



12/10/24

Algebra

(First Edition)

Problems of Advanced Algebra

(from Liu Qing)

Sherr1

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r},t) &= H\psi(\mathbf{r},t) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r},t) \end{aligned}$$

Nankai University

1 1st Class(The Trace)

Definition 1.1 $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值, 则 $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Exercise 1.1 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $tr(AA^T) = 0 \iff A \equiv 0$.

Exercise 1.2 A 实方阵. 则 A 对称 $\iff A^2 = AA^T \iff A^2 = A^T A$, 则 A 反对称 $\iff A^2 = -AA^T \iff A^2 = -A^T A$.

Exercise 1.3 A 复方阵. 则 A 是 *Hermite* 阵 $\iff A^2 = \bar{A}^T A$.

Exercise 1.4 A_1, A_2, \dots, A_n 实对称, $O = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2$, 则 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = O$.

Exercise 1.5 A, B 实方阵. $AB - BA = A^T + B^T$, 则 $A + B = O$.

Exercise 1.6 A, B 复方阵. $AB - BA = \bar{A}^T - \bar{B}^T$, 则 $A = B$.

Exercise 1.7 $A^2 = A$, $A \in M_n(\mathbb{F})$. 则 $\exists P \in M_n(\mathbb{F})$ 可逆 s.t. $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $tr(A) = r(A)$.

Exercise 1.8 $f : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ 线性函数, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $f(AB) = f(BA)$. 则 $\exists c \in \mathbb{F}$ s.t. $f = c \cdot tr$ 即 $f(A) = c \cdot tr(A)$. 进一步 $f(A) = f(A^T)$.

Exercise 1.9 A 实对称, 则 $r(A) \cdot tr(A^2) \geq (tr(A))^2$.

Exercise 1.10 A, B 实对称. 证: $tr((AB)^2) \leq tr(A^2 B^2)$. " = ' 成立 $\iff AB = BA$.

Exercise 1.11 A, B *Hermite* 阵. 证: $tr((AB)^2) \leq tr(A^2 B^2)$. " = ' 成立 $\iff AB = BA$.

Exercise 1.12 A 正规方阵. $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ 则 A_1, A_3 为正规方阵, $A_2 = O$.

Proposition 1.1 A 方阵, $r(A) = 1$. 则 $A = \alpha\beta^T$, α, β 为列向量.

进而 $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = kA$ ($k = \beta^T\alpha = tr(A)$)

A 的极小多项式为 $x^2 - tr(A)x$

Jordan 型只能有两种: $\begin{pmatrix} tr(A) & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \dots & \\ & & & O \end{pmatrix}$

A 相似于对形 $\iff tr(A) \neq 0$

Exercise 1.13 $A \in M_n(\mathbb{F}), \text{tr}(A) = 0$ 则 A 相似于对角线全为 0 的矩阵.

Exercise 1.14 $A^2 = A, B^2 = B, I_n - A - B$ 可逆, 则 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

Exercise 1.15 证明: 不存在正交矩阵 A, B 满足: $A^2 = AB + B^2$.

Exercise 1.16 $A \in M_n(\mathbb{F}), \text{tr}(A) = 0$ 则 $\exists X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ s.t. $XY - YX = A$.

Exercise 1.17 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则 $A = \lambda I_n + A_1 + A_2$ 其中 A_1, A_2 为幂零.

Exercise 1.18 $S = s_1, s_2, \dots, s_m | s_i \in M_n(\mathbb{F})$ 乘法封闭, s_i 可逆, 比较 $\sum_{i=1}^m \text{tr}(s_i)$ 与 $r(\sum_{i=1}^m s_i)$ 的关系.

Exercise 1.19 A, B 方阵, $r(AB - BA + I_n) = 1$, 求 $\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2)$.

Exercise 1.20 A, B 的特征值对应相等 $\iff \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

2 2nd Class(Nilpotent Matrices and Cyclic Matrices)

Definition 2.1 (幂零矩阵) $A \in M_n(\mathbb{C})$ 称 A 幂零, 若 $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $A^m = 0$.

Proposition 2.1 下列关于幂零矩阵的等价性质:

A 幂零 ($A^n = 0$).

A 相似于严格上三角矩阵

A 的特征值全为 0.

$\text{tr}(A^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Exercise 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), AB - BA = A$. 证: A 幂零且 A, B 由公共特征向量.

Exercise 2.2 记 $[A, B] = AB - BA, A_i, B_i$ 为方阵 $i = 1, 2, \dots, m. C = \sum_{i=1}^m [A_i, B_i]$ 且 $[C, A_i] = 0 \forall i = 1, 2, \dots, m$. 则 C 幂零.

Exercise 2.3 $AB - BA = A + B$. 证: A, B 可以同时上三角化.

