组合论中的欧拉数

Abstract

本文深入探讨了组合论中的欧拉数，重点研究其在集合升序问题中的定义、性质及应用。论文首先介绍了一阶欧拉数 $A(n,k)$，用于表示集合 $[n]$ 的全排列中恰有 k 个下降的排列数，并通过递归关系、生成函数及与第二类斯特林数的关系进行分析。其次，讨论了二阶欧拉数 $B(n,k)$，针对集合 $[[n]]$ 的排列，探索其性质及与斯特林数的联系。此外，论文推广至 m 阶欧拉数 $T_{n,k}^{(m)}$，并研究其生成函数、积分表示及与欧拉分数的关联。本文旨在为组合数学中的升序问题提供系统性研究框架，并为进一步探索欧拉数的应用奠定基础。

关键词：组合论，欧拉数，斯特林数，组合恒等式.

1 背景

欧拉数作为组合论中的重要计数工具，最初由欧拉在研究排列统计问题时引入，用于描述特定序列的升序或下降特性。[10] 一阶欧拉数 $A(n,k)$ 计数集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ 的全排列中恰有 k 个下降的排列数，其递归性质和生成函数形式为组合计数提供了便捷工具。二阶欧拉数 $B(n,k)$ 则针对重复元素集合 $[[n]]=\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$，进一步扩展了欧拉数的应用场景。近年来，$m$ 阶欧拉数的提出将研究推广至更广义的排列集合，涉及复杂的递归关系和生成函数表示。

欧拉数与第二类斯特林数之间的联系是组合论研究的重要课题。第二类斯特林数 $S(n,k)$ 表示将 n 个不同元素划分为 k 个非空子集的方案数，其与欧拉数的相互转化公式揭示了排列与划分之间的深刻联系。此外，欧拉多项式和欧拉分数的引入为欧拉数的代数性质提供了新的视角，尤其在生成函数和积分表示方面展现了强大的分析能力。本文将在前人研究的基础上，系统整理一阶、二阶及 m 阶欧拉数的定义、性质及推导，探索其与斯特林数和欧拉分数的关联，并为后续研究提供理论支持。

2 一阶欧拉数

2.1 基本定义

定义 2.1 (一阶欧拉数) 通常记为 $A(n,k)$ 或者 $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$，用来表示集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ 的全排列 $\pi=\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ 中恰好有 k 个下降（或上升）的排列数. 其中下降定义为 $\exists i\ s.t.\ \pi_i>\pi_{i+1}, 1\le i\le n-1$.

根据此定义，我们容易知道：

性质 2.1 $A(1,0)=1, A(1,k)=0\ (k\neq 0)\ A(n,n)=0, A(n,k)=0\ (k<0$ 或 $k\ge n)$

例 2.1 对于 $n=3$，全排列 $\Pi=\{\{123\},\{132\},\{213\},\{231\},\{312\},\{321\}\}$

- $\{123\}$：0 个下降；
- $\{312\},\{132\},\{213\},\{231\}$：1 个下降；
- $\{321\}$：2 个下降.

故 $A(3,0)=1, A(3,1)=4, A(3,2)=1$.

定理 2.2 一阶欧拉数满足对称性：

$$A(n,k)=A(n,n-1-k).$$

n	$A(n,0)$	$A(n,1)$	$A(n,2)$	$A(n,3)$	$A(n,4)$	$A(n,5)$	$A(n,6)$	$A(n,7)$	$A(n,8)$
0	1								
1	1	0							
2	1	1	0						
3	1	4	1	0					
4	1	11	11	1	0				
5	1	26	66	444	1	0			
6	1	57	302	302	57	1	0		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	
8	1	247	4293	15619	15619	4239	247	1	0

Table 1: 一阶欧拉数数表

Proof 考虑排列 π 的逆排列 π'，定义为 $\pi'(\pi(i)) = i$。若 π 在位置 i 有升序，即 $\pi(i) < \pi(i+1)$，则 $\pi'(j)$ 的值在 π 中对应的位置为 $\pi(i)$ 和 $\pi(i+1)$。由于 $\pi(i) < \pi(i+1)$，在 π' 中，位置 j 对应降序 $\pi'(j+1) < \pi'(j)$.

因此，π 中升序数为 k 的排列对应于 π' 中降序数为 k 的排列。而降序数为 k 的排列，其升序数为 $(n-1)-k$。于是，升序数为 k 的排列数 $A(n,k)$ 等于升序数为 $n-1-k$ 的排列数 $A(n, n-1-k)$.□

