



24/11/2024

Review

Complex Function I

(First Edition)

Sherr1



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

Nankai University

(♠)nkuSherr1@gmail.com

Contents

1	复数	3
1.1	推广复平面及球面表示	3
1.2	复平面中的一些拓扑概念	3
2	解析函数	4
2.1	极限与连续	4
2.2	Cauchy-Riemann 方程	4
2.3	解析函数 (全纯函数) <i>Holomorphic</i>	5
2.4	初等解析函数	7
3	复积分、Cauchy 定理	8
3.1	路径	8
3.2	复积分	8
3.3	Cauchy 定理	10
3.4	原函数、积分与路径无关	12
3.5	Cauchy 型积分、Cauchy 积分公式、导数公式	13
3.6	最大模原理	15
3.7	Schwarz 定理、Liouville 定理、代数学基本定理	17
3.8	调和函数	19
4	级数	21
4.1	基本概念和结论	21
4.2	幂级数	23
4.3	Taylor 展开、解析函数的零点、唯一性定理	24
4.4	Laurent 级数	27
4.5	孤立奇点及其分类	29
5	Appendix	31

1 复数

1.1 推广复平面及球面表示

Definition 1.1 无穷远点

在 \mathbb{C} 中引入一个新的数, 称为无穷远点, 记为 ∞ .

\mathbb{C} 加上 ∞ 被称为扩充复平面, 记为 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty$.

1.2 复平面中的一些拓扑概念

类似数分知识, 复平面中的常见拓扑概念有: 邻域, 去心邻域, 聚点, 外点, 孤立点, 内点, 边界点, 内核 (内部), 开集, 闭集, 导集, 边界, 闭包, 连通.

值得注意的是关于无穷远点的邻域定义:

Definition 1.2 无穷远点邻域的定义

∞ 的 ϵ -邻域是 $V(a, \epsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\epsilon} \right\}$

∞ 的去心 ϵ -邻域是 $\dot{V}(a, \epsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{\epsilon} < |z| < +\infty \right\}$

Theorem 1.1

\mathbb{C} 中的任何连通开集不可能表示为两个不相交的非空开集的并.

Proof 我们可以考虑通过反证法 + 区间套定理来证明我们这个定理.

若 $\mathbb{C} = A \cup B, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset$, A 和 B 均为开集, 任取 $a \in A, b \in B$

则 $\exists \mathbb{C}$ 中的折线连接 a 与 b , 不失一般性, 可设 a 和 b 在实轴上

折线是连接 a 和 b 的线 $[a, b]$ 中的点要么属于 A , 要么属于 B

① $\frac{a+b}{2} \in A$, 记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ 且 $a_1 \in A, b_1 \in B$.

② $\frac{a+b}{2} \in B$, 记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ 且 $a_1 \in A, b_1 \in B$.

如此重复下去, 我们可以得到 $\{[a_n, b_n]\}, a_n \in A, b_n \in B, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, 由区间套定理:

$\exists z_0 \in \cap [a_n, b_n]$ 且 $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

这说明, $\exists z_0 \notin A, z_0 \notin B$, 矛盾!

假设 $z_0 \in A$, 由于 A 是开集, 则 $\exists \epsilon > 0$ s.t. $V(z_0, \epsilon) \subseteq A$, 则 $V(z_0, \epsilon) \cap B = \emptyset$

同时, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = z_0, b_n \in B$, 故对上述 ϵ , 存在充分大的 n s.t. $b_n \in V(z_0, \epsilon) \cap B = \emptyset$ 矛盾! \square

2 解析函数

2.1 极限与连续

Theorem 2.1 有界闭集上的函数取值

设 D 是一个有界开域, f 在 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上连续, 即对任何 $z_0 \in \bar{D}$,

$$\lim_{z \in \bar{D}, z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

则 f 在 \bar{D} 上有界, 即有 $M > 0$, 使对任何 $z \in \bar{D}$ 有 $|f(z)| \leq M$, 并且 $|f(z)|$ 在 \bar{D} 上能取到最大值和最小值.

此外, f 在 \bar{D} 上一致连续.

2.2 Cauchy-Riemann 方程

Theorem 2.2 Cauchy-Riemann 方程

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在开域 D 上, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, 若 f 在 z_0 可导, 则 u 和 v 在 (x_0, y_0) 的一阶偏导数存在, 并且在该点处有下面的 **Cauchy-Riemann 方程**:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

此外, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$.

Proof 对 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 中的 z 取两种方式趋向 z_0 :

$$(i) z = x + iy_0, x \rightarrow x_0 \quad (ii) z = x_0 + iy, y \rightarrow y_0$$

□

Theorem 2.3 导数存在的充要条件

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在开域 D 上, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, 则 $w = f(z)$ 在 z_0 的导数 $f'(z_0)$ 存在的充要条件是: u 和 v 在 (x_0, y_0) 可微且在该点满足 **Cauchy-Riemann 方程**.

2.3 解析函数 (全纯函数) *Holomorphic***Definition 2.1** 关于解析函数的一些定义

若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导 (即为可导点所构成的邻域), 则称 f 在 z_0 是**解析的**, 称 z_0 为**解析点**.

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 处解析, 此时记 $f(z) \in H(D)$.

若函数 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上解析, 则称 $f(z)$ 是**整函数**. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 但在 z_0 的任一个邻域内有 $f(z)$ 的解析点, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的**奇点**.

Remark 不解析不一定不可导! 反例: $f(z) = |z|^2$, 在 $z = 0$ 处不解析但可导.

$f(z)$ 在闭区域 $V(\bar{z}_0, \epsilon)$ 内解析 $\iff \exists \epsilon_1 > 0$ s.t. $f(z)$ 在 $V(z_0, \epsilon_1 + \epsilon)$ 内解析.