Exercise 2.4 $AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$. 则 A, B, C 可同时上三角化.

Exercise 2.5 $A^2B + AB^2 = 2ABA$, 证: $AB - BA$ 幂零.

Exercise 2.6 $A + t_i B (1 \leq i \leq n + 1)$ 幂零. t_i 互不相同, 证: A, B 幂零.

Exercise 2.7 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), AB - BA = B^n$, 则 $AB = BA$.

Exercise 2.8 $A \in M_3(\mathbb{C}), \det(I_3 + A^k) = 1$ 对于 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. 证: A 幂零.

Exercise 2.9 A, B, C 实对称方阵, 证 $\text{tr}((ABC)^2) \leq \text{tr}(A^2BC^2B)$ 并求等号成立条件.

Exercise 2.10 A, B, C, D 实对称方阵, 证 $\text{tr}((ABCD)^2) \leq \text{tr}(A^2BCD^2CB)$

Exercise 2.11 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, A$ 实反对称. X, Y, M, N 为 n 阶实矩阵. $XY = aI_n + A, MN = aI_n + A$, 证 ① $XN + Y^T M^T \neq O$. ② 问 $xN + Y^T M^T$ 是否可逆.

Exercise 2.12 $A = (\cos(\theta_i + \theta_j))_{n \times n}$, 求 A 的特征值.

Definition 2.2 (循环矩阵) 形如: $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ 成为

循环矩阵.

$$\text{令 } \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 令 } f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \text{ 则 } A = f(\epsilon).$$

Proposition 2.2 下面是几个循环矩阵的性质:

n 阶循环矩阵的和、积均为循环矩阵.

若 A 可逆, 则 A^{-1} 也是循环矩阵.

伴随阵 A^* 也是循环矩阵.

$$\epsilon \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ 为}$$

$x^n = 1$ 的根. $\Rightarrow |A| = f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)$.

$\text{rank}(A) = n - k \iff f(x) = 0$ 有 k 个 n 次单位根.

Exercise 2.13 矩阵 A 可以对角化当且仅当 A 相似于某个循环矩阵.

3 3rd Class(Solving "AX = XB" Equation Problems)

给定 A, B 分别是 m, n 阶方阵, X 为 $m \times n$ 阶矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & & \\ & \mu & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu \end{pmatrix}$$

Exercise 3.1 求 $AX = XB$ 且证明: $\lambda \neq \mu$ 当且仅当 $AX = XB$ 仅有零解.

Exercise 3.2 若 A, B 的特征多项式互素, 则 $AX = XB$ 仅有零解.

Exercise 3.3 若 A, B 有 r 个不同的公共特征值, 则 $AX = XB$ 有秩为 r 的解.

Exercise 3.4 若 $AX = XB$ 有秩为 r 的解, 则 A, B 至少有 r 个不同的公共特征值.

Exercise 3.5 证: $AX = XB$ 仅有零解当且仅当 A, B 无公共特征值.

Exercise 3.6 $A \in M_n(\mathbb{R}), r(A) = n - 1$, 则 $\sigma: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, X \rightarrow AX + XA$ 不是满射.

Exercise 3.7 A, B 实方阵, A, B 特征值均为正数 $A^2 = B^2$ 则 $A = B$.

Exercise 3.8 A, C 正定矩阵, 问: 方程 $AX + XA = C$ ①是否有解? ②解是否唯一? ③解是否正定.

Exercise 3.9 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $-\lambda_i$ 不是 A 的特征值, 则: $X \rightarrow AX + XA^T$ 为同构.

Exercise 3.10 $B \in M_n(\mathbb{F})$, 则 B 幂零当且仅当 $\exists A \in M_n(\mathbb{F})$ s.t. $AB - BA = B$ (A 可取为对角化矩阵).

Exercise 3.11 A 的特征值均为偶数, 则 $X + AX - XA^2 = 0$ 的矩阵方程仅有零解.

Exercise 3.12 (1) 求 $C(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | AX = XA\}$.

(2) 求 $C(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | AX = XA\}$ 的维数及一组基. 其中 A 为:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & & & O \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

A 为 Frobenius 矩阵.

Exercise 3.13 $A, B \in M_n(\mathbb{R}), A^m = B^m, m$ 为奇数, A, B 实对称, 则 $A = B$.

Exercise 3.14 $A, B \in M_n(\mathbb{R}), A, B$ 正定方阵, $A^2 = B^2$, 则 $A = B$.

Exercise 3.15 $A, B \in M_n(\mathbb{R}), A, B$ 正定方阵, $A^m = B^m, m$ 正整数, 则 $A = B$.

Exercise 3.16 对正定方阵, 开 m 次正定方根是唯一的.

Exercise 3.17 A 可逆实方阵, $A^3 = A^T A A^T$, 求 A (证: A 满足 $AA^T = A^T A$)

Exercise 3.18 A 正定, 则存在唯一的正定方阵 H s.t. $A = H - H^{-1}$.

