{1}{f}$ 在 0 附近有界 $\xrightarrow{Theorem1.7}$ z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的可去奇点 $\Rightarrow$ z_0 为极点. □

Theorem 1.8

z_0 为 f 的极点，在 $Theorem1.6$ 条件下

$$\frac{1}{f} = (z - z_0)^n g(z) \Rightarrow f(z) = (z - z_0)^{-n} G(z)$$

其中 $G(z)$ 全纯

Theorem 1.9

$Theorem1.8$ 中

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-n}(b_0 + b_1(z - z_0) + ... + b_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + H(z)(z - z_0)^n) \\ &= \frac{b_0}{(z - z_0)^n} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{n-1}} + ... + \frac{b_n}{z - z_0} + H(z) \\ &:= \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + ... + \frac{a_1}{z - z_0} + H(z) \end{aligned}$$

Theorem 1.10

包含 z_0 的闭路径 Γ

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma \left(\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + ... + \frac{a_1}{z - z_0} + H(z) \right) dz \\ &= \int_\Gamma \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz = 2\pi i a_{-1} \end{aligned}$$

其中 a_{-1} 称为 f 在该极点的**留数**，记作 $Res(f, z_0)$.

Example 1.2 怎么求留数

$n = 1$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + H(z),\ a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

对于普遍的 n

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-(n-1)}(z - z_0) + ... + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^n H(z)$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z - z_0)^n f(z))$$

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} G(z) \Rightarrow (z - z_0)^n f(z) = \underbrace{g(z)}_{holomophic}$$

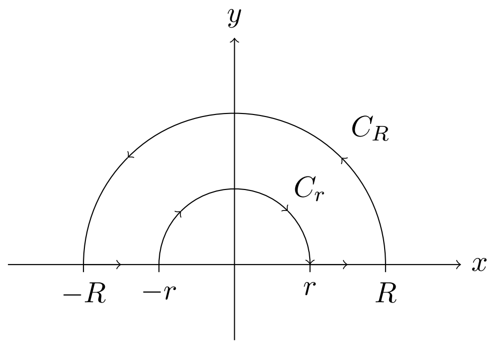
Exercise 1.2 利用留数算积分

证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Solution (围道积分法))

令 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$，考虑如下的围道：



由柯西积分定理

$$\int_{-R}^{-r} + \int_r^R + \int_{C_r} + \int_{C_R} = 0(\clubsuit)$$

$$\int_{C_r} = -\int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = -i\int_0^{\pi} e^{ir\theta} d\theta \xrightarrow{r\to 0^+} -\pi i$$

$$\left|\int_{C_R}\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta\right| = \left|i\int_0^{2\pi} e^{iR\theta} d\theta\right| = \left|i\int_0^{2\pi} e^{R(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} e^{-R\sin\theta} \left|e^{iR\cos\theta}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \to 0(R\to +\infty)$$

另一面

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos z + \sin z}{z} dz + \int_r^R \frac{\cos z + \sin z}{z} dz = 2i\int_r^R \frac{\sin z}{z} dz$$

令 $R\to +\infty$，$r\to 0+$，结合 ($\clubsuit$) 可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{-(-\pi i)}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

□

Remark 选择合适的周线 (圆 [挖孔]、矩形)！ □

($\spadesuit$)*nkuSherr1@gmail.com*

Exercise 1.3 利用留数算积分

证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi\xi}$$

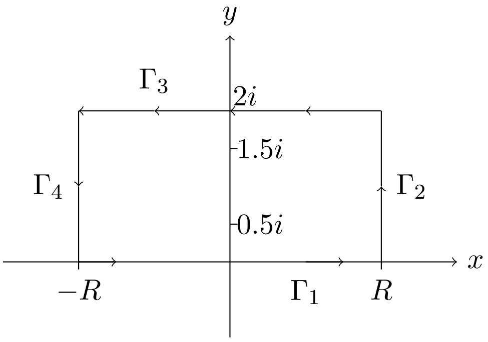
其中

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Solution 令 $f(z) = \dfrac{e^{-2\pi iz\xi}}{\cosh \pi z}$，$\cosh \pi x = 0$

$$\Rightarrow e^{\pi x} + e^{-\pi x} = 0 \Rightarrow x = \frac{i}{2} \; or \; \frac{3i}{2}$$