$f(z)$ 在闭集 D 内解析 $\iff \exists$ 开集 V_1 s.t. $D \subset V_1$ 且 $f(z)$ 在 V_1 内解析. □

Theorem 2.4 解析函数的四则运算

若 $f, g \in H(D)$, 则

$$f \pm g, fg, \frac{f}{g} (g \neq 0) \in H(D)$$

Theorem 2.5 解析函数的复合运算

若 $f \in H(D)$, 开域 E 包含 $f(D)$, $h \in H(E)$, 则

$$h \circ f \in H(D)$$

Theorem 2.6

若 D 为开域, $f \in H(D)$ 并且 $f'(z) = 0$, 则 f 在 D 内为常数.

Proof 由于 $f'(z) = 0$, 我们可知 u_x, u_y, v_x, v_y 在 D 内也恒为 0, 故 u 和 v 在 D 内恒为常数, 即有 f 在 D 内恒为常数. □

下面我们引入**复微商**来讨论复坐标下的函数微分问题.

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases} \quad \begin{cases} dz = dx + idy \\ d\bar{z} = dx - idy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$f(z) = f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

$$\begin{aligned} df &= du + idv = (u_x dx + u_y dy) + i(v_x dx + v_y dy) = (u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy \\ &= f_x dx + f_y dy = f_x \frac{dz + d\bar{z}}{2} + f_y \frac{dz - d\bar{z}}{2i} = \frac{f_x - if_y}{2} dz + \frac{f_x + if_y}{2} d\bar{z} \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

我们定义:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

则 (♣) 可表示成为

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

又有

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

故 **Cauchy-Riemann 方程** $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

即我们有如下定理:

Theorem 2.7 Cauchy-Riemann 方程的等价形式

若 u 和 v 在开区域 D 中可微, 则 $f = u + iv$ 在 D 中解析 $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

2.4 初等解析函数

Blaschke 因子: $f(z) = \frac{z-a}{1-a\bar{z}} \triangleq w.$

常见的初等解析函数有: 多项式 (单值), 有理函数 (单值), 指数函数, 三角函数...

Definition 2.2

若 $w = f(z)$ 是点集 $E \rightarrow F$ 满映射, 且对 $\forall w \in F$ 在 E 中有一个 (或至少两个点) 与 w 对应, 则在 F 上确定了一个单值 (多值) 函数, 记作 $z = f^{-1}(w)$ 称为函数 $w = f(z)$ 的反函数.

Definition 2.3 解析分支

若 $F(z)$ 是开区域 D 上的多值函数, 如果 $\exists D$ 上的一个单值解析函数 $f(z)$ s.t. $\forall z \in D f(z) \in F(D)$, 则称 $f(z)$ 是 $F(z)$ 在 D 上的单值解析分支.

特别地, 对于对数函数, $z = re^{i\theta}$, 我们定义:

$$\ln z(\log z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \ln |z| + i\text{Arg}z$$

称 $\ln z = \ln |z| + \arg z$ 为 z 的对数主值, 其中 $\arg z$ 为辐角主值, 一般取 $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

相应的, 我们有 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

3 复积分、Cauchy 定理

3.1 路径

通俗地说，路径指的是逐段光滑的正则曲线.

Definition 3.1 路径

设 $x(t), y(t)$ 是 $t \in [a, b]$ 上的实值连续函数，并且有 $[a, b]$ 上的一个网 $\{t_k\} 1 \leq k \leq n, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ 对 $\forall k, x(t), y(t)$ 在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上都有连续函数，且保持正则性： $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ 则称 $\Gamma := \{z(t) : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]\}$ 为一条路径.

特别地：

① $z(a) = z(b)$ ，则称 Γ 为一条闭路径.

② 若对 $\forall t_1 \neq t_2 \notin [a, b], z(a) \neq z(t_1) \neq z(t_2) \neq z(b)$ ，则称 Γ 为简单路径.

若一条路径同时满足①和②，则称为简单闭路径.

Theorem 3.1 Jordan 曲线定理

若 Γ 是一条简单闭路径，则 Γ 把整个平面分成两个不相交的开域.

一个是有界的，称为 Γ 的内部；一个是无界的，称为 Γ 的外部，且都以 Γ 为界.

对于曲线方向的判断：若 Γ 为简单闭路径，则参数 t 增加时， Γ 的内部在 Γ 的左边，方向为正方向，外部和负方向也同理.

3.2 复积分

区间上的复积分大抵和定积分相同，且基本满足定积分的相应性质，如线性性质和三角不等式. 事实上，复变函数的积分通常是沿一般路径的积分.

Theorem 3.2

若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 沿路径 Γ 连续，则称 $f(z)$ 沿 Γ 可积且 $\Gamma : A \rightarrow B$ ，有

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy$$

Proof 直接利用类似黎曼和的分割手法来讨论即可.

其中，积分形式如上是因为：

$$(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i(u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k)$$

□

Theorem 3.3

设 $\Gamma: z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b], z'(t) \neq 0, f(z)$ 在 Γ 上连续, 则

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

Theorem 3.4

$$(i) \forall c \in \mathbb{C} \quad \int_{\Gamma} cf(z) dz = c \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$(ii) \int_{\Gamma} (f(z) \pm g(z)) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz \pm \int_{\Gamma} g(z) dz$$

$$(ii) \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt = \int_{\Gamma} |f(z)| dz$$

Proposition 3.1 长大不等式

若 $|f(z)| \leq M, z \in \Gamma$, 则

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \int_{\Gamma} ds = M |\Gamma|$$

Exercise 3.1 重要积分

$a \in \mathbb{C}, r \geq 0$, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Solution 用参数换元代入秒了!