2.2 相关命题

定理 2.3 对于任意正整数 n，一阶欧拉数满足以下递推关系：

$$A(n,k) = (k+1)A(n-1,k) + (n-k)A(n-1,k-1). \tag{1}$$

Proof 基于排列 $\pi \in S_n$ 移除 n 后的情形，我们考虑将排列 π 分为两类，记 π 移除 n 后的排列为 ρ，则

- **情形 1**：$\rho \in S_{n-1}$ 有 k 个下降，插入 n 后的 π 仍然保持 k 个下降. 此时 ρ 的个数为 $A(n-1,k)$，要使得 n 插入 ρ 后得到的 π 仍然同 ρ 一样有 k 个下降，首先我们可以把 n 插到 ρ 的末尾，由于 $\forall \rho_i < n$，故 $\rho_{n-1} < n$ 不构成下降，故此时得到的 π 也是保持 k 个下降；另一面，对于 ρ 的任意一个下降 $\rho_i > \rho_{i+1}$，我们可以考虑把 n 插入到 ρ_i 和 ρ_{i+1} 之间，这样有 $\rho_i < n$ 和 $\rho_{i+1} < n$，这样仍然保持下降数不变，即得到的 π 也保持 k 个下降. 综合起来共有 $(k+1)A(n-1,k)$ 种可能.
- **情形 2**：$\rho \in S_{n-1}$ 有 $k-1$ 个下降，插入 n 后的 π 有 k 个下降. 此时 ρ 的个数为 $A(n-1,k-1)$，要使得 n 插入 ρ 后得到的 π 变为有 k 个下降，我们只可能将 k 插到除**情形 1** 以外剩下的 $((n-1)+1)-((k-1)+1) = n-k$ 个位置上，综合起来共有 $(n-k)A(n-1,k-1)$ 种可能.

故结合上述两种情形，我们可得 $A(n,k) = (n-k)A(n-1,k-1) + (k+1)A(n-1,k)$. □

命题 2.4 Worpitzky 恒等式：

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\binom{x+k}{n}. \tag{2}$$

Proof 当 $n=1$ 时，左边为 $x^1 = x$；右边为 $\sum_{k=0}^{0} A(1,k)\binom{x+k}{1} = A(1,0)\binom{x}{1} = 1 \cdot x = x$ ，成立。

假设恒等式对 $n=m$ 成立，即：

$$x^m=\sum_{k=0}^{m-1}A(m,k)\binom{x+k}{m}.$$

我们需要证明对 $n=m+1$ 成立，即：

$$x^{m+1}=\sum_{k=0}^{m}A(m+1,k)\binom{x+k}{m+1}.$$

将归纳假设的左边乘以 x，得到：

$$x^{m+1}=x\cdot x^m=x\sum_{k=0}^{m-1}A(m,k)\binom{x+k}{m}.$$

注意到：

$$x\binom{x+k}{m}=(x+k)\binom{x+k}{m}-k\binom{x+k}{m}.$$

根据二项式系数的性质：

$$(x+k)\binom{x+k}{m}=(m+1)\binom{x+k}{m+1}+k\binom{x+k+1}{m+1},$$

我们可以将表达式重写，并利用欧拉数的递归关系 $A(m+1,k)=(k+1)A(m,k)+(m+1-k)A(m,k-1)$，最终推导出：

$$\begin{aligned}
x^{m+1}&=x\sum_{k=0}^{m}A(m,k)\binom{x+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}A(m,k)\binom{x+k}{m+1}+\sum_{k=0}^{m}(m-k)A(m,k)\binom{x+k+1}{m+1}\\
&=\sum_{k=0}^{m}A(m+1,k)\binom{x+k}{m+1}+\sum_{k=0}^{m+1}(m-k+1)A(m,k-1)\binom{x+k}{m+1}\\
&=\sum_{k=0}^{m+1}A(m,k)\binom{x+k}{m+1}
\end{aligned}$$

因此，恒等式对 $n=m+1$ 成立，证明完成。 □

定义 2.2 (欧拉多项式) 对于非负整数 n，定义欧拉多项式 $A_n(t)$ 为：

$$A_n(t)=\sum_{k=0}^{n}A(n,k)t^k$$

命题 2.5 欧拉多项式的系数满足以下关系：

$$(t-1)A_n(t)+t\frac{d}{dt}A_n(t)=A_{n+1}(t).$$

Proof 利用欧拉数的递推关系，我们可得：

$$\begin{aligned}(t-1)A_n(t)+t\frac{d}{dt}A_n(t)&=\sum_{k=0}^{n}A(n,k)t^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}A(n,k)t^k+\sum_{k=1}^{n}kA(n,k)t^k\\&=\sum_{k=1}^{n+1}A(n,k-1)t^k-\sum_{k=0}^{n}A(n,k)t^k+\sum_{k=1}^{n}kA(n,k)t^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\left[A(n,k-1)+(k-1)A(n,k)\right]t^k+A(n,n)t^{n+1}-A(n,0)\\&=A_{n+1}(t)\end{aligned}$$

定理 2.6 欧拉多项式 $A_t(t)$ 的指数生成函数为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_t(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}}=\left(1-\frac{e^{(t-1)x}-1}{t-1}\right)^{-1}.$$

Proof 设 $G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\frac{x^n}{n!}$ 为欧拉多项式的指数生成函数。欧拉数满足递推关系：

$$A(n,k)=(k+1)A(n-1,k)+(n-k)A(n-1,k-1).$$

将递推关系代入生成函数的定义，并对 $n\geq 1$ 求和，得到：

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n+1}(t)\frac{x^n}{n!}.$$

将 $A_{n+1}(t)$ 的表达式代入 $\frac{\partial G}{\partial x}$：

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(t-1)A_n(t)+t\frac{d}{dt}A_n(t)\right]\frac{x^n}{n!}.$$

拆分求和：

$$\frac{\partial G}{\partial x}=(t-1)\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\frac{x^n}{n!}+t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}A_n(t)\frac{x^n}{n!}.$$