我们取分母周期为 $2i > \max\left\{\dfrac{i}{2}, \dfrac{3i}{2}\right\}$，考虑如下的围道：



$$\lim_{z\to\frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) f(z) = \lim_{z\to\frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{2e^{-2\pi iz\xi}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = e^{2\pi iz\xi} \frac{2(z - \frac{i}{2})}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}$$

同理

$$\lim_{z\to\frac{3i}{2}} (z - \frac{3i}{2}) f(z) = -\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}$$

由留数定理可知

$$\left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}\right) f(z)dz = 2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}) \quad (\clubsuit)$$

其中记我们想要的 $\displaystyle\int_{\Gamma_1} = I$

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh \pi x} dx \to I (R \to +\infty)$$

$$\int_{\Gamma_3} = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i(x+2i)\xi}}{\cosh \pi x} dx = e^{4\pi\xi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh \pi x} dx \to e^{4\pi\xi} I (R \to +\infty)$$

$$\left|\int_{\Gamma 2}\right| = \left|\int_0^2 i \frac{e^{-2\pi(ix+R)\xi}}{\cosh \pi(ix+R)} dx\right| \le \int_0^2 \left|\frac{2e^{-2\pi x\xi}}{e^{\pi ix} + e^{-\pi ix}}\right| dx$$

$$|cosh\pi x| = \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{2} \geq \frac{1}{2}\left|e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right| \geq \frac{1}{2}(e^{\pi R} - e^{-\pi R}) \to +\infty$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\Gamma 2}\right| \to 0(R \to= \infty)$$

同理

$$\left|\int_{\Gamma 4}\right| \to 0\,(R \to= \infty)$$

令 $R \to +\infty$ 并结合 (♣) 可得

$$(1 - e^{4\pi\xi})I = -2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}) \Rightarrow I = \frac{2(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi})}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}e^{\pi\xi} + e^{-\pi\xi}} = \frac{2}{e^{\pi\xi} + e^{-\pi\xi}} = \frac{1}{\cosh \pi\xi}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi\xi}$$

$\square$

2 Second Class(24.10.26)

2.1 本性奇点

Theorem 2.1 Casorati Weierstrass 定理

$f \in H(D_r(z_0) \backslash \{z_0\}$，$z_0$ 为**本性奇点**，则 f 在 $D_r(z_0) \backslash \{z_0\}$ 的像在复平面稠密.

Remark 在本性奇点附近震荡——*Picard* 定理. □

Proof 反证 若不稠密，则 $\exists \omega, \exists \delta > 0$ 使

$$\forall 0 < |z - z_0| < \delta, \ |f(z) - \omega| \geq \epsilon_0$$

令

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \omega}, |g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon_0} (\forall z \in D_\delta(z_0) \backslash \{z_0\}$$

下面我们来讨论 $f(z) - \omega$ 在 z_0 的极点情况：

①$f(z) - \omega$ 在 z_0 全纯 $\Rightarrow z_0$ 为可去奇点，矛盾！

②否则必有 $f(z) - \omega \to +\infty (z \to z_0) z_0$ 为极点，矛盾！

故 f 在 $D_r(z_0) \backslash \{z_0\}$ 的像在复平面稠密. □

Example 2.1

任何单射整函数都为线性函数 (可表示为 $f(z) = az + b \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$)

Proof 考虑 $f(\frac{1}{z})$ 的奇点 ($\frac{1}{\infty} = 0$)，假设 $f(\frac{1}{z})$ 在 0 处为极点

令

$$G(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{a_{-k}}{z^k} + ... + \frac{a_{-1}}{z} + G_0(z)$$