□

3.3 Cauchy 定理

Definition 3.2 单连通区域

设 D 是一个开区域 (非连通开集), 若 D 中任何闭路径的内部都包含在 D 的内部, 则称 D 是单连通区域.

设 D 是一个开区域, 但 D 不是单连通区域, 则称 D 是一个多连通区域.

Theorem 3.5 Cauchy 定理

设 Γ 是一条正向简单闭路径, 内部区域为 D , $f(z) \in H(D), f(z) \in H(\bar{D})$ (连续到边界), 则

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

进一步, 设 D 是单连通区域, $f \in H(D)$, 则对 D 区域中的任何闭路径 Γ , 都有:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Proof 关于 Cauchy 定理的证明有时间再重新证一下... □

Corollary 3.1

D 是单连通区域, $f \in H(D)$, 则对 D 中任意两点 $z_1, z_2 \in D$ 及任何连接 z_1, z_2 的路径 Γ_1, Γ_2 , 则

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

Definition 3.3 周线与复周线

周线: 逐段光滑简单闭曲线

复周线: 假设有 $n+1$ 条简单闭路径 $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, 其中:

① $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 在 Γ 内部;

② $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 每一条都在其余各条外部

则在 Γ 内部、同时在 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 外部的点集构成 $(n+1)$ -连通区域且有界的 G (G 的边界是 $n+1$ 个互不相交的连通点集), 以 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 为边界

此时称 G 的边界为一条复周线 $\tilde{\Gamma} = \Gamma^+ + \Gamma_1^- + \dots + \Gamma_n^-$, 即包含 Γ 正向和 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 负向.

记 Γ 的内部为 D , Γ_k 的内部为 D_k , 则

$$G = D - \bigcup_{k=1}^n \bar{D}_k \quad \bar{G} = \bar{D} - \bigcup_{k=1}^n D_k^\circ$$

Theorem 3.6 多连通区域的 Cauchy 积分定理

设 $\tilde{\Gamma} = \Gamma^+ + \Gamma_1^- + \cdots + \Gamma_n^-$ 是一条复周线, 若 $f \in H(\bar{G})$, 则

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z)dz$$

3.4 原函数、积分与路径无关

Definition 3.4 原函数

$F(z), f(z)$ 都是定义在区域 D 上的函数, 并且对 $\forall z \in D, F'(z) = f(z)$, 则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在区域 D 上的原函数.

Theorem 3.7 若

$f(z)$ 在区域 D 连续且有原函数 $F(z)$, 则对 D 内任意两点 z_1, z_2 及 D 内任意一条从 z_1 到 z_2 的路径 Γ 有

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Corollary 3.2

(i) $f(z) \in C(D)$ 有原函数 $F(z)$, 则 f 在 D 内沿任何闭路径的积分都为 0.

(ii) 若 $\int_{\Gamma} f(z)dz$ 只与路径始末有关, 称积分与路径无关.

(iii) $f \in C(D)$, 且 $F'(z) = f(z)$, 则 f 在 D 中积分与路径无关.

Theorem 3.8

若 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 则 $f(z)$ 在 D 内有原函数 $\Rightarrow f(z)$ 在 D 内的积分与路径无关.

Remark (i) 若 f 在单连通区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内的积分与路径无关.

(ii) 若 f 在非单连通区域 D 内解析, 则 f 在 D 内不一定有单值原函数, 例如:

$f(z) = \frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C} - 0$ 内解析但 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} - 0$ 上无原函数, $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, 从而积分与路径有关! \square

3.5 Cauchy 型积分、Cauchy 积分公式、导数公式

我们先回顾一个例子 (★):

Example 3.1 Ch3-Ex3

$f(z)$ 在 $z = a$ 的一个邻域内连续, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$$

Solution 对于上述例子的证明, 由于

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=1} \frac{1}{z-a} dz$$

则我们把 $f(a)$ 减过去再利用绝对值不等式和借助连续性即可完成证明. □

进一步, 我们有如下的强大定理!

Theorem 3.9 Cauchy 积分公式

设区域 D 的边界是周线 (复周线) Γ , $f(z) \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{z-w} dw = f(z)$$

Proof 对于该定理的证明, 我们只需通过多连通的 Cauchy 积分定理即可将原积分转化为 (★) 即可完成证明. □

Theorem 3.10 Cauchy 型积分

我们定义 Cauchy 型积分为如下形式:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

这里 Γ 是一条路径, f 在 Γ 上连续, 是 z 的函数, 则 $g(z)$ 在 $\mathbb{C} - \Gamma$ 上是解析的且是无穷多次可导的, 其中

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad z \in \mathbb{C} - \Gamma$$

Proof 这个证明有时间在写吧... □

Theorem 3.11 Cauchy 积分公式与导数公式

设区域 D 的边界是周线 (或复周线) Γ , $f(z)$ 在 D 的内部解析, 在 \bar{D} 上连续, 则对 $\forall z \in D$, 有:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{--- Cauchy 积分公式}$$

此外, f 在 D 上无穷多次可导, 并且 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Corollary 3.3 解析函数的平均值性质

设 $f(z) \in H(D)$, 则对 $\forall z \in D$ 及 $\epsilon > 0$ 只要 $\{w : |w-z| \leq \epsilon\} \subseteq D$, 就有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{it}) dt$$

Proof 取 Γ 为圆周 $|w-z| = \epsilon$, 应用 **Cauchy** 积分公式就有:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} \epsilon e^{it} i dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{it}) dt$$

□

Theorem 3.12 Morera 定理

若 $f(z)$ 在开域 D 中连续, 并且对 D 中任何闭路径 Γ 都有 $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, 则 $f \in H(D)$.