注意到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\frac{x^n}{n!}=G(t,x),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}A_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{\partial G}{\partial t}.$$

可以推导出偏微分方程：

$$\frac{\partial G}{\partial x}=(t-1)G(t,x)+t\frac{\partial G}{\partial t}.$$

我们可以求得方程的解为：

$$G(t,x)=\frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}}.$$

接下来我们验证其满足偏微分方程：

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{(t-1)^2e^{(t-1)x}}{(t-e^{(t-1)x})^2},\quad \frac{\partial G}{\partial t}=\frac{e^{(t-1)x}(1-(t-1)x)-1}{(t-e^{(t-1)x})^2}.$$

代入偏微分方程：

$$(t-1)G+t\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{(t-1)^2}{t-e^{(t-1)x}}+t\cdot\frac{e^{(t-1)x}(1-(t-1)x)-1}{(t-e^{(t-1)x})^2}=\frac{\partial G}{\partial x}.$$

因此，生成函数的表达式成立。 □

定理 2.7 欧拉数 $A(n,k)$ 的显式公式为：

$$A(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n. \tag{3}$$

Proof 从生成函数出发：

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}}=\left(1-\frac{e^{(t-1)x}-1}{t-1}\right)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{e^{(t-1)x}-1}{t-1}\right)^m$$

展开 $(e^{(t-1)x}-1)^m$：

$$(e^{(t-1)x}-1)^m=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^{m-j}e^{j(t-1)x}.$$

因此：

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\frac{x^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(t-1)^m}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^{m-j}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(j(t-1))^l x^l}{l!}.$$

提取 x^n 的系数：

$$A_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^{m-j}j^n(t-1)^{n-m}.$$

展开 $(t-1)^{n-m}$：

$$(t-1)^{n-m}=\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n-m}{i}t^i(-1)^{n-m-i}.$$

提取 t^k 的系数：

$$A(n,k)=\sum_{m=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{n-m}{k}(-1)^{n-k-j}j^n.$$

通过变量替换和组合恒等式化简，得到：

$$A(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n.$$

即得 (3) 式. □

根据 (3) 式，在 k 比较小的时候，我们可以求出 $A(n,k)$ 的具体的值：

$$A(n,0)=1, \quad A(n,1)=2^n-n-1, \quad A(n,2)=3^n-(n+1)2^n+\binom{n+1}{2}$$

2.3 与斯特林数之间的联系

一阶欧拉数与第二类斯特林数存在一定的联系.

定义 2.3 (第二类斯特林数) *[12]* 我们用 $\left\{ n \atop k \right\}$ 或者 $S(n,k)$ 来表示将一个有 n 件物品的集合划分成 k 个非空子集的方法数.

根据 [2]，我们给出一阶欧拉数和第二类斯特林数之间的联系：

定理 2.8 一阶欧拉数和第二类斯特林数有如下联系：

$$m!\left\{ n \atop m \right\} = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)\binom{k}{n,m}, \tag{4}$$

$$A(n,m)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\}\binom{n-k}{m}(-1)^{n-k-m}k!. \tag{5}$$

我们可以考虑用 x^{n-m} 来乘上 (4) 并对 m 求和，我们可得 $\sum_{m=0}^{n}\left\{ n \atop m \right\}m!x^{n-m}=\sum_{k=0}^{n}A(n,k)(x+1)^k$，接着我们用 $x-1$ 来替代 x 观察 x^k 的系数即可得到 (5).

3 二阶欧拉数

3.1 基本定义

定义 3.1 (二阶欧拉数) 通常记为 $B(n,k)$ 或者 $\left\langle\!\left\langle n \atop k \right\rangle\!\right\rangle$，用来表示集合 $[[n]]=\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$ 的全排列 $\pi=\pi_1\pi_2\ldots\pi_{2n}$ 中恰好有 k 个下降（或上升）的排列数. 其中下降定义为 $\exists i \ s.t. \ \pi_i>\pi_{i+1}, 1\le i\le 2n-1$.

性质 3.1 $B(n,k)\ge 0$；当 $k<0$ 或 $k>n$ 时，$B(n,k)=0$；$B(n,0)=1, B(n,n)=0$.

注 3.1 有别于一阶欧拉数的是：二阶欧拉数不再具有对称性 $B(n,k)\neq B(n,n-k)$.

定理 3.2 对于任意正整数 n，二阶欧拉数 $B(n,k)$ 满足递归关系：

$$B(n,k)=(k+1)B(n-1,k)+(2n-k-1)B(n-1,k-1) \tag{6}$$

Proof 这里的证明过程与一阶欧拉数递推公式的证明过程几乎完全一样，只不过我们用 $2n-1$ 替代了之前的 n. □

n	$B(n,0)$	$B(n,1)$	$B(n,2)$	$B(n,3)$	$B(n,4)$	$B(n,5)$	$B(n,6)$	$B(n,7)$	$B(n,8)$
0	1								
1	1	0							
2	1	2	0						
3	1	8	6	0					
4	1	22	58	24	0				
5	1	52	328	444	120	0			
6	1	114	1452	4400	3708	720	0		
7	1	240	5610	32120	58140	33984	5040	0	
8	1	494	19950	195800	644020	785304	341136	40320	0