其中 $G_0(z)$ 全纯，

$$f(z) = a_k z^k + ... + a_1 z + C \xrightarrow{\text{单射}} \text{多项式}$$

故只需考虑是可去奇点还是本性奇点的情形：

①$f(\frac{1}{z})$ 在 0 处为可去奇点：

f 在 ∞ 处补充定义为 c，f 在有界区域有界 M，此时

$$f \leq \max \{c, M \to\}$$

故 f 有界 $\xrightarrow{Liouville}$ f 恒为常数，与 f 单射矛盾！

②$f(\frac{1}{z})$ 在 0 处为本性奇点：

取一个圆盘 $D_\delta(0)$，取圆盘外点 z_0

由开映射定理可知

$$\exists \delta_0 > 0\, s.t.\, B_{\delta_0}\left(f(\frac{1}{z_0})\right) \in f(\mathbb{C})$$

令 $B_{\delta_1}(z_0) \cap D_\delta(0) = \phi$ 根据 $Casorati-Weierstrass$ 定理，我们可知 f 在 $D_\delta(z_0)\backslash\{z_0\}$ 也能取到 $B_{\delta_1}\left(f(\frac{1}{z_0})\right)$ 中的点与 f 单射矛盾！ □

Definition 2.1 亚纯函数

f 在 Ω 上亚纯 $\iff \exists\{z_0, z_1...\}$ 在 Ω 上没有极限点使得

$$(i) f \in H\left(\Omega\backslash\{z_0, z_1...\}\right) \quad (ii)\{z_0, z_1...\}\text{为}f\text{的极点}.$$

延拓的复平面上讨论亚纯函数

Definition 2.2 延拓复平面上的全纯函数

定义在复平面上的亚纯函数 $f, F(z) = f(\frac{1}{z})$，F 在 0 处有可去奇点/极点，称 f 是延拓复平面上的**全纯函数**.

Theorem 2.2

延拓复平面上的全纯函数是有理函数.

Proof $\begin{cases} \text{复平面上的极点} z_1, z_2, ..., z_n \\ f\text{在}0\text{处} \to (\text{极点/可去奇点}) z_\infty \end{cases}$

Claim f 有限部分极点至多有限个，若不然由 $Casorati-Weierstrass$ 定理可知存在极点列的收敛子列，且极限点 $\in \mathbb{C}$，与零点的孤立性矛盾！ □

z_k 附近

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_k)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_k} + G_k(z) = f_k(z) + G_k(z)$$

其中 $f_k(z)$ 为有理函数 (主部)，$G_k(z)$ 为全纯函数，$f - \sum_{k=1}^{n} f_k$ 在每个 z_k 附近有界 $\to$ 整函数

①考虑 $1 \le k \le n$，$f(z) = f_k(z) + g_k(z) \to z_k$ 附近全纯 ($f_k(z)$ 主部，有理函数)

②

$$G(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{a_l}{z_l} + ... + \frac{a_{-1}}{z} + G_\infty(z) = \widetilde{f_\infty}(z) + \widetilde{g_\infty}(z)$$

$$f(z) = a_l z^l + ... + a_{-1} z + G_\infty(\frac{1}{z}),\ f_\infty(z) = \widetilde{f_\infty}(\frac{1}{z})$$

$h = f - \sum_{k=1}^{n} f_k - f_\infty \to$ 整函数 $\xrightarrow{Liouville} h$ 为常数 $\Rightarrow f = c + \sum_{k=1}^{n} f_k + f_\infty$ 为有理函数. □

Remark (★) 重要思想：把无穷远看成一个点去考虑证明. □

Exercise 2.1 留数计算级数求和

假设 u 不为整数，证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u+n)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}\quad (u\in\mathbb{C})$$

Solution 考虑构造 $f(z)=\dfrac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}$(这样构造能使 $f(z)$ 的所有极点为所有整数和 u)

$$res_n f=\pi\lim_{z\to n}(z-n)\frac{\cot\pi z}{(u+n)^2}=\frac{\pi}{(u+n)^2}\cdot\lim_{z\to n}(z-n)\cot\pi z=\frac{1}{(u+n)^2}$$

$$res_{-u}f=\lim_{z\to n}\frac{d}{dz}(\pi\cot\pi z)=-\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}$$