Remark **Morera** 定理可以看成是 **Cauchy** 定理的逆定理. □

Proof 由定理条件可知 $\exists F(z)$ s.t. $F'(z) = f(z), \forall z \in D$, 由 **Cauchy** 积分公式和导数公式可知 $F(z)$ 无穷多次可导, 从而 $F'(z) = f(z)$ 也无穷多次可导, 说明 $f \in H(D)$. □

3.6 最大模原理

我们先来看一个引理:

Lemma 3.1

设 D 是开域, $f \in H(D)$, 若 $|f(z)| \in \text{const}$, 则 f 是常数.

Proof 对 $|f(z)| = c$ 两端平方后展开可得

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv c^2 \neq 0$$

对上式左右两端求导并结合 $f \in H(D)$ 的条件有 **Cauchy-Riemann 方程**, 可得

$$u_x = u_y = v_x = v_y \equiv 0$$

故 f 为常数. □

Theorem 3.13 最大模原理

设 D 是开域, $f \in H(D)$, 若 $|f(z)|$ 在 D 中某点达到最大值, 则 f 是常数.

Proof 这个证明有时间在写吧... □

Corollary 3.4 最大模原理的推论

- (1) 设 D 是开区域, $f \in H(D)$, 当 f 不是常数时, $|f(z)|$ 不可能在 D 上达到最大值.
 (2) 设 D 是有界开域, ∂D 为 D 的边界, $f \in H(D)$, $f \in C(\bar{D})$ 非常数, 则 $|f(z)|$ 一定在 \bar{D} 上达到最大值当且仅当在 ∂D 上取到, 即

$$\max_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

$$\iff \exists M > 0 \text{ s.t. } \textcircled{1} f(z) < M, z \in D \quad \textcircled{2} f(z) \leq M, z \in \bar{D} \quad \textcircled{3} \exists z_0 \in \partial D, |f(z_0)| = M$$

Proposition 3.2 最小模原理

$f \in H(D)$, D 是开域, f 不是常数, $|f(z)|$ 在 D 中达到最小值 m , 则 $m = 0$.

Proof 若 $m \neq 0$, 令 $F(z) = \frac{1}{f(z)}$, 则 $|F(z)|$ 在 D 内达到最大值, 由**最大模原理**可知 $|F(z)|$ 恒为常数进而有 $f(z)$ 恒为常数, 矛盾! □

Exercise 3.2

设 $f = u + iv$ 在区域 D 上解析而不是常数, 则 u 在 D 中取不到最大值.

Solution 此时有 e^f 在 D 上解析且非常数, 由最大模原理的推论, $|e^f|$ 不能再 D 上达到最大, 而 $|e^f| = |e^{u+iv}| = |e^u| = e^u$, 即 e^u 不能再 D 中达到最大, 进而有 u 在 D 中取不到最大值. \square

下面这个命题被称为复变函数的 **Cauchy 不等式**:

Proposition 3.3 Cauchy 不等式-Ch3-Ex18

f 在 $|z - a| \leq R$ 内解析, $M_R = \max_{|z-a|=R} |f(z)|$, 则

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M_R}{R^n}$$

Proof

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(w-z)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \right| dz \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-a|=R} \frac{M_R}{R^{n+1}} dz = \frac{n!M_R}{R^n}$$

故

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M_R}{R^n}$$

\square

3.7 Schwarz 定理、Liouville 定理、代数学基本定理

Theorem 3.14 Liouville 定理

有界整函数必然是常数.

Proof f 是有界整函数, 故 $\exists 0 < M < +\infty$ s.t. $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$

由 **Cauchy 不等式**: $|f'(z)| \leq \frac{1!M}{R} = \frac{M}{R}$

令 $R \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{M}{R} \rightarrow 0 \Rightarrow |f'(z)| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \text{const}$ □

Remark 我们有 **Liouville 定理** 的逆否命题: 非常数整函数一定是无界的. □

Theorem 3.15 代数学基本定理

复系数一元 n 次多项式 ($n \geq 1$) 至少有 1 个零点.

Proof 我们可以考虑用反证法来证明这个定理.

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ($a_n \neq 0, n \geq 1$), 假设 $p(z)$ 在 \mathbb{C} 上无零点, $Q(z) \triangleq \frac{1}{p(z)}$ 是整函数.

$$|p(z)| = |a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = |z^n| \left(|a_n| - \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \right)$$

$$\exists R > 0 \text{ s.t. } |z| > R \text{ 时有 } \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \leq \frac{1}{2} |a_n| \text{ 此时 } |p(z)| \geq |z|^n \frac{1}{2} |a_n| (\geq R^n \frac{1}{2} |a_n|)$$

$$\exists R_1 > R \text{ s.t. } |z| > R_1 \text{ 时 s.t. } |p(z)| \geq |z|^n \frac{1}{2} |a_n| \geq R_1^n \frac{1}{2} |a_n| \geq 1 \text{ 此时 } |Q(z)| \leq 1$$

$$Q(z) \text{ 在 } |z| \leq R_1 \text{ 连续} \Rightarrow \exists M \text{ s.t. } |Q(z)| \leq M \forall |z| \leq R_1 \Rightarrow |Q(z)| \leq 1 + M$$

由 **Liouville 定理** 可知:

$$Q(z) = \text{const} \Rightarrow P(z) = \text{const}$$

这也就导出了矛盾! □

Exercise 3.3

设 $f(z)$ 是一个整函数, 且 $\exists 0 < M < +\infty$ s.t. $\operatorname{Re}(f(z)) < M, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ 为常数.

Solution 令 $F(z) = e^{f(z)}$, 则 $F(z)$ 是整函数 $\Rightarrow |F(z)| = |e^{f(z)}| \leq e^M$, 由 **Liouville 定理** 可知 $F(z) = \text{const} \Rightarrow f(z) = \text{const}$. □

Lemma 3.2 Schwarz 引理

Γ 为简单正向闭路径, D 是内部, $z_0 \in D$, $f \in H\{\bar{D} - \{z_0\}\}$, 若 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $f(z)$ 在 z_0 解析, 从而 $f \in H(D)$.