Table 2: 二阶欧拉数数表

3.2 相关命题

定理 3.3 二阶欧拉数 $B(n,k)$ 有显示公式：

$$B(n,k)=\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}=n-k-1\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k+1}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots(k+1)^{\alpha_{k+1}}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(k+1)). \tag{7}$$

Proof 我们考虑对 n 进行归纳：

$n=1$ 时，上式显然成立；

假设 n 时上式成立，我们需要证明 $n+1$ 时上式也成立。结合二阶欧拉数 $B(n,k)$ 的递推公式 (6) 我们有：

$$\begin{aligned}
&B(n+1,k)=(k+1)B(n,k)+(2n-k+1)B(n,k-1)\\
=&(k+1)\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1}=n-k-1\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k+1}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots(k+1)^{\alpha_{k+1}}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(k+1))\\
&+(2n-k+1)\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n-k\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots k^{\alpha_k}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1})+k)\\
=&\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+(\alpha_{k+1}+1)=n-k\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k+1}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots(k+1)^{\alpha_{k+1}+1}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(k+1))\\
&+\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n-k\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots k^{\alpha_k}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1})+k)(2(n-k)+(k+1))\\
=&\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k+1}=n-k\\ \beta_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k,\ \beta_{k+1}\geq 1}} 1^{\beta_1}2^{\beta_2}\cdots(k+1)^{\beta_{k+1}}(2\beta_1+2)(2(\beta_1+\beta_2)+3)\cdots(2(\beta_1+\cdots+\beta_k)+(k+1))\\
&+\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1}=n-k\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k,\ \alpha_{k+1}=0}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots(k+1)^{\alpha_{k+1}}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(k+1))\\
=&\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1}=n-k\\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,k+1}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots(k+1)^{\alpha_{k+1}}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\cdots(2(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(k+1))
\end{aligned}$$

推论 3.4 根据 *(7)*，我们有：

- $B(n,n-1)=n! \quad (n\ge 1)$
- $B(n,1)=2^{n+1}-2(n+1) \quad (n\ge 1)$

例 3.1 计算 $B(5,2)$.

解 根据 *(7)*，我们有：

$$\begin{aligned}
B(5,2)=&\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3\\ \alpha_j\ge 0,\ j=1,2,3}} 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}(2\alpha_1+2)(2(\alpha_1+\alpha_2)+3)\\
=&1^2 2^0 3^0(4+2)(4+3)+1^0 2^2 3^0(0+2)(4+3)+1^0 2^0 3^2(0+2)(0+3)\\
+&1^1 2^1 3^0(2+2)(4+3)+1^1 2^0 3^1(2+2)(0+3)+1^0 2^1 3^1(0+2)(2+3)\\
=&42+56+54+56+60+60\\
=&328
\end{aligned}$$

与表格*2*中的 $B(5,2)$ 相同.

3.3 与斯特林数之间的联系

二阶欧拉数与第二类斯特林数存在一定的联系. 根据 [2]，我们给出二阶欧拉数和第二类斯特林数之间的联系：

定理 3.5 二阶欧拉数和第二类斯特林数有如下联系：

$$\left\{{n+m \atop n}\right\}=\sum_{i=0}^{m}B(m,i)\binom{n+2m-1-i}{2m}, \tag{8}$$

$$B(n,k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{2n+1}{i}(-1)^i\left\{{n+k-i+1 \atop k-i+1}\right\}. \tag{9}$$

Proof

①我们先来证明 (8)：

我们定义 $|\Theta_{n,K}|$ 表示在 $[[n]]$ 中插入 k 个板且每个上升之前的缝隙中间与第一个数之前的位置必须插至少一个板的方法数，例如：

$$|11|22, |1|221, ||2211, |2|211, |22|11, |221|1, |2211|$$

即 $|\Theta_{2,2}|=7$. 我们接下来给出两个来自 [4] 的引理：

- **引理 3.6** *[4]*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\Theta_{k,n}|x^n=\sum_{i=0}^{k}\frac{B(k,i)x^{i+1}}{(1-x)^{2k+1}} \tag{10}$$

Proof 对于 $\forall \pi \in [[n]]$，令 $d(\pi)$ 为排列 π 中的下降数，而 $\dfrac{1}{(1-x)^{2k+1}}$ 为往 $2k+1$ 个空格内插板的方案数，故：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Theta_{k,n}| x^n = \left(\sum_{\pi \in [[n]]} x^{d(\pi)} \right) (1 + x + x^2 + \dots)^{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{B(k,i) x^{i+1}}{(1-x)^{2k+1}}$$

故 (10) 得证. □

- **引理 3.7** *[4]*

$$|\Theta_{k,n}| = \left\{ {n+k \atop n} \right\} \tag{11}$$

Proof 我们考虑构造一个 $\Theta_{k,n}$ 和符合 $\left\{ {n+k \atop n} \right\}$ 这个第二类斯特林数的集合的双射：