取一个圆心为原点的圆

$$|z|=N+\frac{1}{2},N>|u|$$

其中 $[-N,N]\in\left\{z||z|\leq N+\dfrac{1}{2}\right\}$，所有极点 $\{-N,...,N,-u\}$，故有

$$2\pi i\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(u+n)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}\right)=\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}$$

只需

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz=0$$

而

$$\begin{aligned}\left|\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz\right|&=\left|\int_0^{2\pi}\frac{\pi\cot\pi(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}}{\left(u+(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}\right)^2}(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}id\theta\right|\\&\leq\int_0^{2\pi}\frac{N+\frac{1}{2}}{(N+\frac{1}{2}-u)^2}\pi\cot\pi(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}d\theta\to 0\,(N\to+\infty)\end{aligned}$$

故

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz=0$$

进而有原命题成立，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u+n)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}\quad (u\in\mathbb{C})$$

□

2.2 辐角原理

Theorem 2.3 辐角原理

f 在包含圆周 C 及内部的开机上亚纯，f 在圆周 C 上没有极点/零点，那么：

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \cdot \left[f\text{在}C\text{内部零点个数 (含重数)} - f\text{在}C\text{内部极点个数}\right]$$

Proof 由辐角函数的定义，我们有：

$$\log f(z) = |\log f(z)| + i \arg f(z)$$

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z), \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-z_0)^{n-1}g(z) + (z-z_0)^n g'(z)}{(z-z_0)^n g(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{g(z)}{g'(z)}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \cdot n$$

n 阶极点在曲线内部：

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-z_0} + H(z) \quad \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = -2\pi i \cdot n$$

$$f(z) = (z-z_1)^{m_1}...(z-z_k)^{m_k} \cdot (z-\omega_1)^{-n_1}...(z-\omega_s)^{-n_s} g(z) \quad (m_1, ..., m_k, n_1, ...n_s \in \mathbb{N}^+)$$

其中 $(z-\omega_1)^{-n_1}...(z-\omega_s)^{-n_s}$ 全纯，$g(z)$ 全纯且局部非 0

下面我们考虑：$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z}dz$

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

由归纳法我们有：

$$\frac{(f_1...f_n)'}{f_1...f_n} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k'}{f_k}$$

故

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^k \frac{[(z-z_i)^{m_i}]'}{(z-z_i)^{m_i}}dz + \sum_{j=1}^s \frac{[(z-z_j)^{n_j}]'}{(z-z_j)^{n_j}}dz$$

$$\Rightarrow 2\pi i \left[\text{零点个数(含重数)} - \text{极点个数}\right] = 2\pi i \sum_{i=1}^k m_i - 2\pi i \sum_{j=1}^s n_j = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

□

2.3 Rouche 定理

Theorem 2.4 Rouche 定理

f,g 定义在包含圆周 C 及其内部开集上的全纯函数，$\forall z\in C$ 有 $|f(z)|>|g(z)|$

则 f 和 $f+g$ 在圆周内部有相同的零点数.

Proof 对于 $t\in(0,1)$，我们定义：

$$f_t(z)=f(z)+tg(z)\Rightarrow f_t(z)\neq 0(\forall z\in\mathbb{C})\quad \text{s.t.} f_0=f,f_1=f+g$$

记 n_t 为 f_t 在 C 内部的零点个数，而由 $f_t(z)\neq 0(\forall z\in\mathbb{C})$ 可知 $f(z)$ 在 C 上无零点，故由辐角原理我们可知：

$$n_t=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz(\text{只取自然数})$$

故 n_t 关于 t 连续，但只取自然数，故 n_t 恒为常数，故 $n_0=n_1$，即：f 和 $f+g$ 在 C 内部有相同的零点数. □

Exercise 2.2

$f:u\to v$ 全纯单射，证

$$\forall z\in u,\ f'(z)\neq 0$$

Solution 假设 $f'(z_0)=0$，z_0 附近点 z：

$$f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)^k+G(z)\quad (k\geq 2)$$

其中 $G(z)$ 为高阶无穷小

$$\underbrace{f(z)-f(z_0)-\omega}_{\text{至多一个零点}}=F(z)+G(z)$$

其中

$$F(z)=\underbrace{c(z-z_0)^k-\omega}_{\text{至少}k\text{个}>1\text{个}}$$

取 z_0 的小邻域 D 使得

$$|F(z)|>|G(z)|$$

进而由 *Rouche* 定理，可知 F 与 $F+G$ 在这个小邻域 D 内的零点个数相同

由于 f 单射，故 D 上 $F+G=f(z)-f(z_0)-\omega$ 的零点至多一个

而 $F=c(z-z_0)^k-\omega$ 的零点至少有 k 个且 $k\geq 2$ 矛盾！

综上：$f'(z)\neq 0$.