Proof $z_0 \in D$ 是内点, $\Rightarrow r > 0$, s.t. $V(\bar{z}_0, r) \subset D$, 记 $D_r = D - \overline{V(z_0, r)}$

则 $\partial D_r = \Gamma \cup \overbrace{(-\partial V(z, r))}^{\text{负方向}}$, 由 **Cauchy** 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$w \in |z-z_0|=r$ 时,

$$|w-z| \geq |z-z_0| - |w-z_0| \geq |z-z_0| - r \geq |z-z_0| - \frac{1}{2}|z-z_0| = \frac{1}{2}|z-z_0|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \frac{M}{\frac{1}{2}|z-z_0|} 2\pi i \rightarrow 0 (r \rightarrow 0)$$

这是由于 f 在 z_0 连续且在 z_0 附近有界 ($\Rightarrow f$ 在 D 有界)

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

定义

$$g(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z), z \neq z_0, z \in D$$

由连续性, 我们有:

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$$

而 $g(z)$ 是 **Cauchy** 型积分, 从而在 D 中解析故 $f(z) \in H(D)$. □

Theorem 3.16 Schwarz 定理

设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析且 $|f(z)| \leq 1, f(0) = 0$, 则

(i) $|f(z)| \leq |z|$, 而且 $|f'(0)| \leq 1$

(ii) 若有 $0 < |z| < 1$ s.t. $|f(z_0)| = |z_0|$ 或 $|f'(0)| = 1$ 则 $f(z) = e^{i\alpha} z$, 其中 α 为常数.

Proof 这个证明有时间在写吧... □

3.8 调和函数

Definition 3.5 调和函数的相关定义

设 D 是区域, u 在 D 上有二阶连续偏导, 定义:

(i) **Laplace 算子**: $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$, 则 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(ii) 若在 D 上, $\Delta u = 0$, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall z \in D$, 则称 u 在 D 上调和.

Theorem 3.17

若 u 是单连通区域 D 中的实调和函数, 则 \exists 开区域 D 中的实调和函数 v , 使 $f = u + iv \in H(D)$ (此时称 v 是 u 的共轭调和函数).

Proof 记 $P(x, y) = -u_y, Q(x, y) = u_x$ 则由 $u \in C(D^2)$ 可知 $P, Q \in C(D^2)$ 且 $\Delta u = 0$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow P_y = Q_x$$

$\Rightarrow w = Pdx + Qdy$ 在单连通区域 D 内存在原函数 v s.t. $w = dv$

即 $Pdx + Qdy = dv = v_x dx + v_y dy$, 进而由 **Cauchy-Riemann 方程** 可知

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0 \Rightarrow f = u + iv \in H(D)$$

□

Exercise 3.4

u 是 \mathbb{R}^2 上的调和函数, 则 u 是常数.

Proof u 是 \mathbb{R}^2 上的调和函数 $\Rightarrow \exists v$ 调和使 $f = u + iv$ 解析, 构造 $F = e^f$, 则 $|F| = e^u$ 有界, 而 $F \in H(\mathbb{C})$.

由 **Liouville 定理** $\Rightarrow F = \text{const} \Rightarrow f = \text{const} \Rightarrow u = \text{const}$.

□

Theorem 3.18 调和函数的平均值性质

$u(z)$ 是 $D = \{z : |z - a| < R\}$ 内的调和函数, 则对 $\forall 0 < r < R$ 有

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Proof 由 **Theorem 3.17** 可知, $\exists v$ s.t. $f = u + iv \in H(D)$

则由平均值原理

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

$$\Rightarrow u(a) = \operatorname{Re}f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

□

Theorem 3.19 调和函数的最大值和最小值原理

若 u 是开区域 D 中的“非常数”的实调和函数，则 u 在 D 的内部不能达到最大值或最小值.

Proof 借助解析函数的性质来证明:

由 **Theorem 3.17** 可知, $\exists v$ s.t. $f = u + iv \in H(D)$, u 非常数 $\Rightarrow f$ 非常数.

故 f 不能在 D 内达到最大模, 同理 e^f 不能在 D 内达到最大模, 故 u 不能在 D 内达到最大模.

同理就有 $-u$ 不能在 D 内达到最大模, 即 u 不能在 D 内达到最小模.

□

4 级数

4.1 基本概念和结论

Definition 4.1 几种不同的收敛

- (i) 若对 $z \in D$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z)$, 则称 $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上收敛于 $f(z)$, 记为 $f_n(z) \rightarrow f(z) (z \in D)$.
 $\iff \forall z \in D \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N(z, \epsilon) \text{ 时: } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$
 $\iff (\text{Cauchy 收敛准则}) \forall z \in D \forall \epsilon > 0 \exists N(z, \epsilon) \text{ s.t. } \forall n > N \forall p |f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon$
- (ii) 若对 $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N$ 及 $z \in D$ 有 $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, 则称 $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上一致收敛于 $f(z)$, 记为 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$
 $\iff (\text{Cauchy}) \forall z \in D \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N \forall p |f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon$
- (iii) 若 D 是开域, $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 在 D 的任一紧子集上一致收敛于 $f(z)$, 则称 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上紧一致收敛 (或内闭一致收敛) 于 $f(z)$, 记为 $f_n(z) \rightarrow f(z)$.

Theorem 4.1

D 是开域, $\{f_n(z)\}$ 紧一致收敛于 $f(z)$

- (i) 若 $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上连续, 则 $f(z) \in C(D)$.
(ii) 若 $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上解析, 则 $f(z) \in H(D)$, 且 $\forall k \geq 1 \{f_n^{(k)}(z)\}_{n \geq 1}$ 紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$.