– 我们构造：给定一个合法的 $\Theta_{k,n}$ 中的序列，对应一个将 $n+k$ 个元素分为 n 组的划分.
将每一步均看作将子串从依次左至右顺次添加进某个位置；我们维护一个计数器，每添加一个新元素（板或者数，相同数只算第一个）时，计数器增加并为这个元素赋上计数器当前的值；添加一个板的时候，我们就开辟一个新分组；添加一个数 i（相同数只算第一个）的时候，我们找到这个数左侧的第一个板，将其与这个板归为一组。
例如我们尝试构造一个 $\Theta_{2,2}$：

$$11|2|344|3|2||$$

序列	分组
$\|\|\|\|$	$[1],[2],[3],[4]$
$\|\|11\|\|$	$[1],[2,5],[3],[4]$
$\|\|11\|2\|\|2\|$	$[1],[2,5],[3,6],[4],[7],[8]$
$\|\|11\|2\|3\|3\|2\|$	$[1],[2,5],[3,6],[4],[7,9],[8],[10]$
$\|\|11\|2\|3\|443\|2\|$	$[1],[2,5],[3,6],[4],[7,9],[8],[10,11]$

根据我们的构造方法我们可以看到，组数就是板数，而元素数就是序列长度，符合 (11) 中 $\left\{ {n+k \atop n} \right\}$ 的形式；且由于序列对应的构造过程唯一与方案唯一，故不同序列得到的分组互不相同。故上述我们的构造是合理的.

– 我们构造：给定一个将 $n+k$ 个元素分为 n 组的划分，对应一个合法的 $\Theta_{k,n}$ 中的序列.
对于给定的分组，我们把每组的最小元素看作板（为了让数保留，用下划线进行标记）。从上述构造过程中我们可以看出每组恰有一个最小的元素代表板。

$$[1],[2,5],[3,6],[4],[7,9],[8],[10,11] \to$$
$$[\underline{1}],[\underline{2},5],[\underline{3},6],[\underline{4}],[\underline{7},9],[\underline{8}],[\underline{10},11] \to$$
$$[|],[|,5],[|,6],[|],[|,9],[|],[|,11] \to$$
$$[|],[|,1],[|,2],[|],[|,3],[|],[|,4] \to$$

接着我们严格按照从左至右的顺序插入每个组。设当且要插入的组有下划线标记的数为 i，若 $i-1$ 是一个没有被下划线标记的数则找到其最左侧出现的位置，插入它的右边，并且将

没有被下划线标记的数复制一份加在右侧；若 $i{-}1$ 是一个被下划线标记的数则这两次插入必然连续，直接放到刚才插入结果的右侧即可。

插入	序列
$[\underline{1}]$	$\underline{1}$
$[\underline{2},5]$	$\underline{1}\underline{2}55$
$[\underline{3},6]$	$\underline{1}\underline{2}55\underline{3}66$
$[\underline{4}]$	$\underline{1}\underline{2}55\underline{3}66\underline{4}$
$[\underline{7},9]$	$\underline{1}\underline{2}55\underline{3}6\underline{7}996\underline{4}$
$[\underline{8}]$	$\underline{1}\underline{2}55\underline{3}6\underline{7}99\underline{8}6\underline{4}$
$[\underline{10},11]$	$\underline{1}\underline{2}55\underline{3}6\underline{7}9\underline{10}(11)(11)9\underline{8}6\underline{4}$

接着我们将下划线还原为"|"，并将编号对应的数按从小到大赋值即得

$$\underline{1}\underline{2}55\underline{3}6\underline{7}9\underline{10}(11)(11)9\underline{8}6\underline{4} \quad \to \quad 11|2|344|3|2||$$

这样我们便建立起了一个双射，故我们有 $|\Theta_{k,n}| = \left\{ \begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right\}$，故 (11) 得证. □

有了 (10) 和 (11)，我们将 (10) 的 m 次项的系数拿出来比较，我们记 $[x^k]\Omega(x)$ 为 $\Omega(x)$ 中 x^k 的系数，即有：

$$|\Theta_{m,n}| = \sum_{i=0}^{n-1} B(n,i)[x^{n-i-1}]\frac{1}{(1-x)^{2m+1}}$$

而 $[x^{n-i-1}]\frac{1}{(1-x)^{2m+1}}$ 代表的就是把 $n-i-1$ 个球放到 $2m+1$ 各不同的盒子中 (允许盒子空)，即为 $\binom{2m+n-i-1}{2m}$ 故我们有：$\left\{ \begin{matrix} n+m \\ n \end{matrix} \right\} = |\Theta_{m,n}| = \sum_{i=0}^{m} B(m,i)\binom{n+2m-i-1}{2m}$，故 (8) 得证. □

②我们接着来证明 (9)：在这里我们要证明：

$$B(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{2n+1}{i}(-1)^i \binom{n+m-i+1}{m-i+1}$$

考虑将后面的斯特林数用 (8)) 代换，故我们只需证明下式对 $\forall k$ 均成立：

$$B(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{2n+1}{i}(-1)^i \sum_{j=0}^{n} B(n,j)\binom{k-i+2n-j}{2n}$$

等价于证明：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} B(n,k) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{2n+1}{i}(-1)^i\sum_{j=0}^{n} B(n,j)\binom{k-i+2n-j}{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{2n+1}{i}(-1)^i\binom{j-i+2n-k}{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i}(-1)^i\sum_{j=i}^{n}\binom{j-i+2n-k}{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i}(-1)^i\left(\binom{3n-i-k+1}{2n+1}-\binom{2n-k}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