□

Exercise 2.3 代数基本定理

n 次多项式一定有 n 个复数根.

Solution 最大模原理/*Liouville* 定理 $\Rightarrow$ 至少有一个根.

令 $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$，将圆盘取足够大时 (即 $|z|$ 足够大时)，有：

$$|a_n z^n| > \left|a_{n-1} z^{n-1+...+a_1 z + a_0}\right|$$

故由 *Rouche* 定理我们可知：对于足够大的圆盘 C，f 在 C 内部的零点个数 $= a_n z^n$ 在 C 内部的零点个数即为 n □

2.4 开映射定理

Theorem 2.5 开映射定理

f 是 Ω 上的全纯函数，且它不是常数，那么它是一个开映射.

Proof 记 $f(z_0) = \omega_0$

$\exists \omega_0$ 的一个邻域 $B_\delta(\omega_0)$ 使 $\forall \omega \in B_\delta(\omega_0)$，$\exists \delta_1$ 使在 $B_{\delta_1}(z_0)$ 上 $f(z) - \omega$ 有零点.

考虑

$$f(z) - \omega = \underbrace{f(z) - \omega}_{F(z)} + \underbrace{\omega - \omega_0}_{G(z)}$$

选取 $\delta > 0, \{z | |z - z_0| \leq \delta\} \subseteq \Omega$，并且在 $|z - z_0| = \delta, f(z) \neq \omega_0$

然后选取 $\epsilon > 0$ 使得在圆周 $|z - z_0| = \delta$ 上，$|f(z) - \omega_0| \geq \epsilon$

现在如果 $|\omega - \omega_0| < \epsilon$，在圆周 $|z - z_0| = \delta$ 上 $|F(z)| > |G(z)|$，由 *Rouche* 定理可知 F 和 $F + G$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上有相同的零点数，而 F 在 $|z - z_0| < \delta$ 有且仅有一零点 z_0，故 $F + G$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 也只有一个零点，这说明 f 是开的. □

3 Third Class(24.11.02)

3.1 对称原理和反射原理

Theorem 3.1 对称原理

$f^+ \in H(\Omega^+), f^- \in H(\Omega^-), I$ 上有一个扩张函数使其连续，

$$\forall x \in I, f^+(x) = f^-(x), f = \begin{cases} f^+ & \Omega^+ \\ f^+ = f^- & I \\ f^- & \Omega^- \end{cases} \Rightarrow f \in H(\Omega)$$

Proof 由 *Morera* 定理，任意过 I 上一点的三角形周线 Γ，

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

①$\Gamma \subseteq \Omega^+ / \Gamma \subseteq \Omega^-$，由 *Cauchy* 定理可知

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

②有一条边与 I 重合，把底面换高得到一族三角形周线 $\Gamma_\epsilon \subseteq \Omega^+$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} f(z)dz = 0 \quad \int_\Gamma f(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} f(z)dz = 0$$

这是由连续性保证的 ③... □

Theorem 3.2 *Schwarz* 反射原理

$f \in H(\Omega^+)$，f 保证连续性扩张到 I 上，并且在 I 上是实值函数，则 $\exists F$，使得 F 在 Ω 上是全纯的，并且在 Ω^+ 上有 $F = f$.