Proof 连续: 通过定义利用 $\epsilon - \delta$ 语言来证明.

解析: 先证 $f(z) \in H(D)$.

只需证明 $\forall z \in D$ 是解析点, $\forall z \in D \rho > 0 \text{ s.t. } \overline{V(z, \rho)} \subset D$, 下面证 $f(z)$ 在 $V(z, \rho) \subset D$ 内解析.

设 Γ 是 $V(z, \rho)$ 内的任一闭路径, $f_n(z) \in H(D) \Rightarrow 0 = \int_{\Gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 (n \rightarrow \infty)$

进而由 Morera 定理可知 $f(z) \in H(D)$. □

Remark Γ 为紧集, 则

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz$$

k 阶导数也紧一致收敛:

Claim $\{f_n^{(k)}(z)\}_{n \geq 1}$ 在 $\overline{V(z_0, \frac{1}{2}\rho_0)}$, 有 $|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| < \epsilon$ □

若 Claim 成立, 设 K 是 D 的任意紧子集, 则 $K \subset \bigcup_{z \in K} V(z_0, \frac{1}{2}\rho_0)$ 由有限覆盖定理知,

$$\exists z_1, \dots, z_n \text{ s.t. } K \subset \bigcup_{k=1}^m V(z_k, \frac{1}{2}\rho_{z_k}) \quad f_n(z) \rightarrow f(z)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_{z_1} \forall z > N_{z_1} f_n(z) \rightarrow f(z)$$

这时由 **Cauchy** 积分公式即知成立, 其中 k 阶导数可有积分表示.

这时我们取 $\epsilon > 0$, 取 $N = N_{z_1} + N_{z_2} + \dots + N_{z_n}$ 即可.

下面我们来证明这个 **Claim**.

由高阶导数的积分公式可知:

$$\forall z \in \overline{V(z_0)}, \frac{1}{2}\rho_{z_0} \left| f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho_{z_0}} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|w-z_0|=\rho_{z_0}} \frac{|f_n(w) - f(w)|}{|w-z|^{n+1}} dw$$

而 $\{f_n(z)\}$ 在 $\partial V(z, \rho_{z_0})$ 上一致收敛

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon(z_0) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N \text{ 时: } |f_n(w) - f(w)| < \epsilon \forall |w-z| = \rho_{z_0}$$

$$\text{而当 } |w-z_0| = \rho_{z_0} \text{ 时, } |w-z| = |w-z_0 + z_0 - z| \geq |w-z_0| - |z_0 - z| \geq \rho_{z_0} - \frac{1}{2}\rho_{z_0} = \frac{1}{2}\rho_{z_0}$$

$\Rightarrow n > N$ 时,

$$\left| f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\epsilon}{\left(\frac{1}{2}\rho_{z_0}\right)^{k+1}} 2\pi\rho_{z_0} = \epsilon \frac{k!2^{k+1}}{(\rho_{z_0})^k} = c \cdot \epsilon = \text{const}$$

\Rightarrow **Claim** \checkmark .

□

Definition 4.2 收敛的相关概念

(i) 设 $\{a_k(z)\}_{k \geq 1}$ 是复数集 D 上的函数, $\forall n \geq 1$, 定义 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k(z)$ 的部分和.

(ii) $z \in D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$ 存在且有限, 称 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 的部分和.

(iii) 所有使 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 收敛的点的全体 E 称为 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 的收敛域, 此时有 E 的函数

$S(z)$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z) \quad z \in E$, $S(z)$ 称为 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 的和函数.

(iv) 若 $\{S_n(z)\}_{n \geq 1} \rightarrow S(z)$ 一致收敛于 E , 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 在 E 上一致收敛于 $S(z)$. (这里的数学语言描述同样也是用 **Cauchy** 收敛原理).

(v) $S_n(z) \rightarrow S(z)$ (紧一致收敛于 E) 称 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 在 E 上紧一致收敛于 $S(z)$.

Theorem 4.2 Weierstrass 判别法

Weierstrass 判别法也称为 **M-判别法**.

若 $\exists M > 0$ s.t. $\forall z \in D$ 都有 $|a_n(z)| \leq M_n$ s.t. $\forall n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛

则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$ 在 D 上绝对收敛且一致收敛.

4.2 幂级数

Definition 4.3 幂级数

形如 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$ 的无穷项级数称为**幂级数**，其中 $\{c_m\}_{m \geq 1}$ 是复数.

Definition 4.4 收敛半径

收敛半径记作 R ,

$$r = \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} |c_m|^{\frac{1}{m}}, \quad R = \begin{cases} \infty & r = 0 \\ \frac{1}{r} & 0 < r < +\infty \\ 0 & r = +\infty \end{cases}$$

$|z| < R$ 时, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m$ 绝对收敛; $|z| > R$ 时, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m$ 发散.

Theorem 4.3 幂级数的收敛性

设 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$ 是幂级数, r, R 如前, 则

(i) $\forall z \in V(a, R)$, 级数收敛且绝对收敛.

(ii) $|z-a| > R$ 时, 级数发散.

(iii) 在 $V(a, R)$ 中紧一致收敛但不一定一致收敛!!!

(iv) 和函数 $S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$ 在 $V(a, R)$ 内解析.

(v) $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$ 在 $V(a, R)$ 内可逐项求导, 即 $\forall z \in V(a, R)$,

$$S^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} [c_m(z-a)^m]^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m m(m-1)\cdots(m-n+1)(z-a)^{m-n}$$

4.3 Taylor 展开、解析函数的零点、唯一性定理

Theorem 4.4 Taylor 展开

设 $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq +\infty$, $f \in H(V(z_0, R))$. 则对 $\forall z \in V(z_0, R)$ 有

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

上式称为 $f(z)$ 在 z_0 点的 **Taylor 展开**或**幂级数展开**.