而 $2n-k>2n+1$，故 $\binom{2n-k}{2n+1}=0$，故我们只需要证明：

$$\sum_{k=0}^{n} B(n,k) = \sum_{k=0}^{n} B(n,k)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{2n+1}{i}\binom{3n-i-k+1}{2n+1}$$

通过观察上式的左右两端，我们发现如果 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{2n+1}{i}\binom{3n-i-k+1}{2n+1}=1$ 成立那么 (9) 得证，我们来证明：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{2n+1}{i}\binom{3n-i-k+1}{2n+1}=1, \quad \forall k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

构造生成函数: $\Phi(x)=(1-x)^{2n+1}, \Psi(x)=\frac{1}{(1-x)^{2n+1}}$, 我们记 $[x^k]\Omega(x)$ 为 $\Omega(x)$ 中 x^k 的系数，则利用二项式展开，我们可知: $(-1)^k\binom{2n+1}{i}=[x^i]\Phi(x)$; 同时，由于 $(2n+1)+(n-i-k)=3n-i-k+1$，即 $\binom{3n-i-k+1}{2n+1}$ 相当于是将 $n-i-k$ 个相同的球放入 $2n+2$ 个不同的盒子中的方案数，对应的就是 $\binom{3n-i-k+1}{2n+1}=[x^{n-i-k}]\Psi(x)$. 因此：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{2n+1}{i}\binom{3n-i-k+1}{2n+1}=\sum_{i=0}^{n}[x^i]\Phi(x)\cdot[x^{n-i-k}]\Psi(x)=[x^{n-k}](\Phi(x)\cdot\Psi(x))=[x^{n-k}]\frac{1}{1-x}=1$$

故 (9) 得证.

4 $\boldsymbol{m}$ 阶欧拉数

4.1 基本定义

定义 4.1 令 Π_{mn} 为多重集 $M_n=\{1,\ldots,1,2,\ldots,2,\ldots,n,\ldots,n\}$（每个整数出现 m 次）的所有排列集合，满足条件：若 $u<v<w$ 且 $a_u=a_w$，则 $a_v\le a_u$。称 Π_{mn} 中的元素为 ***m*-斯特林排列**。m 阶欧拉数 $T_{n,k}^{(m)}$ *[13]* 定义为 Π_{mn} 中恰有 k 个下降（即 $a_j>a_{j+1}$ 或 $j=mn$）的排列数量，其中

$T_{1,0}^{(m)}=1$，$T_{1,k}^{(m)}=0$（$k\neq 0$），且 $T_{n,k}^{(m)}=0$（$k<0$ 或 $k\geq n$）。

定理 4.1 对于 $m\geq 1$，$0\leq k\leq n-1$，m 阶欧拉数 $T_{n,k}^{(m)}$ 满足以下递推关系：

$$T_{n,k}^{(m)}=(k+1)T_{n-1,k}^{(m)}+(mn-k-m+1)T_{n-1,k-1}^{(m)} \tag{12}$$

其中 $T_{1,0}^{(m)}=1$，$T_{1,k}^{(m)}=0$（$k\neq 0$），$T_{n,k}^{(m)}=0$.（$k<0$ 或 $k\geq n$）。

Proof 基于组合构造，对于 Π_{mn} 中具有 k 个下降的排列 w，删除元素 n（出现 m 次）后，得到 $\Pi_{m(n-1)}$ 中的排列，下降数为 k 或 $k-1$。反之，通过在 $\Pi_{m(n-1)}$ 的排列中插入 n，可以构造 Π_{mn} 中的排列。具体地，若 $v\in\Pi_{m(n-1)}$ 有 $k-1$ 个下降，则在 v 的最左侧或下降位置插入 n，共 $mn-k-m+1$ 个位置；若 v 有 k 个下降，则在下降位置或最右侧插入 n，共 $k+1$ 个位置。 □

结合我们之前对一阶欧拉数和二阶欧拉数的研究，特别地，当 $m=1,2$ 时，递推关系分别为：

$$A(n,k)=T_{n,k}^{(1)}=(k+1)T_{n-1,k}^{(1)}+(n-k)T_{n-1,k-1}^{(1)},$$

$$B(n,k)=T_{n,k}^{(2)}=(k+1)T_{n-1,k}^{(2)}+(2n-k-1)T_{n-1,k-1}^{(2)},$$

定义 4.2 定义 m 阶欧拉多项式为：

$$S_{m,n}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}T_{n,k}^{(m)}t^k. \tag{13}$$

4.2 相关命题

定理 4.2 m 阶欧拉多项式 $S_{m,n}(t)$ 满足：*[6]*

$$S_{m,n+1}(t)=(1+mnt)S_{m,n}(t)+t(1-t)S'_{m,n}(t). \tag{14}$$

Proof 我们对 (13) 两边求导，我们可得：

$$S'_{m,k}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}kT_{n,k}^{(m)}t^{k-1}$$

即：

$$t(1-t)S'_{m,k}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}kT_{n,k}^{(m)}t^k-\sum_{k=1}^{n}(k-1)T_{n,k-1}^{(m)}t^k$$

同时：

$$(1+mnt)S_{m,n}(t)=(1+mnt)\sum_{k=0}^{n-1}T_{n,k}^{(m)}t^k=\sum_{k=0}^{n-1}T_{n,k}^{(m)}t^k+\sum_{k=0}^{n-1}mnT_{n,k-1}^{(m)}t^k$$