Proof 定义 F 在 Ω^+ 上的表达式 $F(z) = f(\bar{z})$

Remark $F(z)$ 在 Ω^- 连续扩张到 I 上，由 f 在 I 上实值保证. □

故我们只需验证 $F \in H(\Omega^-)$，再由 *Theorem*3.1 可知

$$F \in H(\Omega) \quad and \quad F = f(z \in \Omega^+)$$

验证：F 在 Ω^- 上可展成幂级数

对于 $z, z_0 \in \Omega^-, \bar{z}, \bar{z_0} \in \Omega^+, f \in H(\Omega)$

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\bar{z} - \bar{z_0})^n \quad (z, z_0 \in \Omega^+)$$

$$F(z) = f(\bar{\bar{z}}) \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{a_n}(z - z_0)^n \quad (z, z_0 \in \Omega^+)$$

$$\Rightarrow f \in H(\Omega)$$

由 $Theorem 3.1$ 可知、

$$F \in H(\Omega)$$

□

Theorem 3.3 (

一般形式 1：调和延拓) 设 $v(x)$ 在 $\Omega^+ \cup I$ 上连续，在 Ω^+ 上调和，且在 I 上恒为 0，则 v 有一个扩张到 Ω 的调和延拓，满足对称关系：

$$v(\bar{z}) = -v(z)$$

相同条件下，若 v 为 Ω^+ 上解析函数 f 的虚部，则 f 有满足 $f(z) = f(\bar{\bar{z}})$ 的解析延拓.

Proof （简证）

$$v(z) = \begin{cases} v(z) & z \in \Omega^+ \\ 0 & z \in I \\ -v(\bar{z}) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

只需验证 v 在 I 上调和

$\forall x_b \in I$，取 x_0 为圆心的圆盘 D，上半圆盘 D_1，泊松积分 P_v，$v - P_v$ 在 D_1 上调和

$v - P_v$ 在 D_1 和 $D \cap I$ 上都为 0

$$v \to 0 \quad P_v = 0 \quad v - P_v \to 0$$

由对称性，

$$P_v = 0 (z \in \Omega \cap D)$$

再由调和函数最大值和最小值原理

$$v - P_v = 0$$

下半圆盘同理 $\Rightarrow v$ 在 D 上调和 $\Rightarrow v$ 调和

Remark 细节证明参考 $Anlfors : Page134, 135.$ □

□

Theorem 3.4 一般形式的 *Schwarz* 反射原理

D_1, D_2 具有 $Jordan$ 边界，它们边界上分别有一段圆弧或直线 γ_1, γ_2，设 D_1, D_2 关于 γ_1, γ_2 对称区域 D_1^*, D_2^*，$D_1 \cap D_1^* = D_2 \cap D_2^* = \emptyset$

Exercise 3.1

f 在 $\bar{D}$ 上非零连续，$f \in H(D)$，证：若 $|z| = 1, |f(z)| = 1$，则 f 为常数.

Proof （法一） 假设 f 非常数

$|f(z)|$ 的最大值在 $|z| = 1$ 上取

$$\Rightarrow \forall z \in D^\circ \quad |f(z)| < 1 \quad \frac{1}{f} \in H(D)$$

$|\frac{1}{f(z)}|$ 的最大值在 $|z| = 1$ 上取

$$\Rightarrow \forall z \in D^\circ \quad |\frac{1}{f(z)}| < 1 \Rightarrow |f(z)| > 1$$

矛盾！故 f 恒为常数. □

Proof （法二）做一个解析延拓 F...▲ □

Theorem 3.5 *Runge* 近似定理

①任何定义在紧集 K 的某个邻域内的全纯函数在 K 内都可以被有理函数一致近似，而且有理函数的奇点都在 K^c 内.

②如果 K^c 连通，则任何定义在紧集 K 的某个邻域内的全纯函数在 K 内都可以被多项式一致近似.