能够进行 **Taylor 展开**的条件: f 在点 z_0 解析, 则在 z_0 的任何邻域都能进行 **Taylor 展开**.

Proof 我们只需证明 $z_0 = 0$ 的情况即可 (其余情况构造新函数作平移即可).

固定 $z_0 = 0$, 取 r 使 $|z| < r < R$, 由 **Cauchy 积分公式**,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

由于 $|w| = r > z$, 故 $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, 故

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^{k+1}} z^k$$

上述级数处于收敛圆内, 故一致收敛, 故

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{k+1}} z^k \Rightarrow \frac{f(w)}{w - z} (|w| = r)$$

故由导数公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw \right] z^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

这样我们便完成了证明. □

Theorem 4.5 Taylor 展开的唯一性

若 $f(z)$ 在 z_0 附近可表示成幂级数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, 则 $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Proof 我们只需对展成的幂级数求 n 阶导数, 再令非常数项为 0, 即可得到 c_n 的系数, 便完成证明. □

Definition 4.5 零点

若 $f(z_0) = 0$ 则称 z_0 是 f 的零点.

若 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 且在 z_0 附近 $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, m \geq 1, c_m \neq 0$, 则此时称 z_0 是 f 的 m 阶零点

$$\iff f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Theorem 4.6 m 阶零点的刻画

f 在 z_0 解析, 则 z_0 是 f 的 m 阶零点 $\iff f$ 在 z_0 附近, $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

Proof 充分性和必要性都运用 Taylor 定理即可完成证明. □

Proposition 4.1 孤立零点

(i) 不恒为零的解析函数的零点一定是孤立的

(ii) 若 z_0 是 $f(z)$ 的零点的聚点则 f 在 z_0 的一个邻域内恒为 0 (z_0 不是 $f(z)$ 的孤立零点).

Theorem 4.7 唯一性定理

设 f 在开区域 D 内解析, 若 f 的零点集有一个属于 D 的聚点 (D 内部), 则 f 在 D 中恒为零.

Proof 设 $D_1 = \{z \in D : z \text{ 是 } f(z) \text{ 的零点的聚点}\}, D_1 \neq \emptyset, D_2 = D - D_1$, 则 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

Claim D_1 和 D_2 都是开集. □

如果 **Claim** 成立, 则由 **Theorem 1.6.1**: (连通开集不能表示成两个不交开集的并) 可知 $D_2 = \emptyset$ 则 $D = D_1$.

$\forall z \in D \exists \{z_n\}, f(z_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, 从而由连续性可知:

$$f(z_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(0) = 0$$

下面我们来证明 **Claim**

D_1 为开集:

若 $z_0 \in D$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的零点的聚点, 从而 f 在 z_0 使得一个邻域内恒为零, 则这个邻域 $V(z_0, r) \subset D_1$.

D_2 为开集:

若 $z_0 \in D_2$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的孤立零点, 或 z_0 不是 $f(z)$ 的零点 (从而 D_2 为开集)

(i) 若 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点, 则 $\exists r > 0$ s.t. $V(z_0, r) \subset D$ 内仅有 z_0 一个零点, 则 $V(z_0, r) \subset D_2$, 从而 z_0 是内点.

(ii) 若 z_0 不是 $f(z)$ 的零点, 则由连续性可知 $\exists r > 0$ s.t. $f(z)$ 在 $V(z_0, r) \subset D$ 内不为零, 从而 $V(z_0, r) \subset D_2$.

Remark 唯一性定理也可以利用“圆链法”来证明 (有空再完善)! □

□

Corollary 4.1

若 $f(z) \in H(D)$ 非常数, 则 $\forall a \in \mathbb{C}$, 集合 $E_a = \{z \in D : f(z) = a\}$ 中的点都是 E_a 的孤立点. 即非恒为 0 的解析函数的零点一定是孤立的.

Corollary 4.2

设 f 和 g 在 D 中解析, $E \subset D, E$ 在 D 中有聚点, 若 f 和 g 在 E 中相等, 则 f 和 g 在 D 中也相等.

Corollary 4.3

若 $f(z), g(z) \in H(D)$, $f(z) \equiv g(z)$ on \mathbb{R} , 则 $f(z) \equiv g(z)$ on \mathbb{C} .

Proof 由前一个 **Corollary** 可完成证明. □

4.4 Laurent 级数

Theorem 4.8 Laurent 定理

$A = \{z : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$ $f \in H(A)$

(i) $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 仅与 k 有关, 与 $\rho \in (r, R)$ 无关.

(ii) $\forall z \in A, f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$

Proof 这个证明有时间再写... □

Definition 4.6 Laurent 级数的相关概念

(i) 设 $\{a_k\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$ 是一列两矢无限的复数, 若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}$ 均收敛, 且 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S_1, \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} = S_2$, 记 $S = S_1 + S_2$, 则称 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ 收敛于 S , 记为 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = S$.

(ii) $\{a_k(z)\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$ 是一列两矢无限的复函数, 则 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z)$ 的收敛域是使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z)$ 收敛的 z 的全体, 记为 D , 则 $\exists S(z)$ s.t. $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z)$ on D .

(iii) 若 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z)$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z)$ 都在 D 上收敛 \ 一致收敛 \ 绝对收敛 \ 紧一致收敛

则称 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z)$ 的和函数在 D 上收敛 \ 一致收敛 \ 绝对收敛 \ 紧一致收敛

(iv) 形如 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ 的函数项级数称为 **Laurent 级数**.

Lemma 4.1

设 $0 \leq r < R, A = \{z : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$ 是圆环, 若 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ 在 A 上收敛, 则

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ 绝对收敛且紧一致收敛.

Proof 关键: 幂级数在收敛圆上绝对收敛且紧一致收敛.