结合 (12)，我们可得：

$$
\begin{aligned}
&(1+mnt)S_{m,n}(t)+t(1-t)S'_{m,n}(t)\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)T_{n,k}^{(m)}t^k+\sum_{k=0}^{n-1}(mn-k+1)T_{n,k-1}^{(m)}t^k\\
=&\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)T_{n-1,k}^{(m)}+(mn-k-m+1)T_{n-1,k-1}^{(m)}\right)t^k\\
=&\sum_{k=0}^{n}T_{n+1,k}^{(m)}t^k=S_{m,n+1}(t)
\end{aligned}
$$

这样我们便得到了 (14). □

推论 4.3 m 阶欧拉数的行和为：

$$
\sum_{k=0}^{n-1}T_{n,k}^{(m)}=\prod_{k=1}^{n-1}(km+1). \tag{15}
$$

Proof 我们令 (14) 中的 $t=1$，可得

$$
S_{m,n+1}(1)=(1+mn)S_{m,n}(1)
$$

即：

$$
\sum_{k=0}^{n}T_{n+1,k}^{(m)}=(1+mn)\sum_{k=0}^{n-1}T_{n,k}^{(m)}
$$

以此类推我们可得：

$$
\sum_{k=0}^{n-1}T_{n,k}^{(m)}=((n-1)m+1)\cdots(2m+1)\cdot(m+1)\cdot 1=\prod_{k=1}^{n-1}(km+1)
$$

即为 (15). □

定理 4.4 m 阶欧拉数 $T_{n,k}^{(m)}$ 的显式表达式为：

$$
\begin{aligned}
T_{n,k}^{(m)}=&\sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_{k+1}=n-k-1\\ \ell_1,\ldots,\ell_{k+1}\geq 0}}1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots(k+1)^{\ell_{k+1}}\,(m\ell_1+m)\\
&(m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_k)+k(m-1)+1)\,.
\end{aligned}
$$

特别地，当 $m=1,2$ 时，(16) 即为 (3) 与 (7).

Proof $n=1$ 时，(16) 的左右两端都为 1，显然成立.

由数学归纳法，我们假设对 n 和给定的 k 满足 $0\leq k\leq n-1$ 均成立，则 $n+1$ 时，利用 (12)，我们有：

$$
\begin{aligned}
T_{n+1,k}^{(m)} &= (k+1)T_{n,k}^{(m)} + (mn-k+1)T_{n,k-1}^{(m)} \\
&= (k+1) \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_{k+1}=n-k-1 \\ \ell_1,\ldots,\ell_{k+1}\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots(k+1)^{\ell_{k+1}}\,(m\ell_1+m) \\
&(m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_k)+k(m-1)+1) \\
&+ \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_k=n-k \\ \ell_1,\ldots,\ell_k\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots k^{\ell_k}\,(m\ell_1+m) \\
&\quad (m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_{k-1})+(k-1)(m-1)+1) \\
&= \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_{k+1}=n-k-1 \\ \ell_1,\ldots,\ell_{k+1}\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots(k+1)^{\ell_{k+1}+1}\,(m\ell_1+m) \\
&\quad (m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_k)+k(m-1)+1) \\
&+ \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_k=n-k \\ \ell_1,\ldots,\ell_k\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots k^{\ell_k}\,(m\ell_1+m)\,(m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1) \\
&\quad \cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_{k-1})+(k-1)(m-1)+1)\,(m(n-k)+k(m-1)+1) \\
&= \sum_{\substack{s_1+s_2+\cdots+s_{k+1}=n-k \\ s_1,\ldots,s_{k+1}\geq 0}} 1^{s_1}2^{s_2}\cdots(k+1)^{s_{k+1}}\,(ms_1+m) \\
&\quad (m(s_1+s_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(s_1+\cdots+s_k)+k(m-1)+1) \\
&+ \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_{k+1}=n-k \\ \ell_1,\ldots,\ell_{k+1}\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots k^{\ell_k}(k+1)^{\ell_{k+1}}\,(m\ell_1+m) \\
&\quad (m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_{k-1})+(k-1)(m-1)+1) \\
&\quad (m(\ell_1+\cdots+\ell_k)+k(m-1)+1) \\
&= \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_{k+1}=n-k \\ \ell_1,\ldots,\ell_{k+1}\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots k^{\ell_k}(k+1)^{\ell_{k+1}}\,(m\ell_1+m) \\
&\quad (m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_{k-1})+(k-1)(m-1)+1) \\
&\quad (m(\ell_1+\cdots+\ell_k)+k(m-1)+1) \\
&= \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_{k+1}=n-k \\ \ell_1,\ldots,\ell_{k+1}\geq 0}} 1^{\ell_1}2^{\ell_2}\cdots k^{\ell_k}(k+1)^{\ell_{k+1}}\,(m\ell_1+m) \\
&\quad (m(\ell_1+\ell_2)+2(m-1)+1)\cdots(m(\ell_1+\cdots+\ell_k)+k(m-1)+1)\,.
\end{aligned}
$$

故 (16) 得证.