Exercise 3.19 n 阶方阵 A 满足 $f(A) = 0$, 其中 $f(x) = a_m x^m + \dots + a_0, |a_m| > \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|$, 证 $2X + A^2 X = X A^3$ 仅有零解.

$A \in M_n(\mathbb{C}), \det(I_n + A^k) = 1, k = 1, 2, \dots, 2^n$ 成立, 则 A 为幂零.

Exercise 3.20 $A \in M_n(\mathbb{C}), I_n - \bar{A}A$ 的特征多项式记为 $p(x)$, 则 $p(x)$ 为实系数多项式.

Exercise 3.21 $A, B, M \in M_n(\mathbb{R}), AM = MB, A, B$ 有相同的特征多项式, 则 $\forall x \in M_n(\mathbb{R}),$ 有 $|A - MX| = |B - XM|$.

4 4^{th} (\mathbb{F} -Similarity)

Definition 4.1 称 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ 是 \mathbb{F} -相似, 若 $\exists T \in \mathbb{F}$ 可逆, 且 $TA = BT$.

Exercise 4.1 $A, B \in \mathbb{R}$ 则 A, B 实相似当且仅当复相似.

Exercise 4.2 $A, B \in \mathbb{F}$ 则 A, B 是 \mathbb{F} -相似当且仅当复相似.

Exercise 4.3 \mathbb{F}, \mathbb{K} 域, $A, B \in M_n(\mathbb{F}) \cup M_n(\mathbb{K})$. 则 A, B 是 \mathbb{F} -相似当且仅当 A, B 是 \mathbb{K} -相似.

Exercise 4.4 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I} \subset M_n(\mathbb{Q})$. 若它们在实数域 \mathbb{R} 上相似, 则它们在 \mathbb{Q} 上也相似. (称 $\{A_i\}, \{B_i\}$ 在 \mathbb{F} 数域上相似, 若 $\exists P \in M_n(\mathbb{F})$ 可逆 s.t. $P^{-1}A_iP = B_i, \forall i \in I$).

Exercise 4.5 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则 A 与 A^T 相似, 且存在对称矩阵 $S \in \mathbb{F}^{n \times n}, S^{-1}AS = A^T$.

Exercise 4.6 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则 A 在 \mathbb{F} 上的极小多项式与 A 在 \mathbb{C} 上的极小多项式相同.

Proposition 4.1 任何 \mathbb{F} 上的方阵是 \mathbb{F} 上两个对称矩阵的积.

- ①任何 Jordan 矩阵都是两个复对称矩阵的积.
- ②任何复方阵都是两个复对称矩阵的积.
- ③ $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则存在可逆的对称矩阵 $P \in M_n(\mathbb{F})$ s.t. AP 为对称矩阵.

Exercise 4.7 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}). (b_1 \cdots b_{n-1} \neq 0)$

求 $C(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) | AX = XA\}$.

Exercise 4.8 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 线性变换 $\sigma : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \sigma(X) = AX - XB, \forall X \in M_n(\mathbb{C})$

- ①求 σ 的全部特征值.
- ②若 A, B 可对角化, 则 σ 也可以对角化.
- ③应用 ② 于 $A = 0; B = O; A = B; A = -B$ 等情况.
- ④若 σ 可对角化, 问: A, B 可以对角化吗?

Exercise 4.9 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}, B \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 考虑下列线性变换:

- ① $f : \mathbb{F}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times m} \quad X \mapsto AXB^T$
- ② $g : \mathbb{F}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times m} \quad X \mapsto AX + XB^T$

若 λ_a, λ_b 分别为 A, B 的特征值, 证明: $\lambda_a \cdot \lambda_b, \lambda_a + \lambda_b$ 分别是 f, g 的特征值.

Exercise 4.10 用线性变换的观点证明: 代数数全体构成域, 代数整数构成环.

Exercise 4.11 $AB = BA, A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A, B 由公共特征向量进而可以同时上三角化.

Exercise 4.12 $AB = BA, A, B$ 均可以对角化, 则 A, B 可以同时对角化.

Exercise 4.13 $r(AB - BA) = 1$, 则 A, B 可以同时上三角化.

Exercise 4.14 $r(AB - BA) \leq 1$, 则 A, B 可以同时酉相似于上三角化.

Exercise 4.15 $AB - BA$ 等于 A, B 的线性组合, 则 A, B 可以同时上三角化.

Exercise 4.16 设 S 为无穷多个可相似对角化的 n 阶方阵的集合, 其中任意两个方阵可换, 证明: S 中所有矩阵可以同时相似对角化.

Exercise 4.17 复数域上一组可两两交换的方阵, 则它们至少有一个公共特征向量.