由定义知:

(i) $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ 在 $\{z : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ 收敛半径 $R_1 \geq R$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ 在 $V(z_0, R)$ 上绝对收敛且一致收敛.

(ii) $\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z-z_0)^k = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}(z-z_0)^{-m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$

记 $w = \frac{1}{z - z_0}$, 上式 $= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{c_{-m}}{w^m}$ 在 $r < |z - z_0| < R$ 内收敛 \Rightarrow 在 $\frac{1}{R} < |w| < \frac{1}{r}$ 收敛
 $\Rightarrow \sum_{m=-1}^{+\infty} c_{-m} w^m$ 的收敛半径 $R_2 \geq \frac{1}{r} \Rightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} w^m$ 在 $|w| < \frac{1}{r}$ 上绝对收敛且紧一致收敛.
 即 $\sum_{k=-1}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ 在 $|z - z_0| > r$ 上绝对收敛且紧一致收敛. \square

Remark

(i) $r = 0$, **Taylor 展开** 有微分表达式 $r > 0$, **Laurent 展式** 只有积分表达式且 f 在 z_0 可能无定义.

(ii) 幂级数有很多优美的性质, 如收敛域是一个圆, 在圆内绝对收敛、内闭一致收敛、可逐项求导求积分

Laurent 级数 (双边幂级数) 在收敛圆环内部也集成一样的性质, 即在收敛圆环内绝对收敛、内闭一致收敛、可逐项求导求积分 (正项部分相同, 负项部分可以通过换元得到平行性质) \square

Theorem 4.9 Laurent 展式的唯一性

$A = \{z : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$ $f \in H(A)$

若 $f(z)$ 在 A 可表示成 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, z_0 \in A$, 则 c_k 只能是如下形式:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{k+1}} dw (\clubsuit), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

即 **Laurent 展式** 唯一.

Proof Key point:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{k+1}} dw = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

由 **Lemma 4.1** 可知该级数在圆周 $|z - z_0| = \rho$ 上一致收敛

在 (\clubsuit) 两端同时乘以 $\frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{f(w)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(z - z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(w - z_0)^k}{(w - z_0)^{n+1}} = c_n (\text{key - point})$$

即

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(z - z_0)^{n+1}} dw$$

由 n 的任意性可知 **Laurent 展式** 唯一. \square

4.5 孤立奇点及其分类

Recall 奇点:

z_0 是 $f(z)$ 的奇点 (i) z_0 不是解析点 (ii) z_0 的任何邻域内都有 $f(z)$ 的解析点.

孤立奇点:

$\exists R > 0$ s.t. $f(z)$ 在 $V(z_0, R) - \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ 内解析且 $f(z)$ 在 z_0 处不解析.

则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点** (甚至可能在 z_0 处无定义)

此时 $f(z)$ 在 $V(z_0, R) - \{z_0\}$ 内有 **Laurent 展开**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad z \in V(z_0, R) - \{z_0\}$$

□

Definition 4.7 奇点相关定义

(i) 称非负幂部分 $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的**正则部分**, 称负幂部分 $\sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的**主要部分**.

(ii) 若 $f(z)$ 以 z_0 为孤立奇点:

①若 $f(z)$ 在 z_0 的主要部分是 0, 则 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**.

②若 $f(z)$ 在 z_0 的主要部分不是 0, 但是有有限多项设为:

$$\frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0}, c_{-m} \neq 0, c_k = 0 (\forall k < -m)$$

则称 z_0 是 f 的 **m 阶极点**.

③若 $f(z)$ 在 z_0 的主要部分有无限多项, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的**本性奇点 (本质奇点)**.

Theorem 4.10 孤立奇点

设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是: $f(z)$ 在 z_0 附近有界.

Proof

\Rightarrow : 若 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, f 在 z_0 附近有界, 则 f 在 z_0 附近有 $f(z) = \sum_0^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, 0 < |z - z_0| < R$, 令 $z \rightarrow z_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ 有界 $\Rightarrow f(z)$ 在 z_0 附近有界.

\Leftarrow : 若 $f(z)$ 在 z_0 附近有界, 且在 z_0 附近可展成 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$,

我们目的是证明: $c_k = 0, k < 0$

由有界性, 设 $\exists M > 0$ s.t. $|f(z)| \leq M, 0 < |z - z_0| < R$

$$\Rightarrow |c_k| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{|z-z_0|=\rho < R} \frac{ds}{\rho^{k+1}} = \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi\rho}{\rho^{k+1}} = \frac{M}{\rho^k} \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0) \Rightarrow c_k = 0$$

□

Theorem 4.11 极点

设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点,

(i) z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶极点 $\iff f(z)$ 在 z_0 附近可以写成 $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$, g 在 z_0 处解析且 $g(z_0) \neq 0$

(ii) z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\iff \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} f(z) = \infty$.

Proof 利用定义展开证明, 有时间在写吧...

□

Theorem 4.12 Weierstrass 定理

z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点

$\iff \forall w \in \mathbb{C}_\infty$ 存在一个点列 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ s.t. $z_n \neq z_0, z_n \rightarrow z_0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$.

Proof \Leftarrow : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ 不存在! 由定义可知 z_0 为 f 的本性奇点

这是由于 $f(z)$ 在本性奇点附近的值域在 \mathbb{C}_∞ 上是稠密的.

\Rightarrow : 我们利用反证法来证明

□

5 Appendix

Theorem 5.1

Theorem.

Definition 5.1

Definition.

Example 5.1

Example.

Lemma 5.1

Lemma

Proposition 5.1

Proposition

Corollary 5.1

Corollary.

Exercise 5.1

Exercise.

Proof Proof.

Solution Solution.

Remark Remark.

Recall Recall.

Analysis Analysis.

Claim Claim.