Lemma 3.1

假设 $f \in H(\Omega)$，$K \subset \Omega$ 为紧集，在 $\Omega \backslash K$ 存在有限多条线 $\gamma_1, \cdots \gamma_N$，对 $\forall z \in K$，有

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Proof (proof of $Lemma3.1$)

把 K 划分为有限个方格，$\gamma_1,\cdots,\gamma_N$ 为不属于两个相邻公共边的方格边

$Q=Q_1,\cdots,Q_m$ 覆盖紧集 K 的有限个方格，其中 $O_i\cap O_j=\emptyset$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial Q_i}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{N}\int_{\gamma_i}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

取 $z_0\in K,\exists 1\leq i\leq n,z\in Q_i$，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \xlongequal{Cauchy\text{积分公式}} \begin{cases} 0 j\neq i\\ f(z) j=i\end{cases}$$

则

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{N}\int_{\partial\gamma_i}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial Q_i}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=f(z)$$

□

Lemma 3.2

对于 $\Omega\backslash K$ 上的线段 γ，γ 上存在一列奇点在 γ 上的有理函数在 K 上一致近似积分 $\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$

Proof (proof of *Lemma*3.2)

γ 参数化 $\gamma(t),[0,1]\to\mathbb{C}$

$$\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int_0^1\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma_t'dt$$

其中我们要要求 $\gamma'(t)$ 为常数，这样能方便我们的近似 (积分定义全纯函数)

记 $\dfrac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}:=F(z,t)$ 在 $\Omega\times[0,1]$ 上连续，则

$$f_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(z,\frac{k}{n})$$

$$\left|f_n(z)-\int_0^1F(z,t)dt\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}F(z,\frac{i}{n})-F(z,t)dt\right|$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left|F(z,\frac{1}{n})-F(z,t)\right|dt<\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\epsilon dt<\epsilon$$

$\Rightarrow\{f_n(z)\}$ 在 K 上一致收敛于 $F(z)$

...▲

□

Lemma 3.3

K^c 连通，$z_0\notin K$，则 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 在 K 上可被多项式一致近似.

Proof (proof of *Lemma*3.3)

首先，在 K 一个原点为中心的打的开圆盘 D 外选择一点 z_1

$$\frac{1}{z-z_0}=-\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

其中级数对于 $z\in K$ 一致收敛

$\exists\gamma(t),[0,1]\to\mathbb{C},\gamma(0)=\underbrace{z_0\gamma(1)}_{\omega_1}=\underbrace{z_1}_{\omega_l}$

其中 $\{\omega_1,\cdots,\omega_l\}\in\gamma,|\omega_j-\omega_{j+1}|<\rho\quad(\rho=\frac{1}{2}d(\gamma,K))$

$\omega\in\gamma,\omega',|\omega-\omega'|<\rho$，证 $\frac{1}{z-\omega}$ 可被 $\frac{1}{z-\omega'}$ 的多项式一致近似.

$$\frac{1}{z-\omega}=\frac{1}{z-\omega'}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega-\omega'}{z-\omega'}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\omega-\omega')^n}{(z-\omega')^{n+1}}$$

对 $z\in K$ 一致收敛

▲ □

Theorem 3.6 *Koboe − Bieberbach* **定理**

$f:D\to\mathbb{C}$ 全纯映射，其中 D 为单位圆盘，$f(0)=0,f'(0)=1$，f 单射

证明：

$$\exists r>0,\forall f(\text{满足上述条件})\text{ 都有}D_r(0)\subseteq f(D),r_{max}=\frac{1}{4}$$

Proof

Analysis

Step1 $H(z)=\frac{1}{z}+c_0+c_1z+\cdots$ 全纯单射，则

$$\sum_{i=1}^{+\infty}n\left|c_n\right|^2\leq 1$$

Step2 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 符合条件，则 $\exists g,g^2(z)=f(z^2)$ 也符合条件

Step3 (结合 **Step1**、**Step2**)$\Rightarrow|a_2|\leq 2$

Step4 $h(z)=\frac{1}{z}+c_0+c_1z+\cdots$ 在 D 上单射，z_1,z_2 不在 h 的值域内，则 $|z_1-z_2|\leq 4$

Step5 完成证明. □

□

4 Appendix

Theorem .1
Theorem.

Definition .1
Definition.

Example .1
Example.

Lemma .1
Lemma

Proposition .1
Proposition

Corollary .1
Corollary.

Exercise .1
Exercise.

Proof Proof. □

Solution Solution. □

Remark Remark. □

Analysis Analysis. □

Claim Claim. □