4.3 欧拉分数

定义 4.3 $S_{m,n}(t)$ 为 m 阶欧拉多项式，我们定义 m 阶欧拉分数定义为：

$$
F_{m,n}(t) = \frac{S_{m,n}(t)}{(1-t)^{m(n-1)+2}}, \tag{16}
$$

和

$$\widehat{F}_{m,n}(t) = \frac{tS_{m,n}(t)}{(1-t)^{mn+1}}. \tag{17}$$

事实上，(16) 和 (17) 分别对应 [7] 和 [4] 中关于欧拉分数的定义，这两个形式的欧拉分数也存在一定的关联. 当 $m=1$ 时，$F_{1,n}(t)=\widehat{F}_{1,n}(t)$ 为经典欧拉分数 [2].

m 阶欧拉分数具有以下微分性质：

命题 4.5 对于 *(16)* 和 *(17)* 中的两种欧拉分数，我们有 *[6, 7, 4]*:

$$\widehat{F}_{m,n}(t) = \frac{t}{(1-t)^{m-1}}F_{m,n}(t), \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(1-t)^{m-1}}F_{m,n}(t)\right) = F_{m,n+1}(t), \tag{19}$$

$$t\frac{d}{dt}\widehat{F}_{m,n}(t) = (1-t)^{m-1}\widehat{F}_{m,n+1}(t). \tag{20}$$

m 阶欧拉分数还具有积分表示形式：

命题 4.6 对于整数 $m,n\geq 1$，$a\geq 0$，$n+a+b\geq 0$，有 *[6]*:

$$\int_{-\infty}^{0} t^{a}(1-t)^{-a-b-2}F_{m,n}(t)\,dt = \frac{(-1)^a}{mn+a+b+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k T_{n,k}^{(m)}(mn+a+b)^{-1}, \tag{21}$$

$$\int_{-\infty}^{0} t^{a-1}(1-t)^{m-a-b-3}\widehat{F}_{m,n}(t)\,dt = \frac{(-1)^a}{mn+a+b+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k T_{n,k}^{(m)}(mn+a+b)^{-1}. \tag{22}$$

4.4 与斯特林数之间的联系

m 阶欧拉数与第二类斯特林数 $\left\{ n \atop k \right\}$ 之间存在密切联系。令 $\widehat{F}_{m,n}(t)=\sum_{\ell\geq 0} f_{m,n}(\ell)t^{\ell}$，则：

定理 4.7 m 阶欧拉数的系数 $f_{m,n}(\ell)$ 满足：

$$f_{m,n}(\ell) = \sum_{k=0}^{\ell-1} T_{n,k}^{(m)}\binom{mn+\ell-k-1}{mn}. \tag{23}$$

特别地，当 $m=2$ 时：

$$f_{2,n}(\ell) = \left\{ n+\ell \atop \ell \right\}.$$

即为 *(8)*

5 结论与展望

本文系统研究了组合论中欧拉数在集合升序问题中的定义、性质及应用。通过对一阶欧拉数 $A(n,k)$ 的递归公式、显式表达式及生成函数的分析，揭示了其在排列计数中的核心作用。针对二阶欧拉数

$B(n,k)$，我们探讨了其针对重复元素集合的排列特性，并通过与第二类斯特林数的联系进一步丰富了其组合意义。m 阶欧拉数 $T_{n,k}^{(m)}$ 的推广研究拓展了欧拉数的理论框架，其递归关系、生成函数及积分表示为更复杂的排列问题提供了分析工具。此外，欧拉分数 $F_{m,n}(t)$ 和 $\widehat{F}_{m,n}(t)$ 的引入深化了对欧拉数代数性质的理解，尤其在微分和积分表示方面展现了潜力。

值得注意的是，我们对于下降的定义是排列 π 中满足 $a_j > a_{j+1}$，但是如果我们推广下降的定义，引入 **λ-下降**，即排列 π 中符合 $a_{j+1} > a_{j+2} > \cdots > a_{j+\lambda}$ 的这样一个子排列称为 **λ-下降**，对于新的下降定义，我们定义了 λ-m 阶欧拉数 $T_{\lambda,n,k}^{(m)}$，并且我们还可以将其与斯特林数、伯努利数等联系起来，进一步探索它的性质和应用，这也是未来的一个很好的研究方向.

References

[1] Aigner, M. (1975). *Kombinatorik I*. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. Reidel, Dordrecht.

[3] Petersen, T. K. (2015). *Eulerian Numbers*. Birkhäuser, New York.

[4] Gessel, I., & Stanley, R. P. (1978). Stirling polynomials. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 24, 24–33.

[5] Fu, A. M. (2021). Some identities related to the second-order Eulerian numbers. *arXiv:2104.09316*.

[6] He,ņš

System: T.-X. (2023). The mth-order Eulerian numbers. *Applied Analysis and Discrete Mathematics*, 17, 25–46.

[7] O'Sullivan, C. (2023). Stirling's approximation and a hidden link between two of Ramanujan's approximations. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 197, 105740.

[8] Stanley, R. P. (2011). *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. Cambridge University Press.

[9] Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley.

[10] Wikipedia, "Eulerian Number", `https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_number`, Accessed: May 16, 2025.

[11] Bóna, M. (2004). *Combinatorics of Permutations*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

[12] Wikipedia, "Stirling Number", `https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_number`, Accessed: May 16, 2025.

[13] Graham, R. L., & Lehmer, D. (1977). On the Eulerian Numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 22(3), 277–285.